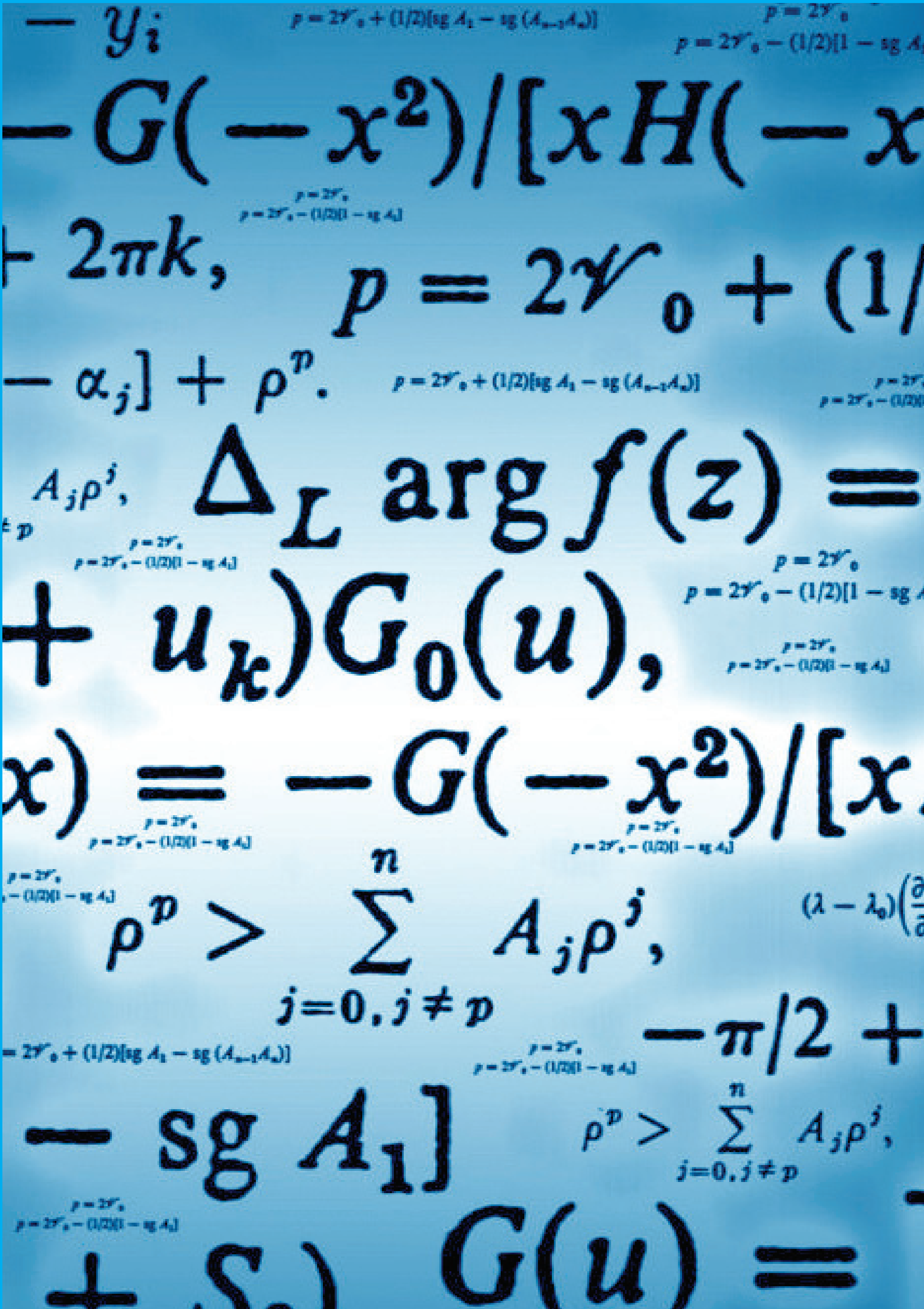
MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales II



2º Bachillerato

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales II

2º BACHILLERATO

Primera edición, 2014
Autor: Sergio Galea Bonet
Maquetación: Patricia Penavella Soto
Edita: Educàlia Editorial, S.L.
Imprime: Igràfic

ISBN: 978-84-941715-3-6
Depòsit Legal: V-2966-2013
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial, S.L.
Avda de les Jacarandes 2 loft 327 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
E-Mail: educaliaeditorial@e-ducalia.com
http://www.e-ducalia.com/material-escolar-colegios-ies.php

PREFACIO

Existen muchos libros de texto de segundo de bachillerato de la modalidad de ciencias sociales. Pero pocos sintetizan la teoría y priorizan los ejercicios prácticos para que los alumnos afronten, con garantías, una formación completa que les permita, además, superar la prueba de selectividad.

En el presente libro, la teoría queda en un segundo plano, al explicarla de forma breve, clara y concisa, y destacan las actividades y ejemplos para que los alumnos experimenten y practiquen todos los contenidos.

Por tanto, se puede diferenciar del material de otras editoriales en:

- Teoría sintetizada, expuesta de forma clara y concisa.
- Ejemplos y actividades resueltas de todos los contenidos.
- Colección de unas 50 actividades integradas en los temas, para entender practicando los diferentes apartados.
- Colección de unos 30 ejercicios propuestos en selectividad de diferentes comunidades autónomas, con sus correspondientes soluciones.

ÍNDICE

BLOC I: ÁLGEBRA

1. MATRICES.
- 1.1 DEFINICIONES.
- 1.2 OPERACIONES CON MATRICES.
- 1.3 MÉTODO DE GAUSS PARA OBTENER LA MATRIZ INVERSA.
- 1.4 MÉTODO DE GAUSS PARA OBTENER EL RANGO DE UNA MATRIZ.
- 1.5 ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES.
- 1.6 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

2. DETERMINANTES.
- 2.1 DEFINICIONES.
- 2.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.
- 2.3 MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO.
- 2.4 CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.
- 2.5 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA.
- 2.6 ECUACIONES MATRICIALES MEDIANTE DETERMINANTES.
- 2.7 EJERCICIOS DE REPASO.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
- 3.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
- 3.2 MÉTODO DE GAUSS.
- 3.3 MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA.
- 3.4 REGLA DE CRAMER.
- 3.5 TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS.
- 3.6 SISTEMAS HOMOGÉNEOS
- 3.7 DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON PARÁMETROS.
- 3.8 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
- 3.9 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

4. PROGRAMACIÓN LINEAL.
- 4.1 INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.
- 4.2 SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.
- 4.3 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES LINEALES EN CONJUNTOS CONVEXOS.
- 4.4 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.
- 4.5 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

BLOC II: ANÁLISIS

5. LÍMITES Y CONTINUIDAD.
- 5.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.
- 5.2 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to c$.
- 5.3 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to +\infty$.
- 5.4 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$.
- 5.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$.
- 5.6 CONTINUIDAD.
- 5.7 EJERCICIOS DE REPASO.

6. DERIVADAS DE FUNCIONES.

6.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.
6.2 FUNCIÓN DERIVADA.
6.3 REGLAS DE DERIVACIÓN.
6.4 DERIVABILIDAD.
6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

7. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

7.1 RECTA TANGENTE A UNA CURVA.
7.2 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.
7.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS.
7.4 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.
7.5 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES.
7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

8. ELEMENTOS FUNDAMENTALES PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

8.1 DOMINIO DE DEFINICIÓN.
8.2 SIMETRÍAS.
8.3 PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.
8.4 RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS.
8.5 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.
8.6 MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.
8.7 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.
8.8 EJERCICIOS RESUELTOS.
8.9 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.
8.10 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

9. INICIACIÓN A LAS INTEGRALES.

9.1 CÁLCULO DE PRIMITIVAS.
9.2 INTEGRAL DEFINIDA.
9.2.1 CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA CURVA Y EL EJE OX.
9.2.2 CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS.
9.3 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

BLOC III: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.

10. PROBABILIDAD.

10.1 EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS.
10.2 CONCEPTO DE PROBABILIDAD.
10.3 PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES.
10.4 TABLAS DE CONTINGENCIA.
10.5 DIAGRAMAS DE ÁRBOL.
10.6 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.
10.7 TEOREMA DE BAYES.
10.8 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

11. ESTADÍSTICA.

11.1 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.
11.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL.
11.3 INFERENCIA ESTADÍSTICA.
11.4 TEST DE HIPÓTESIS.
11.5 EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE SELECTIVIDAD *(con solución)*.

TEMA 1: MATRICES

1.- DEFINICIONES.

Se llama matriz de orden mxn (o de dimensión mxn) a un conjunto de m·n números dispuestos en m filas y n columnas.

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; matriz de dimensión 2x3 → 2 filas y 3 columnas.

$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; vector fila o matriz de orden 1x4 → 1 fila y 4 columnas.

$C=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; vector columna o matriz de orden 3x1 → 3 filas y 1 columna.

$D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; matriz cuadrada de orden 3 → 3 filas y 3 columnas.

Para designar el término que se encuentra en la fila "i" y la columna "j", utilizamos la notación $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $a_{12}=1$; ¿ a_{33} , a_{31} , a_{24} ?

La notación que utilizamos para designar una matriz es $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$.

Las matrices cuadradas son aquellas matrices con el mismo número de filas que de columnas.

En estas matrices llamamos diagonal principal a los elementos de la forma $\boldsymbol{a_{ii}}$.

Ejemplo:

$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}$; matriz cuadrada de orden 2

Dos matrices son iguales cuando tienen misma dimensión y coinciden término a término.

La matriz transpuesta de $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ es la matriz $\boldsymbol{A^t=(a_{ji})}$ que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas y las columnas por las filas.

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Notar que $\boldsymbol{A}$ tiene orden 2x3 y $\boldsymbol{A^t}$ tiene orden 3x2.

Actividades

1.- Escribe las matrices transpuestas de:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \;;\; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \;;\; C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;;\; D=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices simétricas son las matrices cuadradas en las que se verifica que $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$, es decir, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^t}$.

Ejemplo: $$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Las matrices diagonales son las matrices cuadradas que tienen todos los elementos cero excepto los de la diagonal principal.

Ejemplo: $$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices triangulares son las matrices cuadradas que tienen todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal cero.

Ejemplos: $$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 15 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

matriz triangular superior. matriz triangular inferior.

Las matrices nulas son aquellas matrices en las cuales todos los elementos son cero. Se designan por O.

Ejemplo: $$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$; matriz nula de orden 3x3

Las matrices identidad son las matrices diagonales con la diagonal principal formada por 1.

Ejemplos: $$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- OPERACIONES CON MATRICES.

→ SUMA DE MATRICES:

Para sumar dos matrices es necesario que tengan la misma dimensión, y se suman término a término.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 3+2 & 2+0 \\ 2+7 & 5+0 & 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

a) Conmutativa: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

b) Asociativa: $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$

c) Elemento neutro (*la matriz nula es el elemento neutro para la suma*):
$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}$

d) Toda matriz $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ tiene su matriz opuesta $(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{a}_{ij})$:
$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}$

Actividades

2.- Comprueba las propiedades anteriores con las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&2&-3\\1&0&6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&3&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

La resta de matrices verifica las mismas propiedades que la suma porque: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

→ <u>PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ:</u>

Para multiplicar un número por una matriz, se multiplica por el número cada término de la matriz.

<u>Ejemplo</u>:

$$5\cdot\begin{pmatrix}3&2&5\\2&0&4\\1&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&10&25\\10&0&20\\5&5&30\end{pmatrix}$$

Propiedades:

a) Distributiva: $\begin{cases}\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{B}\\(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\end{cases}$

b) Asociativa: $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{A}$

c) El elemento neutro (*1 es el elemento neutro para el producto de un número por una matriz*)
$\boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

Actividades

3.- Comprueba las propiedades anteriores con las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&2&-3\\1&0&6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&3&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\quad t=-1,\,r=3,\,s=2$$

4.- Dadas las siguientes matrices, calcula $\boldsymbol{3}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}-\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{C}$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\4&1&-3\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-4&1&-3\end{pmatrix}\;;\;C=\begin{pmatrix}-7&1&-1\\8&4&0\end{pmatrix}\;;\;D=\begin{pmatrix}-3&1&5\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

→ PRODUCTO DE MATRICES:

Para que dos matrices puedan multiplicarse, $\boldsymbol{A \cdot B}$, es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda.

La matriz producto se obtiene multiplicando cada fila de la primera por cada columna de la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+2\cdot 0 & 3\cdot 5+2\cdot(-2) \\ 1\cdot(-1)+4\cdot 0 & 1\cdot 5+4\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$A \cdot B = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-2)\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 0+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-5) \\ 1\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

¿ $\boldsymbol{B \cdot A}$?

Propiedades:

a) Asociativa: $\boldsymbol{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$

b) Distributiva: $\boldsymbol{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$

Actividades

5.- Comprueba con las siguientes matrices las propiedades anteriores:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

6.- ¿Conmutatividad del producto: $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$? Compruébalo con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

7.- Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula: $\boldsymbol{2 \cdot A - 3 \cdot B} \quad ; \quad \boldsymbol{A^2 - A \cdot B}$

8.- Realiza todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 8 \\ 0 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

9.- Calcula la matriz $\boldsymbol{M = P^2 - 3 \cdot P - 2 \cdot I}$ siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ calcula:

a) $\boldsymbol{-2 \cdot A + 3 \cdot B}$ b) $\boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot A \cdot B}$ c) $\boldsymbol{B \cdot (-A)}$ d) $\boldsymbol{A^2 - B^2}$

11.- Efectúa el siguiente producto: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.- Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba que:

a) $\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$ b) $\boldsymbol{(3 \cdot A)^t = 3 \cdot A^t}$

13.- Calcula $\boldsymbol{3 \cdot A \cdot A^t - 2 \cdot I}$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

14.- Comprueba que $\boldsymbol{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$ siendo las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

$a) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$b) \, 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16.- Comprueba que la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ verifica que $\boldsymbol{(A + I)^2 = 6 \cdot I}$.

3.- MÉTODO DE GAUSS PARA OBTENER LA MATRIZ INVERSA

La matriz identidad de orden n es la matriz cuadrada de orden n con todos los elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son todos 1. La denotamos por $\boldsymbol{I_n}$.

Esta matriz, $\boldsymbol{I_n}$, para el producto de matrices satisface: $\boldsymbol{A \cdot I_n = A = I_n \cdot A}$

Actividades

17.- Comprueba esta propiedad para I_3 ; $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada, $\boldsymbol{A}$, es invertible, regular o se dice que tiene inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$, si $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$

Transformaciones elementales con matrices:

a) Multiplicar o dividir los elementos de una fila o columna por un número.

b) Sumar a los elementos de una fila o columna, los elementos de otra multiplicados por un número.

El método de Gauss para calcular la matriz inversa se basa en las transformaciones elementales sobre las filas de una matriz.

<u>MÉTODO DE GAUSS:</u> la matriz cuadrada, $\boldsymbol{A}$, tiene inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$, si podemos pasar mediante transformaciones elementales de

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{I}_n\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{I}_n\middle|\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

Nota: si en la parte izquierda aparece una fila de ceros, A no té inversa.

<u>Ejemplo</u>: Encuentra la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\left(A\middle|I_2\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f_2-f_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f_1+2f_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)\cdot f_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Encuentra la inversa de $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix}$

$$\left(B\middle|I_3\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{2\cdot f_3-3\cdot f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -4 & -3 & 0 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3+f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)$$

En la parte izquierda ha aparecido una fila de ceros, por tant no tiene inversa.

Actividades

18.- Encuentra la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

19.- Encuentra la inversa de $A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

20.- Encuentra la inversa de $M=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

21.- Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o justifica que no tienen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

22.- Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o justifica que no tienen:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

23.- Comprueba que la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ es $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

24.- Encuentra la inversa de las siguientes matrices y comprueba que realmente lo es:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.- MÉTODO DE GAUSS PARA OBTENER EL RANGO DE UNA MATRIZ.

→ RANGO DE UNA MATRIZ:

Vamos a trabajar ahora con vectores, que son una colección de elementos dispuestos en un cierto orden (se parecen a las matrices fila)

Ejemplo: (4, 5, 7, -2) vector de dimensión 4

(-1, 5, 9) vector de dimensión 3

Una combinación lineal de vectores es el resultado de multiplicar cada uno por un número y sumarlos.

Ejemplo: $3\cdot(-2,5,8)+2\cdot(1,7,3)-4\cdot(0,5,-1)=(-4,9,34)$

$\Rightarrow$ (-4,9,34) *es c.l. de los otros tres vectores*

Diversos vectores son linealmente dependientes cuando alguno de ellos puede expresarse como a combinación lineal de los otros.

Ejemplo: $(-2,5,8)$, $(1,7,3)$, $(0,5,-1)$, $(-4,9,34)$ son linealmente dependientes porque

$3\cdot(-2,5,8)+2\cdot(1,7,3)-4\cdot(0,5,-1)=(-4,9,34)$

Diversos vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal de los otros.

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

→ MÉTODO DE GAUSS PARA CALCULAR EL RANGO:

Mediante transformaciones elementales convertiremos la matriz en triangular superior y el número de filas que no sean todas cero será el rango de la matriz.

Recordatorio de las transformaciones:

a) Multiplicar o dividir los elementos de una fila o columna por un número.

b) Sumar a los elementos de una fila o columna, los elementos de otra multiplicados por un número.

c) Intercambiar el lugar de dos filas o dos columnas.

Ejemplo: Encuentra el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10 & -1\\ 7 & 8 & 6 & 1\end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & -2\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10 & -1\\ 7 & 8 & 6 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3-4f_1\\ f_5-7f_1}]{f_2-3f_1} \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & -2\\ 0 & -10 & -13 & 7\\ 0 & -10 & -23 & 8\\ 0 & 0 & 10 & -1\\ 0 & -20 & -36 & 15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_5-2f_2]{f_3-f_2} \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & -2\\ 0 & -10 & -13 & 7\\ 0 & 0 & -10 & 1\\ 0 & 0 & 10 & -1\\ 0 & 0 & -10 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[f_5-f_3]{f_4+f_3} \begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & -2\\ 0 & -10 & -13 & 7\\ 0 & 0 & -10 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ el rang(A)=3

Ejemplo: Estudia el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 1 & a\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}$ según los valores de a.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 1 & a\\ a & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-a\cdot f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -2a & 1-a^2\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-2a\cdot f_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1-a^2\end{pmatrix}$$

Resolvemos $1\text{-}a^2=0 \to \begin{cases} a=1\\ a=-1\end{cases}$

Por tanto, $\begin{cases}\text{si } a=1 \text{ o } a=-1 \;\to\; \text{rang(M)}=2\\ \text{si } a\neq 1 \text{ i } a\neq -1 \;\to\; \text{rang(M)}=3\end{cases}$

Actividades

25.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\-1&1&3&2&0\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\-1&3&1&4\\2&1&5&-1\end{pmatrix}$$

26.- Indica el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

27.- Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&2\\2&1&K\end{pmatrix}\qquad N=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-2&1&3\\1&K&2\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&6&4&K\\4&12&8&-4\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}-1&1&0&2\\1&3&1&0\\2&10&3&K\end{pmatrix}$$

5.- ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

Ejemplos RESUELTOS:

1.- Determina X / $\boldsymbol{A\cdot X\cdot A-B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ siendo $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&-2\\1&3\end{pmatrix}$

Solución:

$$A\cdot X\cdot A-B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow A\cdot X\cdot A=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}\rightarrow \boxed{X=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_1+f_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_2+2f_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\0&-1&2&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\0&1&-2&-3\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-2\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\-13&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-3&2\end{pmatrix}$$

2.- Obtener x, y, z que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Solución:

$$x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+z=0\\-x+z=0\qquad\to x=z\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+y=1 & \to -4x-2x=-2\\3x+2y=0 & \to 3x+2y=0\end{cases}\to -x=-2\to\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=2}\quad;\quad\boxed{z=2}\quad;\quad\boxed{y=-3}$$

3.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\3y-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{cases}x-y=3+2x\\3x+2y=3y-2\end{cases}\to\begin{cases}-x-y=3\\3x-y=-2\end{cases}\to -4x=5\to\boxed{x=-\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{x=-\frac{5}{4}}\quad;\quad\boxed{y=-\frac{7}{4}}$$

4.- Resuelve el siguiente sistema matricial $\begin{cases}2X+Y=A\\4X-3Y=B\end{cases}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}-1&8&7\\-3&6&12\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}13&-4&-21\\-11&12&14\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{cases}2X+Y=A\xrightarrow{\cdot(-2)}-4X-2Y=-2A\\4X-3Y=B\longrightarrow\quad 4X-3Y=B\end{cases}\xrightarrow{reducció}-5Y=B-2A$$

$$\to Y=\frac{2A-B}{5}\quad;\quad X=\frac{3A+B}{10}$$

$$2A=\begin{pmatrix}-2&16&14\\-6&12&24\end{pmatrix}\quad;\quad 3A=\begin{pmatrix}-3&24&21\\-9&18&36\end{pmatrix}$$

$$2A-B=\begin{pmatrix}-2&16&14\\-6&12&24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}13&-4&-21\\-11&12&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&20&35\\5&0&10\end{pmatrix}$$

$$3A+B=\begin{pmatrix}-3&24&21\\-9&18&36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13&-4&-21\\-11&12&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&20&0\\-20&30&50\end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y=\begin{pmatrix}-3&4&7\\1&0&2\end{pmatrix}\quad;\quad X=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&3&5\end{pmatrix}}$$

Actividades

28.- Calcula x, y, z, t para que se verifique: $\begin{pmatrix}3&4\\7&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&21\\69&59\end{pmatrix}$

29.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales $\begin{cases}X-3Y=A\\2X+3Y=B\end{cases}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}-20&-5\\-2&-15\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}23&17\\-4&15\end{pmatrix}$$

30.- Calcula A y B que verifiquen: $\begin{cases}A+B=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&3\end{pmatrix}\\2A-2B=\begin{pmatrix}-6&0&2\\2&2&2\end{pmatrix}\end{cases}$

31.- Calcula x, y, z para que: $\begin{pmatrix}1&b\\a&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$

32.- Calcula x, y, z, t para que se verifique: $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\0&2\end{pmatrix}$

33.- Determina x e y de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-1\\x&y\end{pmatrix}$ verifique que $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

34.- Encuentra X que verifique $\mathbf{3\cdot X-2\cdot A=5\cdot B}$ siendo $A=\begin{pmatrix}3&0\\5&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&6\\1&-3\end{pmatrix}$

35.- Encuentra les matrices A y B de dimensión 2x2 que verifiquen: $\begin{cases}2A+B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}\\A-B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\end{cases}$

36.- Encuentra la matriz X que verifique la ecuación matricial $\boldsymbol{A \cdot X + B = C}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;;\; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37.- Encuentra las matrices X e Y que verifiquen: $2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

38.- Calcula los valores de λ para que la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix}$ verifique $\boldsymbol{A^2 - 6 \cdot A + 9 \cdot I_2 = 0}$

39.- Encuentra las matrices X e Y que verifiquen: $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

40.- Calcula X tal que $\boldsymbol{X - N^2 = M \cdot N}$ siendo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41.- Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

42.- Comprueba que $Q^2 = 2 \cdot Q - I$, siendo: $Q = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular Q^4.

43.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, Encuentra la matriz B para que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

44.- Halla la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $M^2 \cdot X - N = M \cdot X$, siendo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

45.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

46.- Encuentra las matrices A y B que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad y \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

47.- Encuentra las matrices X e Y que verifiquen:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix} \qquad y \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$$

48.- Resuelve la ecuación matricial $\mathbf{2{\cdot}A+A{\cdot}X+B=0}$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

49.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -13 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

50.- Encuentra los valores para que la matriz $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & z\end{pmatrix}$ verifique la ecuación matricial $A\cdot X-X\cdot A=B$

siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

6. EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES DE DE SELECTIVIDAD

1.- Determina el valor de *a*, *b*, y *d* para que se verifique: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$

Sol. a= -1; b= 4; c= 3; d)= 2

2.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Calcula la matriz *C* para que *A·C=B*

Sol. $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2/5 & 0\\ -6/5 & 1\end{pmatrix}$

3.- Resuelve la ecuación matricial *X·A – B = C*, siendo:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

4.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, razona si posee solución la ecuación matricial $A\cdot X=B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

5.- Determina los valores de *x* e *y* que verifican la siguiente igualdad: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$.

Sol. $x=-5/4$; $y=-7/4$

6.- Determina la matriz *X* de dimensión 2x2 para que: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -23 & 14\end{pmatrix}$

7.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A\cdot X-2B=C$, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$.

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}-16\\ 23\\ 15\end{pmatrix}$

8.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcula $(A-I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

b) Obtén la matriz B^t (matriz transpuesta de *B*) y calcula, si es posible, $B^t\cdot A$.

c) Calcula la matriz *X* que verifica $A\cdot X+B=C$.

Sol. a) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ **; b)** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ **; c)** $X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -1 & 5/2 & -2\end{pmatrix}$

9.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$. Calcula *x*, *y*, *z*, sabiendo que *A·B = 2C–D.*

Sol. $x=2/3$; $y=2/3$; $z=-2/3$

10.- Encuentra la matriz *X* que verifica *B·X = A*, siendo $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$

Sol. $B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\ 20\\ -7\end{pmatrix}$

11.- Resuelve la ecuación matricial *2·A = A·X+B,* siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

Sol. A no tiene inversa

12.- Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 5 & 9 & 0\\ 15 & -4 & 4\end{pmatrix};\quad 2X+Y=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

Sol. $X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$

13.- Encuentra los valores de a y b, tal que $A^2-2A=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{cases} a=0 \rightarrow b=\frac{-1}{2} \\ a=2 \rightarrow b=\frac{1}{2} \end{cases}$

14.- Resuelve el sistema matricial: $5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$; $3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Sol. $X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

15.- Resuelve la ecuación matricial: *X · A − 2B = C*, siendo:

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Sol. $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

16.- Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $N=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Resuelve la ecuación: $M^t \cdot X \cdot N = P$.

Sol. $X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}$

17.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a y b para que A · B = B · A.

b) Para a = 1 y b = 0, resuelva la ecuación matricial X · B − A = I_2.

Sol. a) **a=1 b=4** ; **b)** $X=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

18.- a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a para que A^2 sea la matriz nula.

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $\left(M^{-1} \cdot M^t\right)^2$

Sol. a) a=0 **b)** $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

19.- Resolver, indicando los pasos seguidos, la ecuación matricial AB + CX = 2D. Siendo las matrices:

$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Sol. $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -44 & 0 \\ 31 & 0 \end{pmatrix}$

20.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&2&3\\-1&3&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

a) Encontrar, si existe, una matriz X tal que 3X+2A = BC.

b) Encontrar, si existe, la matriz inversa de A.

Sol. *a)* $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&3\\5&-4&-7\\7&-7&2\end{pmatrix}$; *b)* $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9&3&-2\\3&1&0\\7&3&-2\end{pmatrix}$

21.- Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz A^{-1}

b) ¿Cuántas filas y cuántas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación AD = B tenga solución? Resolver la ecuación AD = B.

c) Estudiar el rango de la matriz C.

Sol. *a)* $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$; *b)* $3x2$; $D=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$; *c)* $rang(C)=2$

22.- Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz inversa de la matriz $B-I_3$

b) Calcule una matriz X tal que B · X – 4 · A = X

Sol. *a)* $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix}0&12&4\\0&4&0\\4&-4&4\end{pmatrix}$

23.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

a) Calcule A · B

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación X · B = B + A

Sol. *a)* $\begin{pmatrix}5&0&2\\7&-2&-2\\-3&0&0\end{pmatrix}$; *b)* $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&0&14\\7&3&7\\0&0&0\end{pmatrix}$

24.- a) Halle la matriz X que verifica la ecuación $X\cdot\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}$

b) Determine los valores de x e y que cumplen la igualdad $\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\-x&y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Sol. *a)* $\begin{pmatrix}5&-7\\10&-14\end{pmatrix}$; *b)* $x=3; y=6$

25.- Sean A y B las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcule (A+ B) · (A− B)

b) Determine la matriz X, cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial (A + 2B) · X = 3 · I_2

Sol. $a)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -8 & -9\end{pmatrix}$; $b)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

26.- Calcula los parámetros a, b y c para que se verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -8\end{pmatrix}$$

Sol. $a=-1$; $b=0$; $c=2$

27.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, calcular $A\cdot A^t-5\cdot A^{-1}$ siendo A^t la transpuesta y A^{-1} la inversa de A.

Sol. $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 4 & 9\end{pmatrix}$

28.- Dada la matriz, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique $A+x\cdot A+y\cdot I_2=0$ siendo I_2 la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

Sol. $x=-1$; $y=0$

29.- Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X+I=A\cdot B^t$, siendo I la matriz identidad, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ la matriz transpuesta de B.

Sol. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

30.- Obtener de forma razonada la matriz *X* que verifique la ecuación ***A·X·B=2C***, siendo las matrices:

$A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Sol. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$