
APRENDIENDO DE LOS ERRORES

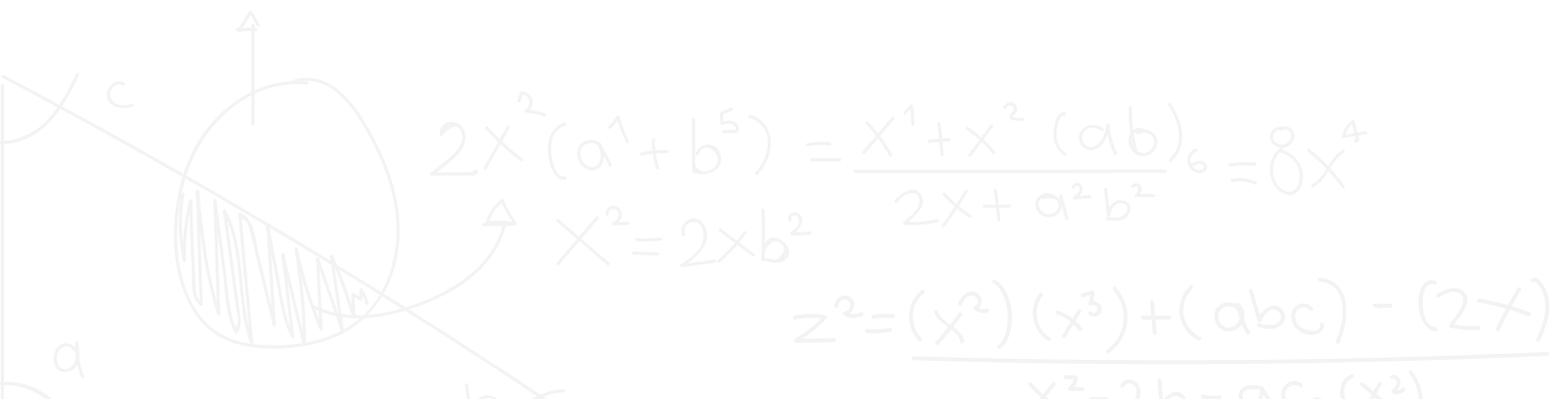
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

MIGUEL GRAS GIGOSOS



¡OJO!

Piensa y reflexiona tus respuestas de los ejercicios y problemas.



APRENDIENDO DE
LOS ERRORES

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

MIGUEL GRAS GIGOSOS



¡OJO!

Piensa y reflexiona tus respuestas de los ejercicios y problemas.

Segunda edición, 2020

Autor: Miguel Gras Gigosos

Maquetación: Educàlia Editorial

Edita: Educàlia Editorial

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-18269-01-1

Depósito legal: V-625-2020

Printed in Spain/Impreso en España.

Todos los derechos reservados. No está permitida la reimpresión de ninguna parte de este libro, ni de imágenes ni de texto, ni tampoco su reproducción, ni utilización, en cualquier forma o por cualquier medio, bien sea electrónico, mecánico o de otro modo, tanto conocida como los que puedan inventarse, incluyendo el fotocopiado o grabación, ni está permitido almacenarlo en un sistema de información y recuperación, sin el permiso anticipado y por escrito del editor.

Alguna de las imágenes que incluye este libro son reproducciones que se han realizado acogiéndose al derecho de cita que aparece en el artículo 32 de la Ley 22/1987, del 11 de noviembre, de la Propiedad intelectual. Educàlia Editorial agradece a todas las instituciones, tanto públicas como privadas, citadas en estas páginas, su colaboración y pide disculpas por la posible omisión involuntaria de algunas de ellas.

Educàlia Editorial

Avda. de las Jacarandas 2 loft 327 46100 Burjassot-València

Tel. 960 624 309 - 963 768 542 - 610 900 111

Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

www.e-ducalia.com



APRENDIENDO DE LOS ERRORES

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA
MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA



MIGUEL GRAS GIGOSOS

Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria

Índice

INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1 DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS	5
❖ TEORÍA	5
❖ ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	10
❖ APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	16
❖ EVALUACIÓN	22
Capítulo 2 POTENCIAS Y RADICALES	24
❖ TEORÍA	24
❖ ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	34
❖ APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	40
❖ EVALUACIÓN	50
Capítulo 3 POLINOMIOS	52
❖ TEORÍA	52
❖ ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	62
❖ APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	68
❖ EVALUACIÓN	78

Capítulo 4	FRACCIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES	80
❖	TEORÍA	80
❖	ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	90
❖	APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	96
❖	EVALUACIÓN	108
Capítulo 5	SISTEMAS DE ECUACIONES	110
❖	TEORÍA	110
❖	ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	120
❖	APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	126
❖	EVALUACIÓN	140
Capítulo 6	INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES	142
❖	TEORÍA	142
❖	ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS	152
❖	APRENDIENDO DE LOS ERRORES...	158
❖	EVALUACIÓN	175

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS. APRENDIENDO DE LOS ERRORES	176
❖ DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS	176
❖ POTENCIAS Y RADICALES	184
❖ POLINOMIOS	198
❖ FRACCIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES	204
❖ SISTEMAS DE ECUACIONES	214
❖ INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES	225
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS. EVALUACIÓN	234
❖ DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS	234
❖ POTENCIAS Y RADICALES	235
❖ POLINOMIOS	236
❖ FRACCIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES	237
❖ SISTEMAS DE ECUACIONES	238
❖ INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES	239
FUENTES DE INFORMACIÓN	240

Introducción

“El único hombre que no se equivoca es el que nunca hace nada”

GOETHE (1749-1832) Poeta y dramaturgo alemán.



La idea de este libro surge tras la observación, durante mis años de docencia, de la repetición reiterada de ciertos errores en la resolución de ejercicios y problemas de matemáticas cometidos por parte de los alumnos durante la etapa de Secundaria. No quiero referirme a los errores de “despiste” sino más bien a los errores de “concepto”, es decir, aquellos errores que se comenten por no entender bien las matemáticas.

Cuando cometemos un error es bueno pararse a reflexionar y pensar qué es lo que ha ocurrido y qué podemos hacer para hacerlo mejor y no equivocarnos. Esta es la idea que he transmitido a mis alumnos, y son ellos con su reflexión, constancia y trabajo, los que han llegado a mejorar su aprendizaje de esta materia.

El libro está estructurado en 6 capítulos, cada uno de los cuales dividido en las siguientes cinco secciones que explico a continuación.

❖ TEORÍA.

Se realiza un repaso de los conceptos más importantes del capítulo.

Capítulo Divisibilidad y Números Enteros. TEORÍA

Capítulo 1 DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS

TEORÍA

Divisores y múltiplos de un número.

- Los divisores de un número natural son números menores o iguales a él, tal que al hacer la división entre dichos números se obtiene un cociente natural y resto 0. Son divisores universales siempre el número 1 y el número dado. Ejemplo resultado: Hallar los divisores de 60. $D(60)=\{1,2,3,4,5,6,10,20,30,60\}$
- Para hallar este resultado, vamos realizando todas las divisiones exactas y nos quedamos con el cociente y el divisor que serán divisores.

Operaciones: $60:2=30$ $R=0$ $60:3=20$ $R=0$ $60:4=15$ $R=0$
 $60:5=12$ $R=0$ $60:6=10$ $R=0$
- Los múltiplos de un número natural son números mayores o iguales a él que se obtienen multiplicando éste por los distintos números naturales. Se suele usar la notación de un punto encima de un número para expresar el cálculo de los múltiplos. Ejemplo: $20 = 20, 40, 60, 80, \dots$

Números primos y compuestos. Descomposición factorial como producto de números primos.

- Un número es primo cuando sólo tiene dos divisores, el número 1 y él mismo.
- Un número se llama compuesto cuando tiene más de dos divisores.
- El número 1 no se considera ni primo ni compuesto al tener un único divisor.
- Descomponer un número en factores primos** consiste en expresarlo como producto de números primos.

5

❖ ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS.

Se muestran errores cometidos por los alumnos así como las correcciones que realizaron. Una nota en el margen nos ayuda a recordar los conceptos importantes necesarios para subsanar el error en ejercicios parecidos.

Capítulo Divisibilidad y Números Enteros. (ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS)

ERRORES Y CORRECCIONES DE LOS ALUMNOS

¡OJO! 

- No confundas dos enteros con el mismo signo a la izquierda que el resultado lleva el signo común con el producto o división de enteros con el mismo signo que el resultado es siempre positivo. (Menos y menos es menos) $-3 - 5 = -8$ (Menos por menos es más) $(-3) \cdot (-5) = +15$

ERRORES: Suma y resta de dos enteros. CURSO: 3ºE

$$\frac{-13 - 4}{20} = \frac{17}{20}$$

CORRECCIÓN:

$$\frac{-13 - 4}{20} = \frac{-17}{20}$$

En la multiplicación de enteros aplicamos $- \cdot - = +$, pero si NO multiplicamos menos y menos es menos. Ejemplo: Al principio de la clase me han puesto 5 negativos y al final otros tres negativos, entonces: $-5 \cdot -3 = -8$

¡OJO! 

- En las operaciones combinadas con enteros o fracciones empiezo por las operaciones entre paréntesis, llaves o corchetes y después sigo con las potencias y raíces.
- El cuadrado de una suma o resta de dos términos no es igual a la suma o resta de los cuadrados.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)^2 \neq \frac{4}{9} - \frac{25}{16}$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}$$

ERRORES: De prioridad en operaciones combinadas. CURSO: 3ºE

$$\sqrt{\frac{25}{144} + \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{12} + \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{9} - \frac{25}{16}\right)$$

CORRECCIÓN:

$$\sqrt{\frac{25}{144} + \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{12} + \frac{4}{9} - \left(\frac{8}{12} - \frac{15}{12}\right)^2$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{4}{9} - \frac{49}{144} = \frac{60}{144} + \frac{64}{144} - \frac{49}{144} = \frac{75}{144} = \frac{25}{48}$$

10

❖ APRENDIENDO DE LOS ERRORES.

En esta sección se proponen ejercicios para realizar por los alumnos. Se trata de que el estudiante identifique qué ejercicios están bien resueltos y cuáles no. En los que estén incorrectos, debe identificar y explicar el error cometido, y por último, realizar correctamente el ejercicio.

Capítulo 1. Divisibilidad y Números Enteros APRENDIENDO DE LOS ERRORES...

APRENDIENDO DE LOS ERRORES...

A continuación se muestran diferentes ejemplos resueltos del tema. Se trata de que compruebes si están bien o hay algún error. Si piensas que la solución es incorrecta marca la casilla correspondiente y en el recuadro escribe que cambios harías.

1) Hallar el M.C.D. de los números 18 y 25.

Comenzamos descomponiendo en factores primos 18 y 25.

18	2	25	5	Luego: $18 = 2 \cdot 9$
9	9	5	5	$25 = 5 \cdot 5$
1		1		

$MCD(18,25) = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$

Respuesta correcta. Respuesta incorrecta.

Usa lápiz y goma:

16

❖ EVALUACIÓN.

Se proponen ejercicios finales para la asimilación de los conceptos del tema. Antes de comenzar los ejercicios es conveniente corregirse la sección anterior para evaluar tus resultados y aprender de los errores que hayas podido cometer.

Capítulo 1. Divisibilidad y Números Enteros EVALUACIÓN

EVALUACIÓN

Comprueba tus resultados de la sección anterior en las soluciones de la página 175.

Escribe la suma de las puntuaciones obtenidas en el recuadro:

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN.

- Resuelve **paso a paso**, las operaciones combinadas con enteros:
 - $-3 - 2 \cdot \{2 - 3 \cdot (-4)\} - (-5) + 3 \cdot (3 - 5)$
 - $-10 - 2 + (4 - 2 \cdot 5) - (-2) \cdot (-5)$
 - $5 + 3 \cdot (-2) - \{3 - (-2)\} \cdot (-4)$
 - $2 \cdot (-3) - (2 - 5 \cdot (-2)) + (-3)$
- Calcula el M.C.D. (28, 40)
- Calcula el m.c.m. (35, 14, 25)
- Completa la tabla de números primos menores o iguales a 100.
- Se quiere enlazar una habitación con baldosas cuadradas lo más grandes posibles sin cortar ninguna. Sabemos que la habitación es rectangular de dimensiones 1150 centímetros de largo por 960 centímetros de ancho.
 - Hallar el lado que debe medir las baldosas.
 - Hallar cuantas baldosas caben en la habitación.

22

❖ SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS.

Se explican cada uno de los ejercicios propuestos, incidiendo en los errores que no debes cometer a través de cuadros informativos denominados NO TE CONFUNDAS... También se incluyen las soluciones del apartado de la Evaluación.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS APRENDIENDO DE LOS ERRORES...

NO TE CONFUNDAS...

- ❖ Cuando realizamos una división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de grado 1 tipo $(x - a)$ siendo $a \in \mathbb{R}$ podemos usar el algoritmo de Ruffini.
- ❖ En dicho algoritmo el número de la esquina se calcula igualando $x - a = 0$ y resolviendo la ecuación.
Ejemplo: Dividir $x^2 + 2x + 1 : (x + 1)$

Para calcular el número de la esquina hacemos
 $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

	1	2	1
	-1	-1	-1
	1	1	0

- ❖ Si el resto de la división da 0 podemos factorizar el polinomio dividido $D(x)$ como producto del divisor $d(x)$ por el cociente $c(x)$.
- ❖ Ten en cuenta que el polinomio cociente $c(x)$ tiene un grado menos que el polinomio dividido $D(x)$ y que el polinomio divisor es un binomio del tipo $x - a$, siendo a el "número de la esquina".

❖ La factorización de $(x^2 + x - 6) = (x - 2) \cdot (x + 3)$ utilizando las raíces es correcta.

❖ Así sustituyendo todo lo obtenido y corregido el error resultado de la factorización es:

$$P(x) = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

2) Dadas las siguientes expresiones algebraicas:

- a) $\frac{3xy}{5}$
- b) $P(x) = -x^2 - 2x + 4$
- c) $(3x - 5)^2 = 3x^2 - 30x + 25$

198

Capítulo 1 DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS

TEORÍA

Divisores y múltiplos de un número.

- ❖ Los divisores de un número natural son números menores o iguales a él, tal que al hacer la división entre dichos números se obtiene un cociente natural y resto 0. Son divisores universales siempre el número 1 y el número dado.

Ejemplo resuelto: Hallar los divisores de 60.

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Para hallar este resultado, vamos realizando todas las divisiones exactas y nos quedamos con el cociente y el divisor que serán divisores.

Operaciones: $60:2=30 \text{ R}=0$ $60:3=20 \text{ R}=0$ $60:4=15 \text{ R}=0$
 $60:5=12 \text{ R}=0$ $60:6=10 \text{ R}=0$

- ❖ Los múltiplos de un número natural son números mayores o iguales a él que se obtienen multiplicando éste por los distintos números naturales. Se suele usar la notación de un punto encima de un número para expresar el cálculo de los múltiplos. Ejemplo: $\overset{\cdot}{2}0 = 20, 40, 60, 80, \dots$

Números primos y compuestos. Descomposición factorial como producto de números primos.

- ❖ Un número es primo cuando sólo tiene dos divisores, el número 1 y él mismo.
- ❖ Un número se llama compuesto cuando tiene más de dos divisores.
- ❖ El número 1 no se considera ni primo ni compuesto al tener un único divisor.
- ❖ **Descomponer** un número **en factores primos** consiste en expresarlo como producto de números primos.

Ejemplo: Descomponer en factores primos el número 30.

$$\begin{array}{r|l}
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Criterios de Divisibilidad.

❖ Los criterios de divisibilidad son unas normas que nos permiten decidir si un número es divisible entre otro sin tener que hacer la división. Las más conocidas son la del 2, 3, 5, 6, 9, 10 y 11 que recordamos a continuación.

<i>CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD</i>		
<i>ENTRE</i>	<i>CRITERIO</i>	<i>EJEMPLOS</i>
2	Cuando acaba en cifra par	2, 20, 444...
3	Cuando la suma de las cifras es múltiplo de 3	459 ya que $4 + 5 + 9 = 18 = 3$
5	Cuando acaba en 0 ó 5	40, 55, 105...
6	Cuando es a la vez divisible por 2 y por 3. (Cumple ambos criterios)	66, 36, 192..
9	Cuando la suma de las cifras es múltiplo de 9	189 ya que $1 + 8 + 9 = 18 = 9$
10	Cuando acaba en 0	150, 200, 3400...
11	Cuando la suma de las cifras de posición par menos la suma de las cifras de posición impar da 0 o múltiplo de 11	1331 ya que $1+3=4, 3+1=4$ $\Rightarrow 4 - 4 = 0$

M.C.D. y m.c.m.

- ❖ El máximo común divisor de varios números (M.C.D) es el mayor de sus divisores comunes. Se descomponen los números en producto de números primos y para calcularlo multiplicamos los factores comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo: Calcular el M.C.D. de los números 25 y 500.

- ❖ Comenzamos descomponiendo en factores primos 25 y 500.

$$\begin{array}{r|l}
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 500 & 5 \\
 100 & 5 \\
 20 & 5 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \Rightarrow 25 = 5^2, 500 = 5^3 \cdot 2^2$$

- ❖ Cogemos sólo los factores comunes con el menor exponente.

$$M.C.D.(25,500) = 5^2 = 25$$

- ❖ El mínimo común múltiplo de varios números (m.c.m.) es el menor de sus múltiplos comunes. Para hallarlo, después de descomponer los números en producto de números primos, multiplicamos los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

Ejemplo: Calcular el m.c.m. de los números 49 y 150

- ❖ Comenzamos descomponiendo en factores primos 49 y 150

$$\begin{array}{r|l}
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 150 & 5 \\
 30 & 5 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 & 1
 \end{array}
 \Rightarrow 49 = 7^2, 150 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2$$

- ❖ Cogemos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

$$m.c.m.(49,150) = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 49 \cdot 25 \cdot 6 = 7350$$

Números enteros y sus operaciones.

- ❖ El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, el 0 y los naturales precedidos del signo menos.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

- ❖ **El valor absoluto** de un número entero es la distancia de ese número al cero. Siempre es positivo, y se representa entre barras verticales.

$$\text{Ejemplos: } |-3| = 3 \quad |0| = 0 \quad |65| = 65$$

❖ Suma y resta de enteros.

1. Si dos enteros tienen el mismo signo a la izquierda, entonces sumamos sus valores absolutos y se pone en el resultado el signo común.
2. Si aparecen operaciones de enteros entre paréntesis se simplifica la escritura con la regla de los signos $+(+) = +$, $+(-) = -$, $-(-) = +$, $- (+) = -$ y después se procede de izquierda a derecha, o bien sumando los positivos por un lado y los negativos por otro.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplos: } \mathbf{a)} \quad & -4 - 5 - 6 + (-3) - (-5) = -4 - 5 - 6 - 3 + 5 \\ & = -9 - 6 - 3 + 5 = -15 - 3 + 5 = -18 + 5 = -13 \\ \mathbf{b)} \quad & -4 - 5 - 6 + (-3) - (-5) = -4 - 5 - 6 - 3 + 5 \\ & = -18 + 5 = -13 \end{aligned}$$

❖ Multiplicación y división de enteros.

Realizamos la operación con los valores absolutos de los números y ponemos el signo de acuerdo con la regla de los signos.

$$\text{Ejemplos: } (-3) \cdot (+15) = -45 \quad (20) : (-5) = -4$$

❖ Operaciones combinadas.

Seguimos el orden que es el siguiente:

1. Operaciones entre llaves, corchetes o paréntesis, del más interior al más exterior.
2. Potencias y raíces.
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

NOTA: Si aparecen operaciones de la misma prioridad siempre se hace de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \{ 4 - 3 \cdot (4 - 6) \} \cdot (-3) - 6 \\ &= \{ 4 - 3 \cdot (-2) \} \cdot (-3) - 6 = (4 + 6) \cdot (-3) - 6 \\ &= 10 \cdot (-3) - 6 = -30 - 6 = -36 \end{aligned}$$