Matemàtiques per a batxillerat

Matemàtiques per a batxillerat és el resultat de molta il·lusió, treball, temps i gran experiència docent. Conté tots els coneixements matemàtics necessaris per a emprendre els estudis de Grau de qualsevol Universitat.

Aquest projecte consta dels llibres de matemàtiques de primer i segon de les modalitats de batxillerat de Ciències i Tecnologia i de Ciències socials, segons els continguts curriculars que actualment s'estudien a l'estat espanyol, i estan distribuïts en 3 volums per a cada curs:

	Primer curs	Segon curs
Modalitat de Ciències i Tecnologia	Àlgebra i Geometria	Àlgebra lineal i Geometria
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Estadística	Càlcul de probabilitats
Modalitat de Ciències socials	Àlgebra	Àlgebra lineal
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Càlcul de probabilitats i Estadística	Càlcul de probabilitats i Inferència estadística

Contingut de Matemàtiques per a batxillerat

- **Tot el currículum** dels batxillerats de l'estat espanyol.
- Més de 1 500 **exemples resolts** dels epígrafs importants.
- Més de 8 000 problemes entre **activitats i exercicis** proposats.
- Totes les activitats i exercicis proposats tenen la **solució** al final del capítol corresponent.

Estructura i concepció del llibre Matemàtiques per a batxillerat

Cada parella de pàgines consecutives (8 i 9, 10 i 11…) **es conceben com una porció tancada** del capítol; cap concepte quedarà a mig fer, i conté exemples resolts i activitats per a resoldre.

Mai hi ha text vertical paral·lel. Sempre es llegeix de dalt a baix, sense distraccions.

Per a facilitar l'estudi distingim amb formes i colors:

- **Definicions**: Sempre amb quadres de color verd, sense farcit.
- **Propietats i teoremes**: Sempre amb quadres amb farcit de color verd. Quan hem cregut convenient incloure la demostració d'alguna propietat ho fem fora del quadre, ressaltada per l'esquerra amb una barra vertical de color verd.
- **Exemples resolts**: És el més abundant al llarg del llibre; resolts amb detall, perquè l'alumne puga dependre d'ells. Molts són aplicacions a altres ciències, com la Física, Biologia, Economia, Topografia, per citar les més aplicades. Van ressaltats per l'esquerra amb una barra groga, i numerats per capítol.
- **Activitats proposades**: Almenys al finalitzar cada parella de pàgines (10 i 11, 12 i 13…) incloem un quadre farcit de color taronja amb activitats numerades per capítol i relacionades amb la teoria explicada en aquestes pàgines i els exemples allí resolts.
- **Problemes de recapitulació**: A més, al finalitzar cada capítol afegim una àmplia col·lecció de problemes proposats per a acabar d'assolir els conceptes del capítol.
- **Solucions**: Cada capítol acaba amb les solucions de totes les activitats i de tots els problemes proposats en ell.

És un procés d'assimilació dels elements conceptuals necessaris per a interpretar, enunciar i resoldre els problemes que planteja l'estudi dels fenòmens propis de les diverses ciències. El coneixement matemàtic s'organitza en forma de sistema deductiu, de manera que definicions, postulats, propietats, teoremes i mètodes s'articulen lògicament per a donar validesa a les intuïcions i a les tècniques matemàtiques. Tot aquest procés culmina en els exemples i problemes.

El llenguatge formal s'introdueix lentament, però resulta imprescindible per a no perdre la línia conductora de la solució del problema. Incloem demostracions d'algunes propietats sempre que siguen adequades al nivell, encara que no són necessàries per al desenvolupament del text.

2 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Àlgebra linial

educàlia editorial

2

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Àlgebra linial

educàlia editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-10-7

Depòsit legal: V-3246-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 4

Programació lineal

4.1 Equació lineal amb 2 incògnites: solució gràfica

En el capítol 1 vam veure que una equació lineal amb dues incògnites del tipus **ax + by = c**, sent a, b i c nombres reals qualssevol, amb a i b no nuls al mateix temps, té sempre infinites solucions. La representació gràfica de les solucions és una línia recta. Recordem conceptes estudiats en el curs anterior.

- L'equació **ax + by = c** s'anomena ***equació implícita*** o ***equació general*** d'una recta.

  Si a = 0, b ≠ 0, es tracta d'una recta horitzontal: **0x + by = c** ⇔ **y = c/b**
  Si a ≠ 0, b = 0, es tracta d'una recta vertical: **ax + 0y = c** ⇔ **x = c/a**

- L'equació **y = mx + n** és l'equació ***explícita*** d'una recta no vertical, de ***pendent*** **m** i ***ordenada en l'origen*** **n**.

  Si m = 0, la recta és horitzontal: **y = 0x + n**.

  Les rectes verticals no tenen pendent.

Exemple 1

Representem gràficament la recta d'equació **implícita**:

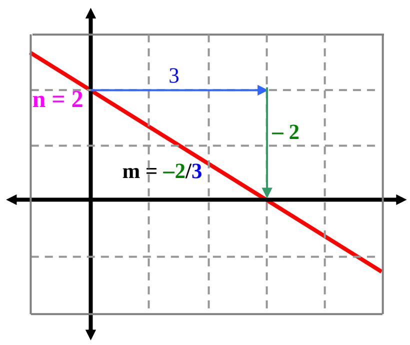
$$\mathbf{2x + 3y = 6}$$

Si aïllem y obtenim la seua **equació explícita**:

$$\mathbf{y = -\frac{2}{3}x + 2}$$

El seu pendent i ordenada en l'origen són, respectivament:

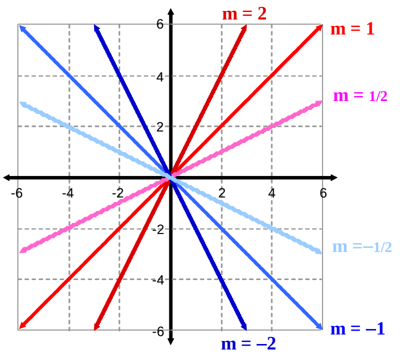
$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad \mathbf{n = 2}$$

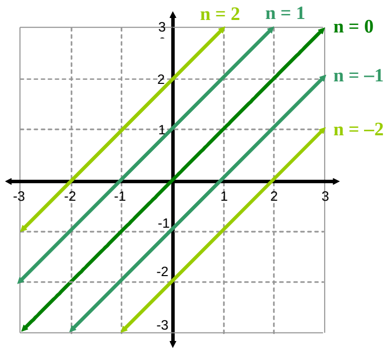


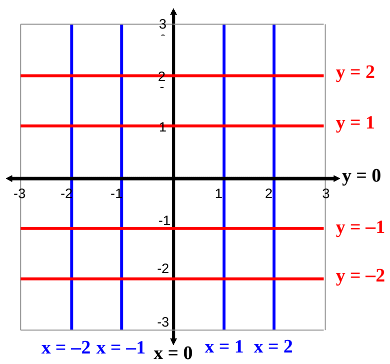
- En la primera figura de baix representem gràfiques de rectes d'equació explícita **y = mx**, per a m = 0, ±1/2, ± 1, ±2. Observa que les rectes passen totes per l'origen a causa del valor **n = 0** fix en totes elles.
- En la segona figura tenim representades rectes d'equació explícita **y = x + n**, per a n = 0, ±1, ±2. Mantenint el mateix valor del pendent m (**m = 1**), les rectes són totes paral·leles.
- En la tercera figura tenim representades en blau 5 rectes verticals i en roig 5 rectes horitzontals d'equacions respectives:

  x = k, per a k = 0, ±1, ±2 **y = k**, per a k = 0, ±1, ±2.

  Les rectes horitzontals tenen pendent m = 0, mentre que les verticals no tenen pendent.







➢ Obtenció de les equacions d'una recta

Per a tenir definida una recta és suficient conèixer un punt d'ella i el seu pendent. Vegem com queda determinada en el següent exemple:

Exemple 2

Trobem l'equació de la recta que passa pel punt P(3,6) i té com a pendent m = –4.

Com que té pendent es tracta d'una recta que no és vertical. La seua equació explícita serà:

$$y = mx + n \quad \Rightarrow \quad y = -4x + n$$

Com que el punt P(3, 6) pertany a la recta, ha de verificar la seua equació:

$$x = 3,\ y = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = -4 \cdot 3 + n \quad \Rightarrow \quad 18 = n$$

L'equació punt pendent és **y = –4x + 18**.

Un altra manera de trobar-la és escrivint lèquació punt-pendent de la recta:

$$y - \mathbf{y_0} = \mathbf{m}\ (x - \mathbf{x_0}) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = -4(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = -4x + 12 \quad \Rightarrow \quad y = -4x + 18$$

Per dos punts del pla sempre passa una única recta. Excepte en el cas d'una recta vertical (tots els punts tindrien la mateixa coordenada x) podem obtenir l'equació explícita de la recta resolent un sistema d'equacions:

Exemple 3

Calculem l'equació explícita de la recta que passa pels punts P(2, 7) i Q(4, 11).

Anomenem r: y = mx + n a l'equació explícita de la recta que passa per P i Q.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Si } P(2,7)\in r \ \rightarrow \ \text{verifica la seua equació: } 7 = 2m + n \\ \bullet\ \text{Si } Q(4,11)\in r \ \rightarrow \ \text{verifica la seua equació: } 11 = 4m + n \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 7 - 2m \\ n = 11 - 4m \end{array}\right.$$

Per igualació: $7 - 2m = 11 - 4m \quad \rightarrow \quad \mathbf{m = 2}$ i $\mathbf{n = 3}$

L'equació explícita és **r: y = 2x + 3** i l'equació implícita és **r: –2x + y = 3**.

1 Comprova si el punt P(–2, 5) pertany a la recta r: 2x – 3y = 3 o a la recta s: y = 3x + 11.

2 Comprova si les següents parelles de rectes són paral·leles o es tallen en un punt, de dues formes distintes: comparant els seus pendents, i estudiant la compatibilitat del sistema d'equacions que constitueixen:
(A) r: 3x + 2y = 5, s: y = 2x –1 (B) r: 4x – y = 2, s: y = 4x (C) r: 2x – 5y = 1, s: 4x – 10y = 2

3 Obtén l'equació explícita, l'equació implícita i el pendent de les rectes que passen pels punts:
(A) P(2, –3) i Q(3, 4) (B) P(3, 2) i Q(6, 4) (C) P(1, 3) i Q(5, 3) (D) P(1, 3) i Q(1, 5)

4 Obtén l'equació de la recta horitzontal i de la recta vertical que passa pel punt:
(A) A(2, 5) (B) B(0, 0) (C) C(0, –3) (D) D(–1, 0) (E) E(a, b)

5 Obtén l'equació de les rectes paral·leles a r: 2x – 3y = 5 que passen pels punts A(2, 3) i O(0, 0).

4.2 Inequació lineal amb 2 incògnites: solució gràfica

Sabem que una equació lineal amb dues incògnites és una expressió del tipus **ax + by = c**, sent a, b i c nombres reals qualssevol, i aquesta equació té sempre infinites solucions que es representen gràficament en una recta.

Una ***inequació lineal amb dues incògnites*** és qualsevol de les següents expressions:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \le c \qquad ax + by \ge c$$

➢ Solucions d'una inequació lineal amb dues incògnites

Una solució d'una inequació lineal amb dues incògnites és **qualsevol parella de nombres reals**, un per a cada incògnita, **que verifiquen aquesta inequació**.

Exemple 4

Considerem la inequació lineal **2x + 4y < 8**.

Comprovem que les parelles de nombres reals (0, 0), (0.5, 0) i (–1, –2) verifiquen la inequació anterior i, per tant, són solucions d'ella; en canvi les parelles (0, 3), (2.5, 4) i (6, 2) no la verifiquen i no són solucions d’ella:

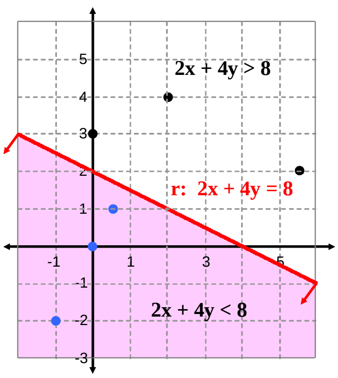
- **(0, 0)** → $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 8$
- **(0.5, 1)** → $2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 1 < 8$
- **(–1, –2)** → $2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) < 8$

- **(0, 3)** → $2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 > 8$
- **(2, 4)** → $2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 > 8$
- **(5.5, 2)** → $2 \cdot 5.5 + 4 \cdot 2 > 8$

Si representem aquestes solucions en el pla observem que totes elles se situen en el mateix semiplà determinat per l'equació **2x + 4y = 8** que constitueix els punts d'una recta. En canvi, les parelles que no són solució de la inequació se situen en l'altre semiplà, no acolorit en el dibuix:

r: 2x + 4y = 8

x	y
–2	3
0	2
4	0



Els punts del pla (x, y) que verifiquen l'equació lineal amb dues incògnites

$$ax + by = c$$

constitueixen una recta que divideix al pla en dos semiplans, anomenats ***semiplans oberts,*** corresponents als punts (x, y) que verifiquen respectivament una de les inequacions:

$$ax + by > c \qquad ax + by < c$$

Els símbols ≥ i ≤ en la inequació indiquen que **la solució inclou els punts de la recta;** en aquests cas diem que la solució de la inequació és un ***semiplà tancat*.**

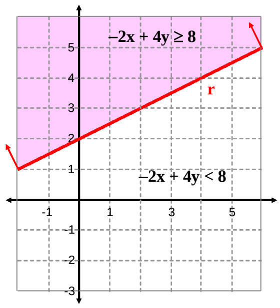
Exemple 5

- Representem gràficament el conjunt de solucions de la inequació lineal $\mathbf{-2x + 4y \geq 8}$.

  Les solucions de la inequació $-2x + 4y \geq 8$ són les solucions de la inequació $-2x + 4y > 8$ junt amb les solucions de l'equació $-2x + 4y = 8$. Representem, en primer lloc, l'equació (la recta):

  r: $-2x + 4y = 8$

x	y
–2	1
0	2
4	4

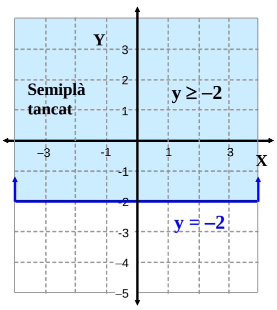


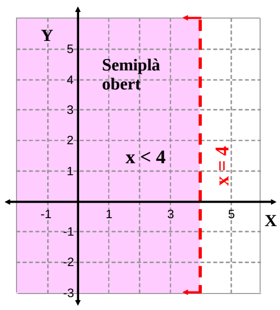
  Per a obtenir les solucions de la inequació $-2x + 4y \geq 8$, és suficient comprovar si un punt del pla, que no pertany a la recta r, verifica o no la inequació. Per exemple, prenem el punt (0, 0):

  Com que $-2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 8 \;\leftrightarrow\; 0 \geq 8$ no és cert $\Rightarrow$ (0, 0) no és solució

  D'aquesta manera, els punts del pla situats en el mateix semiplà que (0, 0) no són solució.
  Gràficament les solucions són els punts del semiplà acolorit, junt amb els punts de la recta r.

- Representem gràficament les inequacions lineals $\mathbf{y \geq -2}$ i $\mathbf{x < 4}$.
  Per a això representem, en primer lloc, les rectes $\mathbf{y = -2}$ i $\mathbf{x = 4}$.





  Vegem si el punt (0, 0), que no pertany a les rectes, verifica les inequacions. Si verifica la inequació, la solució contendria al semiplà que conté a (0, 0). En cas contrari, seria l'altre semiplà.

  - Com que $0 \geq -2$ és cert $\rightarrow$ (0, 0) és solució de $y \geq -2$
  - Com que $0 < 4$ no és cert $\rightarrow$ (0, 0) no és solució de $x < 4$

6 Comprova si les següents parelles són solucions de la inequació $2x + 3y > 5$:
(A) (1, 0) (B) (1, 1) (C) (1, 2) (D) (2, 1) (E) (0, 0) (F) (0, 2) (G) (100, –50) (H) (100, –70)

7 Escriu 2 parelles que siguen solució i 2 que no ho siguen de les inequacions:
(A) $x + y \leq 2$ (B) $x + y \geq 2$ (C) $3x - y < 5$ (D) $x \leq y$ (E) $x \geq 0$ (F) $y < 5$

8 Representa gràficament el conjunt de solucions de les següents inequacions:
(A) $-x + y < 8$ (B) $4x - 2y \leq 6$ (C) $2x + 3y > 6$ (D) $-3x - 4y \geq 12$ (E) $x \leq 5$ (F) $2y > -5$

4.3 Sistemes d'inequacions lineals: solució gràfica

La solució d'un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites està formada pels punts del pla (x, y) que verifiquen, al mateix temps, totes les inequacions, és a dir, **els punts del pla que pertanyen a la intersecció dels semiplans corresponents**.

Exemple 6

El punt (0, 0) és una solució del següent sistema d'inequacions lineals perquè verifica totes les inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y\ \geq -2 \\ x+y\ \geq -1 \\ x-2y \leq\ 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot 0-0 \geq -2 \\ 0+0\ \geq -1 \\ 0-2\cdot 0\ \leq\ 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \geq -2 \\ 0 \geq -1 \\ 0 \leq\ 1 \end{array}\right\}$$

El conjunt de solucions del sistema s'obté com a intersecció dels semiplans corresponents a les solucions de cada inequació. Per a això representem les rectes que defineixen cada semiplà. Com que (0, 0) és una solució de les tres inequacions, els semiplans que les representen el contenen; la intersecció d'ells és la regió ombrejada de la figura:

$2x - y = -2$

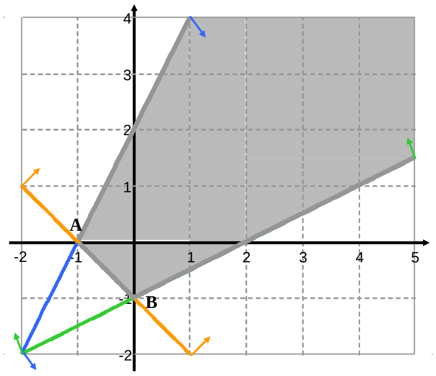
x	y
−1	0
0	2
1	4

$x + y = -1$

x	y
−1	0
0	−1
1	−2

$x - 2y = 1$

x	y
0	−1
2	0
4	1



- Anomenem ***politop*** a qualsevol conjunt de punts del pla obtingut amb la **intersecció d'un nombre finit de semiplans tancats**.
- Anomenem ***arestes*** als segments o semirectes que el limiten i ***vèrtexs*** a cada punt intersecció de dos segments o semirectes.
- Anomenem ***polígon*** a qualsevol politop limitat per un nombre finit de segments**.** Constitueix un conjunt tancat i fitat de punts del pla.

Així, en l'exemple 6, el conjunt de solucions és un **politop**, que conté tres arestes i dues vèrtexs.
El vèrtex A s'obté com a intersecció de les rectes x + y = –1 i 2x – y = –2.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ -3y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{A(-1,0)}$$

El politop anterior **no és un polígon**, perquè no està limitat només per segments. Els seus límits són el segment d'extrems A i B, i dues semirectes, les de colors blau i verd.

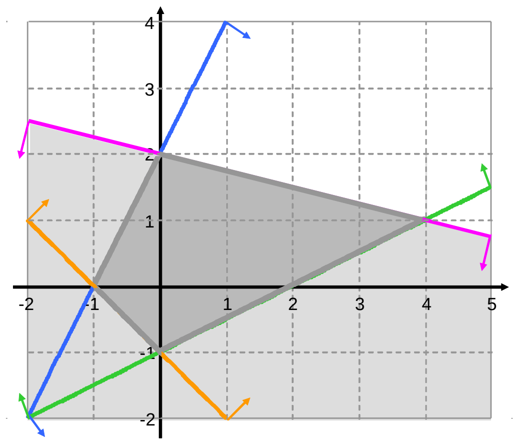
Exemple 7

Afegim al sistema de l'exemple 6 la inequació **x + 4y ≤ 8** i avaluem el nou conjunt de solucions del sistema d'inequacions:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y \geq -2 \\ x + y \geq -1 \\ x - 2y \leq 1 \\ x + 4y \leq 8 \end{array}\right\}$$

Aquest conjunt de solucions ha de ser la intersecció del politop de l'exemple 6 amb el semiplà que representa les solucions de la inequació afegida **x + 4y ≤ 8**.

Dibuixem la recta **x + 4y = 8** i el semiplà que representa les solucions de **x + 4y ≤ 8** (en gris clar), que afegim al dibuix de l'exemple 6. La intersecció d'aquest semiplà amb el politop anterior proporciona com a nou conjunt de solucions un **polígon**, limitat per 4 segments i 4 vèrtexs.



➢ Tipus de solucions

No tots els sistemes d'inequacions tenen per conjunt de solucions un politop. Segons la intersecció dels semiplans, el conjunt de solucions pot ser **buit**, o bé pot contenir un **únic punt**, un **segment**, una **recta** o una **semirecta**.

Si alguna inequació és estricta els segments manquen d'extrems i els politops manquen d'arestes i vèrtexs. A més el sistema pot contenir alguna equació.

9 Troba les coordenades dels vèrtexs del polígon de l'exemple 7.

10 Resol gràficament els següents sistemes d'equacions lineals:

(A) $\left.\begin{array}{l} -x + y \geq 1 \\ -x + y \leq -1 \end{array}\right\}$ (B) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ 2x + y \geq 3 \end{array}\right\}$ (C) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ 2x + y > 3 \end{array}\right\}$ (D) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ -x + y \geq 6 \end{array}\right\}$

(E) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 1 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ (F) $\left.\begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \geq -4 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 4 \end{array}\right\}$ (G) $\left.\begin{array}{l} -2x + y \leq 0 \\ -x + 2y \geq 0 \\ -x + y \geq 0 \\ -x + y \leq 0 \end{array}\right\}$ (H) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ -x + y \geq 6 \\ 9x + y \leq 45 \end{array}\right\}$

11 Representa el polígon de vèrtexs A(1, 1), B(1, −1), C(−1, −1) i D(−1, 1), i obtén un sistema d'inequacions de manera que les seues solucions siguen precisament aquest polígon.

4.4 Un problema de programació lineal

Exemple 8

Arrosseres de l'Est S.A. produeix arròs de dues qualitats A i B. En l'arròs del tipus A obté un benefici de 50 € per cada tona mètrica produïda mentre que en el de tipus B obté 100 €.

Si anomenem respectivament **x** i **y** al nombre de tones produïdes de cada tipus, el benefici total de l'empresa ve donat per la funció

$$\mathbf{B = f(x, y) = 50x + 100y}$$

D'aquesta manera si produeix 100 t del tipus A i 200 t del tipus B, el benefici de l'empresa és

$$f(100, 200) = 50 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 5\,000 + 20\,000 = \mathbf{25\,000} \text{ €}$$

En principi, a major producció majors beneficis, encara que li convé produir més de la qualitat B. Per exemple, si produeix 300 t de la qualitat B, guanya més amb la mateixa producció total:

$$f(0, 300) = 50 \cdot 0 + 100 \cdot 300 = 0 + 30\,000 = \mathbf{30\,000} \text{ €}$$

Suposem que hi ha restriccions que limiten la producció:

(A) La terra no permet una producció superior a 600 t.

(B) Es produeix una quantitat de la qualitat A almenys el doble que de la qualitat B.

Aquestes restriccions s'expressen:

(A) $\mathbf{x + y \leq 600}$

(B) $\mathbf{x \geq 2y}$

A més, les quantitats a produir mai seran negatives:

$$\mathbf{x \geq 0} \qquad \mathbf{y \geq 0}$$

En resum, el conjunt S de **produccions possibles** és el de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x + y \leq 600} \\ \mathbf{x - 2y \geq 0} \\ \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{y \geq 0} \end{array}\right\} \quad \mathbf{(S)}$$

De totes les produccions possibles, a l'empresa li interessa aquella que proporciona majors beneficis. Per tant desitja obtenir **el màxim** de la funció benefici elegit entre les seues possibilitats de producció:

$$\mathbf{f(x, y) = 50x + 100y} \qquad \mathbf{amb\ (x, y) \in S}$$

Un problema de programació lineal consisteix a obtenir el major valor (màxim) o el menor valor (mínim) d'una funció del tipus:

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by} \quad \text{amb } \mathbf{(x, y) \in S}$$

- on **f** és una funció lineal (a, b$\in\mathbb{R}$) anomenada ***funció objectiu***,
- i **S** és el ***conjunt factible***, constituït per les solucions d'un sistema d'inequacions lineals, les ***restriccions***, que representa les parelles de valors (x, y) susceptibles de ser seleccionades. Entre elles elegirem la parella ***òptima*** que proporciona el major o menor valor de f.

Exemple 9

Obtenim la producció que maximitza beneficis en l'empresa de l'exemple 8:

$$\mathbf{f(x, y) = 50x + 100y}$$

subjecta a les **restriccions**:

$$\left.\begin{array}{c} x + y \le 600 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Aquestes proporcionen el **conjunt factible**, o conjunt de produccions possibles, entre les quals s'elegeix la producció òptima. Per a això utilitzem la representació gràfica del conjunt factible (gràfica següent).
El problema és resolt al plantejar algunes qüestions:

- Amb quina producció obtenim un benefici de 15 000 €?

  $$f(x, y) = 15000 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{50x + 100y = 15\,000}$$

  L'anterior equació és la d'una recta, que al intersectar amb el conjunt factible S, proporciona totes les produccions possibles (x, y) amb benefici de 15 000 €. És el segment AB de la segona figura.

- Amb quines produccions obtenim un benefici de 30 000 €?

  $$f(x, y) = 30\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{50x + 100y = 30\,000}$$

  Tenim l'equació d'una altra recta, paral·lela a l'anterior, i els punts comuns d'ella amb el conjunt factible S proporcionen les diferents produccions amb benefici de 30 000 €. És el segment CD de la segona figura.

- Amb quina producció obtindrem el major benefici possible?

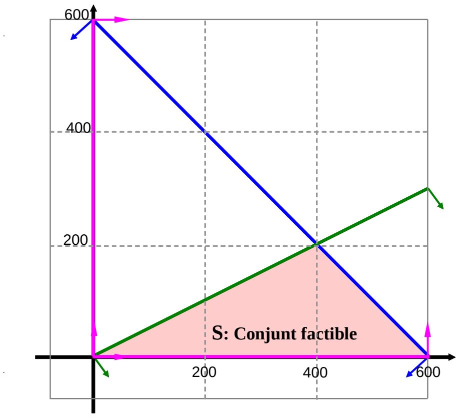
  Les rectes de la forma **50x + 100y = k** proporcionen els punts amb benefici **k**. Totes les rectes d'aquesta forma són paral·leles. La que tinga major valor de k i al mateix temps tinga algun punt comú amb el conjunt factible proporcionarà el major benefici.

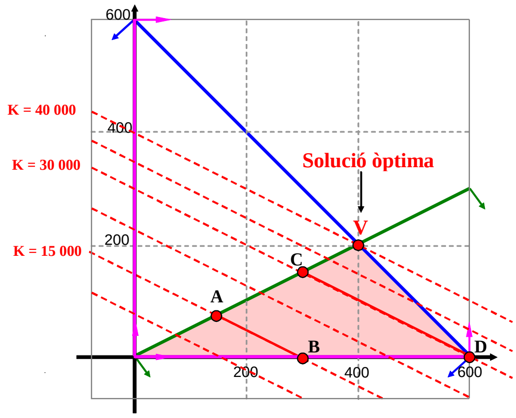
  Gràficament és la que passa pel vèrtex **V** intersecció de les arestes de colors blau i verd; les seues equacions són les del següent sistema:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = 600 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 400,\ \ y = 200}$$

En aquest punt s'obté la **solució òptima**, **400 tones del tipus A i 200 del tipus B**, que produeix el **benefici màxim, 40000 euros**:

$$f(400, 200) = 50 \cdot 400 + 100 \cdot 200 = \mathbf{40\,000\ €}$$





12 Calcula la producció òptima en l'exemple anterior si la funció benefici és f(x) = 100x + 50y.

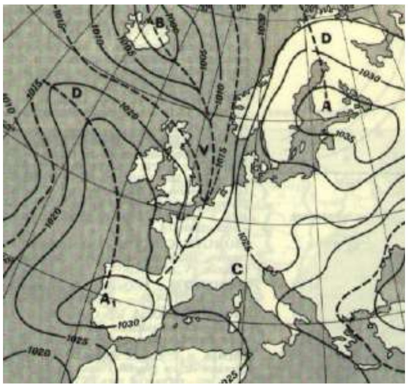
4.5 L'òptim d'un problema de programació lineal

En l'apartat 4.4 hem vist en què consisteix un problema de programació lineal de dues variables: es tracta d'obtenir el major valor (o el menor valor) que assoleix una funció lineal en dues variables x i y, anomenada ***funció objectiu***, entre tots els parells de valors possibles (x, y) que formen el ***conjunt factible*** **S**, donat pel conjunt de solucions d'un sistema d'inequacions lineals.

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by \quad amb\ (x, y) \in S}$$

El problema pot tenir solució o no, i si la té potser no siga única. En l'exemple 9 hem resolt el problema de forma gràfica, veient que hi ha molts valors en el conjunt factible en els quals la funció objectiu pren el mateix valor; aquests valors es poden expressar gràficament com a conjunts de rectes paral·leles, que s'anomenen ***rectes de nivell***. Aquest mètode gràfic permet també discriminar entre els problemes que tenen òptim i els que no el tenen.

El concepte de **recta de nivell** i, més general, el de **corba de nivell**, és utilitzat en moltes disciplines com a conjunt de punts on una determinada magnitud pren el mateix valor. Per exemple, les ***corbes de nivell*** en **Topografia** uneixen els punts d'un pla topogràfic que tenen **la mateixa altitud** (dibuix 1); en **Meteorologia**, les ***isòbares*** són les corbes que uneixen els punts del pla que tenen **la mateixa pressió atmosfèrica** (dibuix 2), les ***isotermes*** són les corbes que uneixen els punts del pla amb **la mateixa temperatura**, etc.



En un problema de programació lineal, les corbes que uneixen els punts del pla amb el mateix valor per a una funció lineal f (que representa una magnitud com pot ser un benefici, o una despesa) són rectes, anomenades ***rectes de nivell***.

➢ Les rectes de nivell

Considerem **f(x, y) = ax + by** una funció lineal, i **k** un nombre qualsevol.

Anomenem ***recta de nivell* k** de la funció f al conjunt de punts (x, y) del pla per als quals la funció f pren el valor k:

$$\mathbf{r(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : ax + by = k\}}$$

- El nom de recta de nivell està perfectament justificat, perquè l'equació **ax + by = k** és la d'una recta, i tots els punts d'esta proporcionen a f el mateix valor k:

  $$\mathbf{si \quad (x, y) \in r(k) \quad \rightarrow \quad f(x, y) = k}$$

  A més, les rectes de nivell d'una funció f, per a diferents nivells o valors de k, proporcionen rectes paral·leles. Recorda el paral·lelisme entre rectes de la secció 4.1.

Exemple 10

Expressem les equacions que representen distintes rectes de nivell de diferents funcions lineals i observem en quines direccions augmenta el valor de f, segons el signe dels coeficients a i b:

Rectes de nivell de f(x, y) = 2x + 4y

Nivell **k = 0:** **r(0): 2x + 4y = 0**

Nivell **k = 8:** **r(8): 2x + 4y = 8**

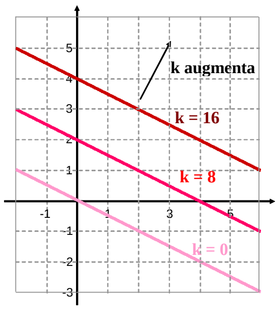
Nivell **k = 16:** **r(16): 2x + 4y = 16**

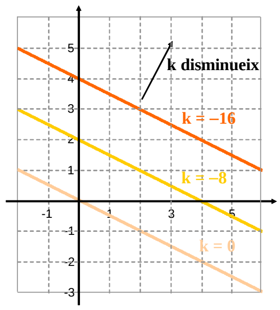
Rectes de nivell de g(x, y) = –2x – 4y

Nivell **k = 0:** **s(0): –2x – 4y = 0**

Nivell **k = –8:** **s(–8): –2x – 4y = –8**

Nivell **k = –16:** **s(–16): –2x – 4y = –16**





Veiem que la representació gràfica de les anteriors rectes de nivell és la mateixa, però proporcionen diferents valors a les funcions f i g. Per exemple:

P(0, 2) ∈ r(8) perquè $2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$ i f(0, 2) = 8.

P(0, 2) ∈ s(–8) perquè $-2 \cdot 0 + -4 \cdot 2 = -8$ i g(0, 2) = –8.

Rectes de nivell de f(x, y) = –2x + 4y

Nivell **k = –4:** **r(–4): –2x + 4y = –4**

Nivell **k = 4:** **r(4): –2x + 4y = 4**

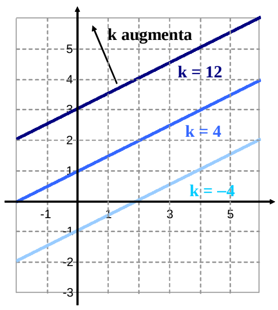
Nivell **k = 12:** **r(12): –2x + 4y = 12**

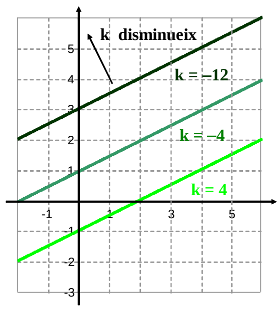
Rectes de nivell de g(x, y) = 2x – 4y

Nivell **k = 4:** **s(4): 2x – 4y = 4**

Nivell **k = –4:** **s(–4): 2x – 4y = –4**

Nivell **k = –12:** **s(–12): –2x – 4y = –12**





Rectes de major (o menor) nivell k s'obtenen desplaçant les rectes donades paral·lelament en diferents sentits, depenent dels signes dels coeficients a i b de les rectes.

13 La funció B(x, y) = 100x + 200y per a x ≥ 0, y ≥ 0, expressa el benefici obtingut per una empresa al produir x maquinetes d'afaitar del tipus 1 i y maquinetes del tipus 2.
(A) Què representen les solucions de l'equació 100x + 200y = 20000?
(B) I les de l'equació 100x + 200y = 40000? Fes la representació gràfica d'ambdues equacions.

14 Expressa i representa les rectes de nivell que passen pels punts A(0, 0), B(1, 2) i C(5, 3) de les funcions:
(A) f(x, y) = 3x – y (B) f(x, y) = 3x + y (C) f(x, y) = x + y (D) f(x, y) = 2x + 3y

➢ Conclusions generals

Considerem el problema de programació lineal, del que volem determinar si hi ha òptim (màxim o mínim):

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by} \qquad \mathbf{per\ a\ (x, y) \in S}$$

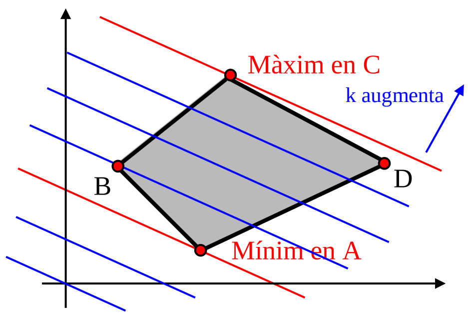
(1) Si **S és** un **polígon**, aleshores **f assoleix l'òptim en algun dels seus vèrtexs**.

- Si les rectes de nivell de f no són paral·leles a cap de les arestes del polígon, aleshores l'òptim s'assoleix en un únic vèrtex.
- Si les rectes de nivell de f són paral·leles a alguna de les arestes, el màxim o el mínim pot assolir-se en tota l'aresta.

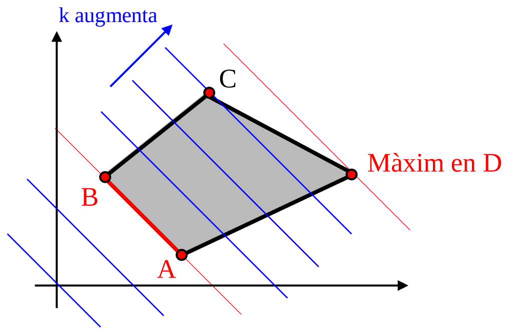
(2) Si **S no és** un **polígon** (no és tancat o no està fitat) **pot no haver òptim**.

La comprovació de les anteriors afirmacions es realitza amb ajuda de les rectes de nivell de la funció objectiu f, i de la representació gràfica del conjunt factible S. En les dues primeres figures, el conjunt factible és un polígon, en la tercera és un politop no fitat, i en la quarta no conté als vèrtexs ni a les arestes.

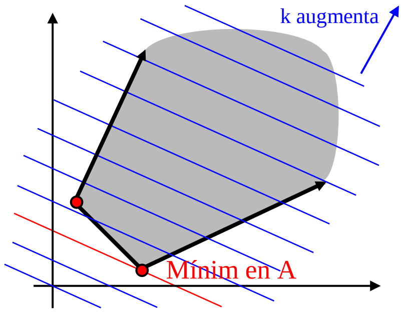
- En la primera figura les rectes de nivell no són paral·leles a cap aresta del conjunt factible. Les rectes que només tallen a un vèrtex del conjunt factible proporcionen el mínim (la que té menor valor de k) i el màxim (la que té major valor de k). En la primera figura ocorre en els vèrtexs A i C.
- En la segona figura, en què les rectes de nivell són paral·leles a l'aresta AB, la recta amb menor valor de k és paral·lela a l'aresta AB, amb la qual cosa tots els punts d'aquesta aresta proporcionen el mínim de f. La que proporciona el major valor de k passa pel vèrtex D, on s'assoleix el màxim de f.
- En la tercera figura, la recta de nivell amb menor valor de k ens proporciona el mínim de f en el vèrtex A. No hi ha màxim de f, perquè no hi ha una "última recta de nivell" que talle el conjunt factible, no fitat.
- En la quarta figura no hi ha màxim ni mínim perquè els vèrtexs no pertanyen al conjunt factible: els semiplans que el constitueixen són oberts. Tampoc hi ha eixa "última recta de nivell".



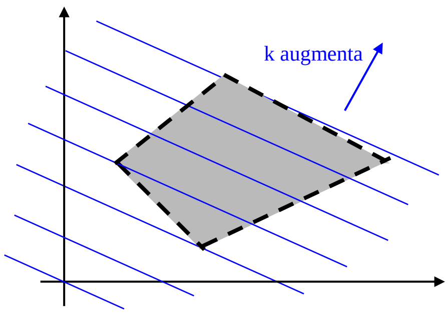
Rectes de nivell no paral·leles a cap aresta
Màxim i mínim únics



Rectes de nivell paral·leles a l'aresta AB
Màxim únic, però mínim no únic



Politop no fitat
Hi ha mínim únic, però no hi ha màxim



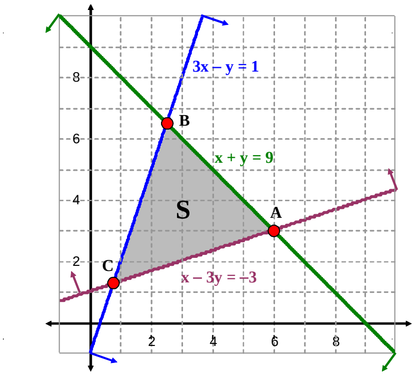
Conjunt factible no tancat
No hi ha ni mínim ni màxim

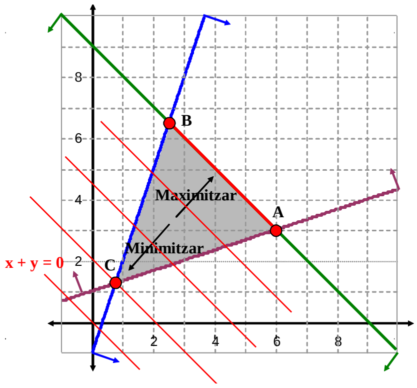
Exemple 11

Obtenim, si existeixen, el major i el menor valor de la funció objectiu **f(x, y) = x + y** amb les condicions:

$$\mathbf{x + y \le 9} \qquad \mathbf{3x - y \ge 1} \qquad \mathbf{x - 3y \le -3}$$

Comencem per representar en la primera figura el conjunt factible S. Es tracta d'un polígon, tancat i fitat, amb 3 arestes i 3 vèrtexs. Per això és **segur que hi ha màxim i mínim per a la funció objectiu i ha d'assolir-se en un dels vèrtexs**.





Encara que podem trobar la solució utilitzant les rectes de nivell, **la trobem simplement per comparació de la funció objectiu en els vèrtexs,** especialment útil quan hi ha pocs vèrtexs o quan el pendent de les rectes de nivell i alguna aresta són semblants:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = 6 \quad y = 3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A(6,\ 3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{5}{2} = 2.5 \quad y = \frac{13}{2} = 6.5 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B(2.5,\ 6.5)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{5}{4} = 1.25 \quad y = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \rightarrow \quad \mathbf{C(1.25,\ 0.75)}$$

Vèrtexs	**Valor de f**	
A(6, 3)	f(6, 3) = **9**	Major valor
B(2.5, 6.5)	f(2.5, 6.5) = **9**	Major valor
C(1.25, 0.75)	f(1.25, 0.75) = **2**	Menor valor

El menor valor de f en el conjunt factible S s'obté en C: f(1.25, 0.75) = 1.25 + 0.75 = **2**.

El major valor de f en el conjunt factible S s'obté en aquests dos vèrtexs A i B:

f(6, 3) = 6 + 3 = **9** **f(2.5, 6.5)** = 2.5 + 6.5 = **9**

Per tant **el màxim de la funció f s'obté en qualsevol punt de l'aresta AB.**

Observa que gràficament els pendents de les rectes de nivell coincideixen amb la de l'aresta AB.

15 Obtén el màxim i el mínim de la funció objectiu f(x, y) = mx + y subjecta a les restriccions

$$4 \le x + y \le 8, \qquad \frac{x}{3} \le y \le 3x,$$

en els següents casos:

(A) $m = 2$ (B) $m = \frac{1}{2}$ (C) $m = 1$ (D) $m = -1$ (E) $m = -\frac{1}{3}$ (F) $m = -3$

Exemple 12

AGUARDEX S.L. és una empresa dedicada a la fabricació de licors. Els seus productes estrella són els aiguardents A_1 i A_2, dels quals obté uns beneficis, per cada litre venut, d'1 € i 3 € respectivament.
La composició, en grams per litre, d'aquests dos productes ve donada en la taula següent:

	MC	BE	EA	PA
A_1	0	1	5	1
A_2	2	0	2	4

MC: Mescla de cereals
BE: Baies de ginebre
EA: Essència d'anís
PA: Plantes aromàtiques

L'empresa disposa per a cada dia de les següents quantitats dels anteriors components:

12 kg de MC, 8kg de BE, 45kg de EA i 27 kg de PA.

Quines seran les quantitats de cada tipus de licor que li convé a l'empresa produir, sense sobrepassar les disponibilitats diàries, per a obtenir el major benefici possible?

Anomenem **x** i **y** a la quantitat, en litres, de A_1 i de A_2 fabricats diàriament, respectivament.

El benefici en funció de **x** i **y** és:

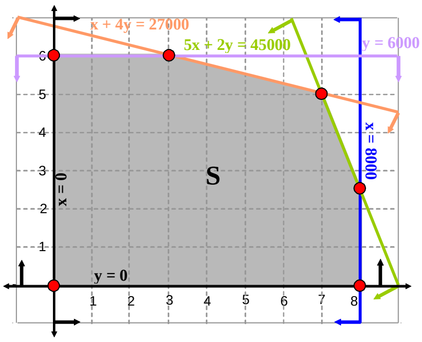
$$\mathbf{f(x, y) = x + 3y}$$

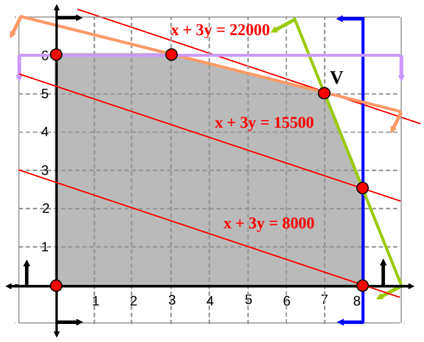
Les restriccions provenen que en la producció dels licors no podem utilitzar cada dia més de les quantitats que tenim de cada component. Totes les restriccions han de verificar la condició:

Quantitat utilitzada en A_1 + Quantitat utilitzada en A_2 ≤ Quantitat total disponible

- Disponibilitat diària de MC: $\mathbf{0x + 2y \le 12\,000}$
- Disponibilitat diària de BE: $\mathbf{1x + 0y \le 8\,000}$
- Disponibilitat diària de EA: $\mathbf{5x + 2y \le 45\,000}$
- Disponibilitat diària de PA: $\mathbf{1x + 4y \le 27\,000}$
- A més ha de ser, clar està: $\mathbf{x \ge 0}$ $\mathbf{y \ge 0}$

Representem gràficament el conjunt factible, i algunes rectes de nivell de la funció objectiu:





Com que **a = 1, b = 3** (majors que zero), la recta de major nivell que té punts comuns amb S passa pel vèrtex **V(7000, 5000),** punt de tall de les arestes: **5x + 2y = 45 000** i **1x + 4y = 27 000**.

Aleshores l'empresa ha de produir **7000** litres de A_1 i **5000** litres de A_2 per a obtenir el major benefici possible:

f(7000, 5000) = 7000 + 3 · 5000 = **22000 €**

16 Obtén la producció que maximitza el benefici per a l'empresa de l'exemple anterior, en els següents casos:
(A) El benefici per litre de l'aiguardent A_1 és d'1 €, i el de A_2 és de 5 €.
(B) El benefici per litre de l'aiguardent A_1 és de 3 €, i el de A_2 és d'1 €.

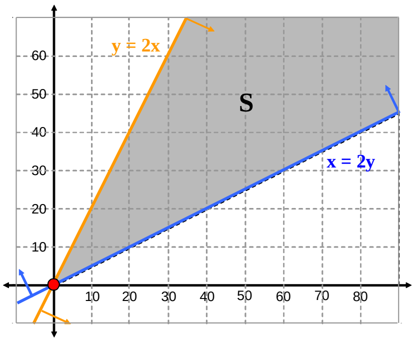
Exemple 13

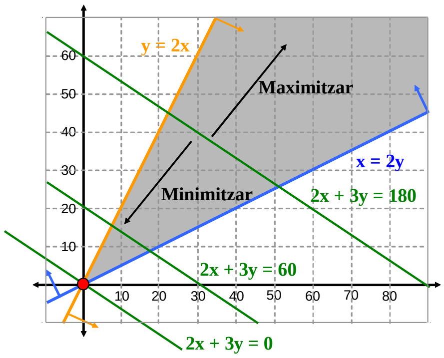
Obtenim el major i el menor valor, si existeixen, de la funció objectiu **f(x, y) = 2x + 3y**, amb les restriccions:

$$\mathbf{y \le 2x} \quad \text{i} \quad \mathbf{x \le 2y}$$

El conjunt factible S és el **politop no fitat** de la següent figura, que obtenim de resoldre el sistema format per les anteriors dues inequacions. Només té dues arestes i un vèrtex, el (0, 0).

Representem la recta de nivell 0, d'equació 2x + 3y = 0, i altres paral·leles a ella, de nivells majors. El nivell de les rectes coincideix amb el valor de la funció objectiu en els punts d’aquestes rectes.





- No és possible assolir el màxim benefici perquè qualsevol recta amb nivell k ≥ 0 conté punts comuns amb el conjunt factible. En la gràfica tenim dibuixades les rectes:

  r(0): 2x + 3y = 0 r(60): 2x + 3y = 60 r(180): 2x + 3y = 180

  Podem traçar rectes paral·leles de major nivell k, amb punts continguts en S, i que per tant proporcionen major valor a la funció objectiu.

- El mínim de la funció s'obté en el punt (0, 0), vèrtex pel qual passa la recta amb menor nivell de f. Aquest valor mínim és:

  $$\mathbf{f(0, 0)} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = \mathbf{0}$$

  Aquest valor mínim coincideix, clar està, amb el valor del terme independent de la recta de nivell de f que passa pel punt (0, 0):

  $$\mathbf{r(0): 2x + 3y = 0}$$

17 Una persona vol fer un règim per a aprimar-se. En una farmàcia li ofereixen dos composts A i B, perquè prenga una mescla dels dos en la menjada, amb les següents recomanacions:

- No ha de prendre més de 150 grams de la mescla, ni menys de 50.
- No ha de prendre més quantitat de B que de A.
- No ha d'incloure més de 100 grams de A.

Si sabem que 100 grams de A contenen 30 mg de vitamines i 450 calories, i que 100 grams de B contenen 20 mg de vitamines i 150 calories:

(A) Quants grams de cada compost ha de prendre per a obtenir el preparat més vitamínic?

(B) I per a obtenir el preparat amb menys calories?

18 Un industrial fabrica 2 productes, A i B. Per cada kg de A necessita 4 hores de treball i 100 € de material, i obté un benefici de 75 €. Per cada kg de B necessita 7 hores de treball i 80 € de material, obtenint un benefici de 50 €. Cada setmana, l'industrial pot comptar amb un total de 200 hores de treball. A més està obligat a produir un mínim de 15 kg de A i 10 kg de B, i no pot gastar més de 3200 € en material.

(A) Expressa aquest problema com un problema de programació lineal, i representa gràficament el seu conjunt factible.

(B) Calcula la quantitat setmanal de cada tipus de producte que convé fabricar per a obtenir el major benefici possible.

(C) Calcula la quantitat setmanal si el benefici per cada tipus de producte és el mateix.

4.6 Programació lineal entera

Exemple 14

ORDENATIC es dedica a la fabricació de teclats per a ordinadors personals i portàtils, obtenint un benefici de 6 € i 8 € per cada teclat venut de cada tipus.
Cada teclat d'ordinador personal necessita 4 unitats de PVC i 2 de material elèctric, mentre que cada teclat d'ordinador portàtil necessita 2 unitats de PVC i 3 de material elèctric
El seu proveïdor subministra, cada setmana, un total de 20 unitats de PVC i 15 de material elèctric.
Calcula la quantitat de teclats de cada tipus que haurà de vendre cada setmana per a maximitzar el seu benefici.

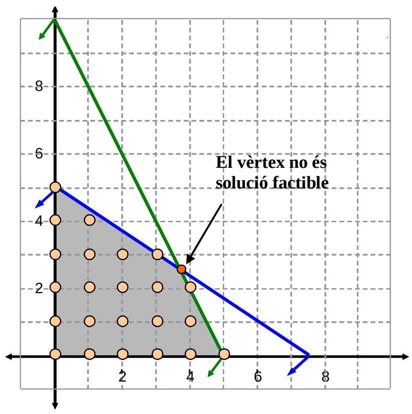
Anomenem **x** al nombre de teclats per a ordinador personal i **y** al de teclats per a portàtil produïts.

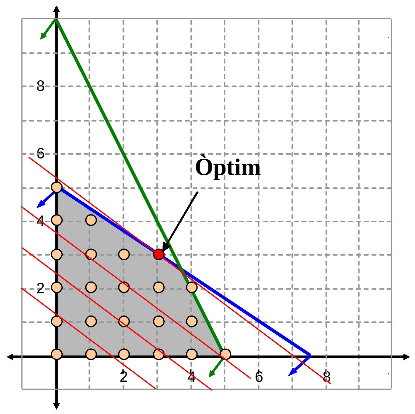
La funció a maximitzar és $\mathbf{B(x, y) = 6x + 8y}$

Les restriccions són:

- Disponibilitat de PVC: $\mathbf{4x + 2y \leq 20}$
- Disponibilitat de material elèctric: $\mathbf{2x + 3y \leq 15}$
- No negativitat: $\mathbf{x \geq 0}$ $\mathbf{y \geq 0}$
- Els valors han de ser enters: $\mathbf{x \in \mathbb{Z}}$ $\mathbf{y \in \mathbb{Z}}$

Aquesta última restricció imposa que en el conjunt factible considerem només les **parelles de nombres enters** (no anem a produir mig teclat). Són els punts de color marró de la figura.





Representem diverses rectes de nivell, i observem que si les solucions no hagueren de ser enteres, el màxim s'assoliria en el vèrtex V(5/4, 5/2) intersecció de les arestes blava i verda.

Però en el nostre exemple hem constatat la necessitat de que la solució siga en coordenades enteres. El màxim s'assoleix en el punt marró pel que passa la recta amb major nivell possible. És el punt P(3, 3), amb valor:

$$\mathbf{f(3, 3)} = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = \mathbf{42}$$

La producció òptima és de 3 teclats de cada tipus, amb un benefici màxim de 42 €.

19 Una empresa de repartiment rep l'encàrrec de distribuir dos productes diferents, A i B. L'empresa cobra 1.5 euros per cada unitat del producte A que arriba al seu destí i 1 euro per cadascun del producte B, però ha de distribuir almenys 50 unitats del producte A i 100 del B. A més, el nombre d'unitats del producte B no ha de ser inferior al doble d'unitats repartides del producte A, i el total d'unitats repartides no pot ser superior a 300.

(A) Expressa la funció lineal que ha de ser optimitzada per a obtenir el màxim benefici.
(B) Representa gràficament el conjunt factible.
(C) Obtén les quantitats de cada producte que cal repartir per a obtenir el màxim benefici, i el seu valor.

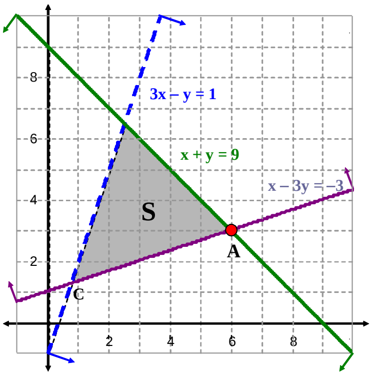
Exemple 15

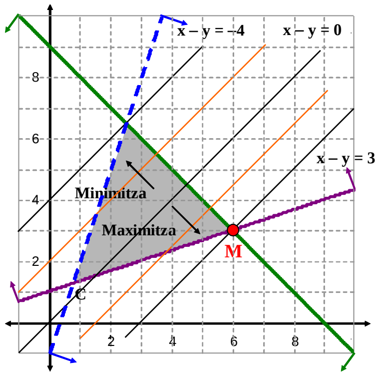
Considerem el problema d’optimitzar la funció objectiu **f(x, y) = x – y**, amb les condicions:

(A) $\mathbf{x + y \le 9}$ $\mathbf{3x - y > 1}$ $\mathbf{x - 3y \ge -3}$ (programació “normal”)

(B) $\mathbf{x + y \le 9}$ $\mathbf{3x - y > 1}$ $\mathbf{x - 3y \ge -3}$ $\mathbf{x \in \mathbb{Z}}$ $\mathbf{y \in \mathbb{Z}}$ (programació entera)

(A) Representem en la primera figura el conjunt factible S; no és tancat i no conté a l'aresta **3x – y = 1**.
En la segona figura representem algunes corbes de nivell de f, per a observar cap a on augmenta el nivell.



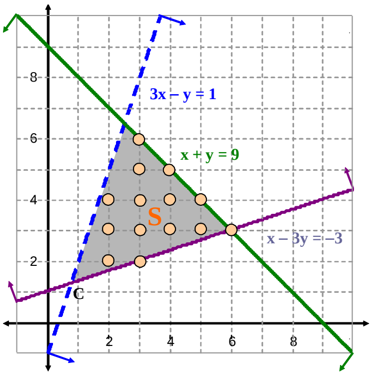


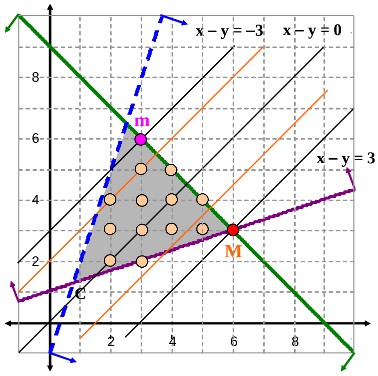
- La recta de major nivell que talla el conjunt factible ho fa en el vèrtex M(6, 3) que és el punt intersecció de les arestes **x + y = 9** i **x –3y = –3**. El valor màxim és

$$\mathbf{f(6, 3)} = 6 - 3 = \mathbf{3}$$

- La recta de menor nivell que proporcionaria el mínim seria la que passa pel punt P(2.5, 6.5), intersecció de les arestes $\mathbf{x + y \le 9}$ i $\mathbf{3x - y > 1}$. Però com que aquesta última no pertany a S, el punt P tampoc, i per això la funció f no assoleix el mínim en S.

(B) Ara requerim valors enters, el mínim i el màxim s'elegeixen entre els punts del conjunt factible amb coordenades enteres, pels que passa la recta de menor i major nivell, respectivament.





- El mínim s'assoleix en **m(3, 6)**, amb valor **f(3, 6)** = 3 – 6 = **–3**.
- El màxim s'assoleix en **M(6, 3)**, amb valor **f(6, 3)** = 6 – 3 = **3**.

Observa que, en programació lineal entera, en un “polígon sense arestes” pot haver-hi solució.

20 Els 400 alumnes d'un col·legi van d'excursió, i contracten el viatge amb una empresa que disposa de 8 autobusos de 40 places cadascun, i 10 autobusos de 50 places, però que només té 9 conductors per a aquest dia. El lloguer d'un autobús gran costa 800 euros, i 600 el d’un petit.
(A) Representa gràficament el conjunt factible.
(B) Obtén el nombre d'autobusos de cada tipus que seria necessari llogar perquè el viatge siga el més econòmic possible, i el cost d'aquest viatge.

4.7 Problemes de transport

Exemple 16

L'empresa FIRAL S.L., dedicada a la fabricació d'atraccions de fira, rep tres comandes urgents d'altres tants firers situats a Alacant, Badajoz i Cádiz, de 10, 15 i 20 unitats de cotxes de xoc, respectivament. Té dos magatzems d'abastament instantani situats a Madrid i Salamanca, amb un estoc de 30 i de 15 unitats, respectivament.
El cost del transport, per unitat, de cada magatzem al punt de destí ve donat en la següent taula, sent el valor expressat en euros.

	A	**B**	**C**
M	500	600	800
S	700	300	900

Quantes unitats ha de transportar FIRAL des de cada magatzem als llocs de destí de manera que li resulte el més econòmic possible?

Utilitzem les següents variables per a indicar el nombre d'unitats enviades des dels 2 centres de distribució als 3 centres de recepció:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	**x**	**y**	**z**	30
S	**u**	**v**	**w**	15
Total	10	15	20	

L'objectiu és minimitzar els costs de transport totals, que expressats en funció de les 6 variables són:

$$\mathbf{C = 500x + 600y + 800z + 700u + 300v + 900w}$$

Però les anteriors variables estan relacionades per les següents equacions, deduïdes de la taula anterior:

$$\mathbf{x + u = 10 \qquad y + v = 15 \qquad z + w = 20 \qquad x + y + z = 30 \qquad u + v + w = 15}$$

el que permet expressar l'anterior taula només amb les variables x i y:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	**x**	**y**	**30 – x – y**	30
S	**10 – x**	**15 – y**	**x + y – 10**	15
Total	10	15	20	

El cost de transport es pot expressar en funció de les variables x i y:

$$C = C(x, y) = 500x + 600y + 800(30 - x - y) + 700(10 - x) + 300(15 - y) + 900(x + y - 10)$$

Obtenim la següent **funció objectiu**:

$$\mathbf{C(x, y) = -100x + 400y + 26500}$$

Volem obtenir els valors de x i y que proporcionen el menor cost de transport, subjecte a les restriccions:

$$\mathbf{x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 30 - x - y \geq 0}$$

$$\mathbf{10 - x \geq 0 \qquad 15 - y \geq 0 \qquad x + y - 10 \geq 0}$$

amb les quals exigim que el nombre d'unitats portades de cada magatzem a cada centre de recepció siga una quantitat no negativa. Es tracta d'un problema de **programació lineal en dues variables**.

Un ***problema de transport*** consisteix a distribuir productes des d'uns centres de distribució a altres centres de recepció amb el menor cost possible. Es pot resoldre com un problema de **programació lineal en dues variables** quan hi ha **2** centres de distribució i **3** de recepció, o al revés, i l'oferta **total** coincideix amb la **demanda total**.

Exemple 17

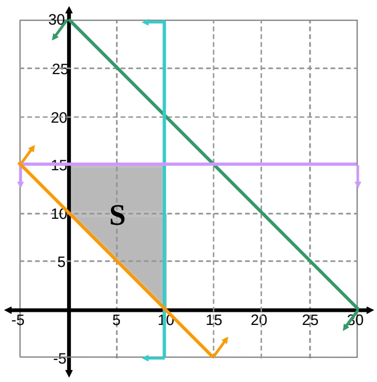
Resolem el problema de transport anterior, expressable com el problema de programació lineal:

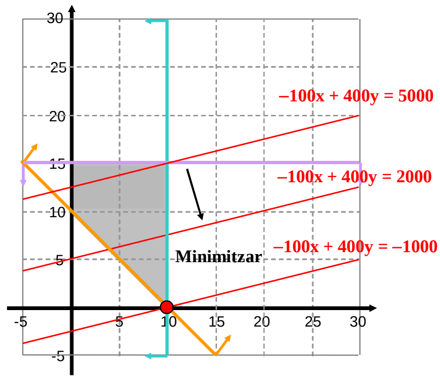
$$\text{Minimitzar } \mathbf{C(x, y) = -100x + 400y + 26\,500}$$

$$\text{subjecte a: } \mathbf{x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 30 - x - y \geq 0}$$

$$\mathbf{10 - x \geq 0 \quad 15 - y \geq 0 \quad x + y - 10 \geq 0}$$

Representant el conjunt factible, i algunes rectes de nivell de la funció objectiu:





La recta de menor nivell que talla el conjunt factible ho fa en el punt **P(10, 0)** que proporciona el menor cost:

$$\mathbf{C(10, 0) = -100 \cdot 10 + 400 \cdot 0 + 26\,500 = 25\,500\ €}$$

La distribució de les mercaderies amb mínim cost és per tant la següent:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	**10**	**0**	**20**	30
S	**0**	**15**	**0**	15
Total	10	15	20	

21 Obtén la distribució amb mínim cost en l'exemple 17, si afegim les condicions que des dels dos centres de distribució cal enviar necessàriament alguna mercaderia a cadascun dels centres de recepció.

22 Una companyia aèria vol establir una xarxa de vols entre les ciutats A i B d'un país, i les ciutats C, D i E d'un altre. De les ciutats A i B desitja que isquen un total de 10 i 20 vols cap a l'altre país, respectivament. A les ciutats C, D i E desitja que arriben 15, 10 i 5 vols, respectivament.
El nombre de km (en milers) entre les distintes ciutats es dóna en la taula següent.
Troba el nombre de vols diaris que aniran per cada línia perquè el nombre total de km siga mínim, amb la condició que per totes les línies ha de viatjar diàriament algun avió.

	C	**D**	**E**
A	2	3	4
B	4	3	2

Problemes del capítol 4

1 Obtén gràficament el conjunt de solucions dels següents sistemes d'inequacions lineals:

(A) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \end{array}\right\}$ (B) $\left.\begin{array}{l} 5 \leq x + y \leq 10 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ (C) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ x \geq 1, \quad y \geq 2 \end{array}\right\}$

2 Obtén el màxim i el mínim, si hi existeixen, de les següents funcions lineals, quan el conjunt factible és cadascun dels conjunts de solucions del problema anterior:

(A) $f_1(x) = 2x + y$ (B) $f_2(x, y) = x + 2y$ (C) $f(x) = 2x - y$ (D) $f_4(x, y) = x$

3 Expressa el sistema d'inequacions per al qual el conjunt de solucions és:

(A) El triangle de vèrtexs A(0, 0), B(3, 0) i C(0, 3).
(B) El triangle de vèrtexs A(1, 1), B(2, 5) i C(4, 2).
(C) El quadrat de vèrtexs A(0, 1), B(0, −1), C(1, 0) i D(−1, 0).
(D) El pentàgon de vèrtexs A(1, 2), B(1, 4), C(3, 1), D(5, 1) i E(5, 4).
(E) El pentàgon de vèrtexs A(0, 0), B(3, 1), C(5, 2), D(0, 4) i E(1, 8).

4 Donat el sistema de inequacions $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + 2y \leq 13 \\ 0 \leq y \leq x \end{array}\right\}$:

(A) Representa gràficament aquest conjunt.
(B) Obtén el màxim i el mínim de les següents funcions lineals quan el conjunt factible és el conjunt de solucions anterior:

(1) $f(x, y) = x + y$ (2) $f(x, y) = x - y$ (3) $f(x, y) = 2x + 3y$ (4) $f(x, y) = 3x + 4y$
(5) $f(x, y) = 2x + 4y$ (6) $f(x, y) = y - 2x$ (7) $f(x, y) = x$ (8) $f(x, y) = y$

5 Optimitza el següent problema de programació lineal segons els valors de $m > 0$:

Funció objectiu: $f(x,y) = x + my$ Restriccions: $\left.\begin{array}{c} 10 \leq x + y \leq 40 \\ 0 \leq x \leq y \end{array}\right\}$

6 Resol els següents problemes de programació lineal:

(A) Màx $f(x, y) = 2x + 3y$

s.a.: $\left.\begin{array}{ll} x + y \geq 1; & x + y \leq 4 \\ y \leq 3x; & x \leq 3y \end{array}\right\}$

(B) Màx $f(x, y) = 2x + 5y$

s.a.: $\left.\begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ y - x \leq 3 \\ x \geq 0, \quad y \geq 1 \end{array}\right\}$

7 Representa gràficament el conjunt de solucions del sistema d'inequacions $\left.\begin{array}{l} x + y \leq 85 \\ 2x + 3y \leq 200 \\ x \geq 0, \; y \geq 0 \end{array}\right\}$.

(A) Optimitza (màxim i mínim) la funció $f(x, y) = 26x + 27y$.
(B) Si les desigualtats del sistema d'inequacions foren totes estrictes, què passaria?
(C) I si afegírem al cas (B) la condició que $x, y \in \mathbb{Z}$??

8 Considera la regió factible determinada pels vèrtexs A(1, 1), B(0, 3), C(3, 5), D(5, 2) i E(3, 0). Optimitza (màxim i mínim) les funcions:

(A) $f(x, y) = x + 3y$ (B) $f(x, y) = x - 3y$ (C) $f(x, y) = -x + 3y$ (D) $f(x, y) = -x - 3y$

9 Donades les restriccions $x + y < 4$, $x \geq 1$, $y \geq 1$:
(A) Maximitza la funció $B(x, y) = 3x + 3y$.
(B) Minimitza la funció $C(x, y) = 2x - y$.
(C) Si x i y representen el nombre de taules i cadires respectivament, maximitza $F(x, y) = 5x + 5y$.

10 Considera la regió factible donada pel sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + y \ge 4 \\ x + 5y \ge 5 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{array}\right\}$. Optimitza les funcions:

(A) $f(x, y) = 3x + 2y$ (B) $f(x, y) = 3x - 2y$ (C) $f(x, y) = 2x + y$ (D) $f(x, y) = -x + 3y$

11 Una fàbrica produeix dos tipus d'articles A i B. Les màquines utilitzades condicionen la producció, de forma que cada dia no es poden produir menys de 200 unitats del tipus A, ni més de 900 en total. Un estudi de mercat indica que és convenient produir almenys el doble d'unitats del tipus B que del tipus A. Obtén la producció diària que maximitza beneficis si per cada unitat A obtenim el doble de benefici que per cadascuna de B.

12 Una empresa de construcció decideix construir dos tipus de xalets, A i B. Disposa de 48 milions d'euros i el preu de cost de cada tipus de xalet és de 600 000 euros i 400 000 euros, respectivament, venent-los a 800 000 i 500 000 euros. Segons la normativa de la urbanització, els del tipus A no poden ocupar més del 40% del total construït, i els del tipus B han d'ocupar almenys el 50%. Quants xalets de cada tipus convé construir per a obtenir el major benefici possible?

13 Un fabricant de cotxes construeix dos tipus de cotxes: xicotets i grans. La factoria està dividida en les seccions de muntatge i acabat. Els requeriments de treball en les distintes seccions per cotxe, així com les hores necessàries i disponibles, es donen en la següent taula:

Temps (hores)	Muntatge	Acabat
Cotxe xicotet	3	3
Cotxe gran	5	3
Hores disponibles	150	120

Si el benefici és de 500 euros per cada cotxe xicotet i de 650 euros per cada cotxe gran, quants cotxes de cada tipus cal produir per a maximitzar els beneficis?

14 Un inversor disposa de 20 000 euros. Pot invertir en bons del tipus A què donen un rendiment del 10%, o en bons del tipus B, amb un rendiment del 15%. Hi ha uns límits legals que impossibiliten invertir més de 8 000 euros en bons del tipus B, però en els del tipus A la inversió mínima és de 5 000 euros. D'altra banda, l'inversor vol col·locar en bons del tipus A almenys tants diners com en bons del tipus B. Quina inversió ha de fer en bons de cada tipus perquè el rendiment siga màxim? Quin serà el valor d'aquest màxim rendiment?

15 Una companyia disposa de dues classes d'inspectors per a fer el seu treball de control de qualitat. Cada jornada, de 8 hores de duració, l'empresa ha d'inspeccionar 1 800 peces. Els inspectors de la classe A poden inspeccionar peces a un ritme de 25 per hora, amb un grau de precisió del 98% (2 errors per cada 100 peces examinades). Els inspectors de la classe B inspeccionen 15 peces per hora, amb un grau de precisió del 95%. Cada inspector de la classe A cobra 40 euros/hora, i cada inspector de la classe B cobra 30 euros/hora. Cada vegada que un inspector comet un error al examinar una peça, aquest error té una repercussió econòmica per a l'empresa de 20 euros. Determina quants inspectors de cada tipus ha d'utilitzar l'empresa de forma que els costs totals siguen mínims i estableix aquest cost.

16 Un pastisser fabrica dos tipus de pastissos P1 i P2, per als quals usa 3 ingredients: A, B i C. Disposa de 160 kg de A, 90 kg de B i 50 kg de C. Per a fabricar un pastís P1 ha de mesclar 1 kg de A, 1 kg de B i 2 kg de C, mentre que per a fer un pastís T2 ha de mesclar 5 kg de A, 2 kg de B i 1 kg de C. Si ven els pastissos T1 a 10 € la unitat, i els pastissos T2 a 25 €, quina quantitat ha de fabricar de cada tipus per a maximitzar els seus ingressos?

17 Una fàbrica de mobles produeix cadires i taules utilitzant fusta i acer. Cada cadira requereix 2 taulers de fusta i 6 peces d'acer mentre que la taula requereix 8 taulers i 14 peces d'acer. A més es necessiten 5 hores de treball per a fabricar una cadira i 6 per a una taula. Setmanalment la fàbrica rep dels seus proveïdors 32 taulers i 61 peces d'acer i disposa de 48 hores de treball. Si la venda de la cadira reporta un benefici de 9 € i la de la taula 35 €, optimitza el benefici setmanal de l'empresa.

18 Una empresa de construcció compta amb 60 000 m^2 disponibles per a urbanitzar. Decideix construir dos tipus de vivendes unifamiliars: unes en parcel·les de 200 m^2, que albergaran a famílies d'una mitjana de 3 membres, el preu de les quals serà de 140000 euros; les altres, en parcel·les de 300 m^2, albergaran a famílies d'una mitjana de 6 membres, i costaran 200000 euros. Les autoritats del municipi imposen dues condicions:

(A) El nombre de cases no pot superar les 262.

(B) El nombre esperat d'habitants no pot superar els 1050.

Calcula quantes vivendes de cada tipus convé produir per a maximitzar el ingrés.

19 Una empresa de repartiment rep l'encàrrec de distribuir dos productes diferents, A i B. L'empresa cobra 1.5 euros per cada unitat del producte A què arriba al seu destí, i un euro per cada unitat del producte B, però ha de distribuir, almenys, 50 unitats del tipus A i 100 del tipus B. A més, el nombre d'unitats repartides del tipus B no ha de ser inferior al doble d'unitats del tipus A repartides, i el total d'unitats no pot superar les 300.

(A) Expressa la funció lineal que ha de ser optimitzada per a obtenir el major ingrés possible.

(B) Expressa les restriccions del problema i representa el conjunt factible.

(C) Obtén les quantitats de cada tipus de producte que convé produir per a obtenir el major ingrés possible, i el valor d'aquest ingrés.

20 Un fabricant de sabates produeix tres models distints, A, B i C. Ha de servir una comanda de 6 000 parells del model A, 4 000 de B i 6 000 de C. Té dues fàbriques que poden produir, la primera d'elles, 3 000, 1 000 i 1 000 parells diaris de cada model, i la segona, 1000, 1000 i 3000 cada dia. El cost diari de mà d'obra és de 50000 euros en la primera fàbrica i de 40 000 euros en la segona. Quants dies haurà de treballar cada fàbrica per a servir la comanda amb el menor cost possible de mà d'obra?

21 Una empresa fabrica televisors i cadenes de música, obtenint un benefici net, per televisor i cadena, idèntic, 200 euros. L'empresa divideix la producció en 3 seccions; en la secció A es construeixen les components de cada aparell, i se sap que les d'un televisor requereixen 6 hores de treball, i 3 en la cadena. En la secció B es construeix la caixa moble, requerint una hora de treball la del televisor i 2 la de la cadena. En la secció C s'adapta i empaqueta, requerint 2 hores per televisor i 3 per la cadena de música. La limitació d'hores de treball per setmana és de 12000 hores en la secció A, 5000 en la B i 8000 en la C.

(A) Obtén la producció setmanal que maximitza beneficis.

(B) Si el benefici per televisor és de 250 euros, i de 100 euros per cadena de música, com maximitzem el benefici?

22 Per a fabricar un determinat compost químic s'utilitza, almenys, 8 grams de sodi i 12 de potassi. Disposem d'un producte A què conté un gram de sodi i 3 de potassi per cada 10 grams de producte i que es ven a 0.3 euros/gram. També hi ha un altre producte B que conté, per cada 10 grams, un total de 2 de sodi i 2 de potassi i que es ven a 0.4 euros/gram. Quina quantitat de cada producte caldrà adquirir per a complir les exigències del compost químic i al mateix temps tenir les menors despeses possibles?

23 El veterinari ha recomanat que durant un mes, el gos d'un client prenga diàriament 4 unitats d'hidrats de carboni (H), 23 de proteïnes (P) i 6 de greix (G). En el mercat hi ha dues marques de menjar A i B que les contenen amb les següents característiques (per pot):

Marca	H	P	G	Preu
A	4	6	1	10
B	1	10	6	16

Troba la forma de combinar les dues marques perquè el gos prenga al dia les quantitats necessàries, amb les menors despeses possibles.

24 Una empresa fabrica dos tipus de fertilitzants F1 i F2 a partir de quatre elements, nitrogen, àcid fosfòric, potassi i guano. La següent taula expressa la composició en litres per bidó d'aquests fertilitzants:

	Nitrogen	À. fosfòric	Potassi	Guano
F1	20	30	30	20
F2	10	10	60	20

La setmana pròxima es disposa de 900 litres de nitrogen i 1400 litres de guano però la gran quantitat d'estoc que hi ha dels altres dos components requereix utilitzar almenys 600 litres d'àcid fosfòric i 1800 litres de potassi. Si cada bidó del fertilitzant F1 li proporciona un benefici de 6 € i cadascun de F2 un benefici de 5 €, optimitza el benefici de la setmana pròxima.

25 La mescla de 3 elements químics A, B i C, permet elaborar dos composts H i K. Les quantitats, en grams, requerides per cada litre de compost, venen donades en la taula:

	A	**B**	**C**
H	3	6	37
K	33	11	2

Una empresa disposa com a màxim de 7 755 litres de A i 3300 de B, no obstant necessita desprendre's d'almenys 370 litres de C (que té en quantitat il·limitada). Si el benefici d'un litre de H és de 8 €, i de 3 € per a K, resol l'estratègia òptima de fabricació.

26 Una empresa fabrica dos models de caçadores A i B. Utilitza tres tipus de teixits, llana, cotó i seda. El model A requereix 0.25 m^2 de llana, 0.5 m^2 de cotó i 0.75 m^2 de seda; el model B requereix 0.75 m^2, 0.5 m^2 i 0.5 m^2 respectivament. Disposa de 50 m^2 de llana, 60 m^2 de cotó i 80 m^2 de seda. Si cada caçadora del model A es ven a 1250 € i cadascuna de B a 1750 €, quantes caçadores de cada tipus haurà de fabricar per a optimitzar ingressos?

27 Una alimentació adequada per a un determinat animal requereix 120 unitats de vitamina A, 240 de vitamina B i 80 de vitamina C. Un ramader utilitza dos productes P i Q que contenen aquestes vitamines, P proporciona 60 unitats de A, 40 de B i 20 de C, i Q proporciona 20 de A, 120 de B i 20 de C per litre. Si només disposa de 7 litres de P i 7 de Q, a 40 € i 32 € respectivament, quina quantitat ha d'utilitzar de cada producte per a alimentar correctament als seus animals amb les menors despeses possibles?

28 Es disposa de 200 hectàrees de terreny en les quals es desitja conrear patates i carlotes. Cada hectàrea dedicada al cultiu de patates necessita 12.5 litres d'aigua de reg al mes, mentre que la de carlotes necessita 40 litres, i es disposa mensualment d'un total de 5000 litres d'aigua per al reg. D'altra banda, les necessitats per hectàrea d'adob nitrogenat són de 20 kg per a les patates i de 30 kg per a les carlotes, i es disposa d'un total de 4500 kg d'adob nitrogenat. Si el benefici per hectàrea sembrada de patates és de 300 € i de 400 € el benefici per cada hectàrea de carlotes, quina quantitat d'hectàrees convé dedicar a cada cultiu? Quin guany s'obtindria d'aquesta manera?

29 Una empresa fabrica dos productes diferents, P1 i P2, que ven a 300 i 350 € per tona (t), respectivament. A tal fi, utilitza dos tipus de matèries primeres (A i B) i mà d'obra. Les disponibilitats setmanals de les matèries primeres són 30 t de A i 36 t de B, i les hores de mà d'obra disponibles a la setmana són 160. En la taula següent es resumeixen els requeriments (en t) de les matèries primeres i les hores de treball necessàries per a la producció d'una tona de cada producte:

	A	B	Mà d'obra
P1	2	3	4
P2	3	1	20

Determina la producció setmanal que maximitza els ingressos de l'empresa tot sabent que un estudi de mercat indica que la demanda del producte P2 mai supera la del producte P1. A quant ascendeixen els ingressos màxims?

30 Un estudiant reparteix propaganda publicitària per a aconseguir ingressos. Li paguen 8 cents d'euro per cadascun dels impresos col·locats al parabrisa d'un cotxe i 12 cents per cadascun dipositat a una bústia. Ha calculat que cada dia pot repartir com a màxim 150 impresos i l'empresa li exigeix diàriament que la diferència entre els col·locats en cotxes i el doble dels col·locats en bústies no siga inferior a 30 unitats. A més, ha d'introduir en bústies almenys 15 impresos diàriament. Quants impresos ha de col·locar en cotxes i bústies per a maximitzar els seus ingressos diaris? Quin és aquest ingrés màxim?

31 Un comerciant vol invertir fins a 1000 euros en la compra de dos tipus d'aparells, A i B, i pot emmagatzemar fins a 80 aparells. Cada aparell de tipus A li costa 15 euros i el ven a 22, cadascun del tipus B li'n costa 11 i el ven a 17 euros. Quants aparells ha de comprar de cada tipus per a maximitzar el benefici? Quin és el benefici màxim?

32 Un tren de mercaderies pot portar com a màxim 103 vagons. En un viatge, porta cotxes i motos. Per als cotxes ha d'utilitzar més de 53 vagons i per a les motos almenys la meitat dels dedicats a cotxes, i no menys de 23 vagons. L'ingrés de la companyia és de 550 € per cada vagó de cotxe i 360 € per cada vagó de motos. Com ha de distribuir els vagons per a ingressar la major quantitat de diners?

33 Una empresa té dues piscifactories A i B que produeixen 8000 kg i 15000 kg respectivament de daurades. Tota la producció és venuda en tres tendes, P, Q i R, que requereixen 10 000, 7 000 i 6 000 kg respectivament. El cost de transport des de les piscifactories als punts de venda, en euros per kg, venen donades en la següent taula. Com ha d'organitzar el transport perquè el cost resulte més barat?

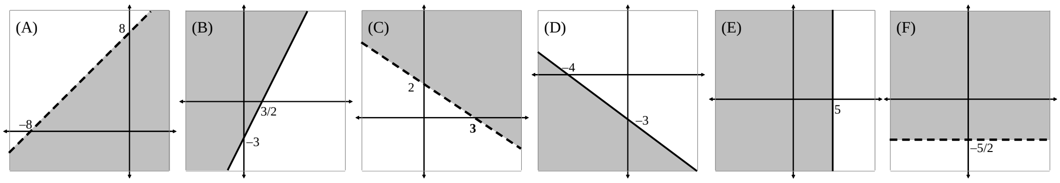
	P	Q	R
A	0.06	0.13	0.02
B	0.04	0.04	0.12

34 Una empresa té dues plantes manufactureres A i B que produeixen 11000 kg i 13000 kg d'un cert producte, respectivament, cada any. Envia la producció a les seues plantes empaquetadores, P, Q i R, que processen 6000, 8000 i 10000 kg respectivament. Si el cost de transport ve donat en la taula següent en euros per kg, com ha d'organitzar-ho perquè el cost del transport resulte més barat?

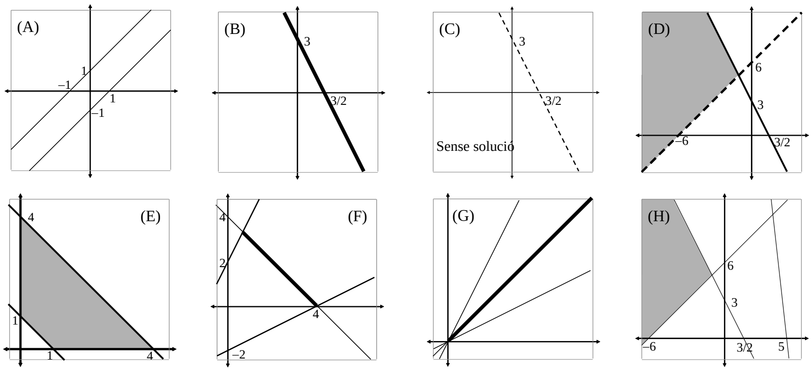
	P	Q	R
A	0.03	0.05	0.02
B	0.04	0.03	0.04

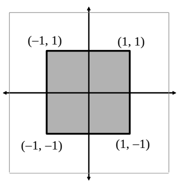
Solucions de les activitats del capítol 4

1. No, sí. **2.** (A) m = –3/2 y m’ = 2, es tallen, SCD. (B) m = 4 i m’ = 4, n = 5/2 i n’ = –1, paral·leles, SI. (C) m = 2/5 i m’ = 2/5, n = –1/5 i n’ = –1/5, coincidents, SCI. **3.** (A) y = 7x – 17, 7x – y –17 = 0, m = 7. (B) y = 2x/3, 2x – 3y = 0, m = 2/3. (C) y = 3, y – 3 = 0, m = 0. (D) x = 1, x – 1 = 0, m no existeix. **4.** (A) y = 5, x = 2. (B) y = 0, x = 0. (C) y = –3, x = 0. (D) y = 0, x = –1. (E) y = b, x = a. **5.** 2x – 3y = –5, 2x – 3y = 0.
6. (A) No, (B) no, (C) sí, (D) sí, (E) no, (F) sí, (G) sí, (H) no. **7.** (A) (0, 0), (1, 0); (5, 0), (0, 3). (B) (5, 0), (0, 3); (0, 0), (1, 0). (C) (0, 0), (1, 1); (0, –6), (1, –10). (D) (0, 0), (1, 1); (7, 2), (8, 3). (E) (5, 0), (3, 2); (–3, 2), (–1, 5). (F) (2, 0), (2, –2); (0, 7), (–2, 8). **8.**

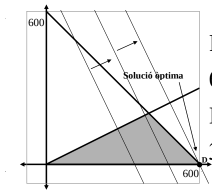


9. (2, 0), (4, 1), (0, –1), (–1, 0). **10.**



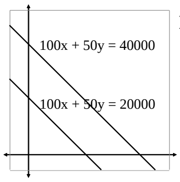
11. 

$$\left.\begin{array}{l} y \le 1 \\ y \ge -1 \\ x \le 1 \\ x \ge -1 \end{array}\right\}$$

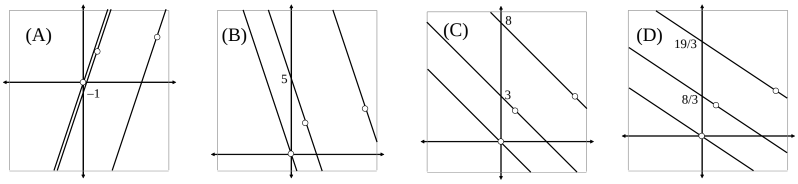
12. 

Producció òptima:
600 t del tipus A, 0 t del tipus B
Màxim benefici:
30000 €

13. (A) Les parelles (x,y) de maquinetes dels tipus 1 i 2 que de produir-les donarien un benefici de 20000 u.m.
(B) El mateix, però amb benefici de 40000 u.m.



14.



(A)	(B)	(C)	(D)
$3x - y = 0$	$3x + y = 0$	$x + y = 0$	$2x + 3y = 0$
$3x - y = 1$	$3x + y = 5$	$x + y = 3$	$2x + 3y = 8$
$3x - y = 12$	$3x + y = 18$	$x + y = 8$	$2x + 3y = 19$

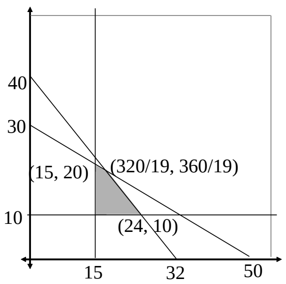
15. (A) 14 i 5. (B) 7 i 5/2. (C) 8 i 4. (D) 4 i –4. (E) $\dfrac{16}{3}$ i 0. (F) 0 i –16. **16.** (A) 3000 litres de A_1 i 6000 litres de A_2 (benefici de 33000€). (B) 8000 litres de A_1 i 3000 litres de A_2 (benefici de 27000€).
17. (A) 150 grams de A i 50 grams de B. (B) 25 grams de A i 25 grams de B.

18. (A) $f(x, y) = 75x + 50y$

$$\text{s. a.}\quad \left.\begin{array}{l} 4x + 7y \le 200 \\ 100x + 80y \le 3200 \\ x \ge 15, \quad y \ge 10 \end{array}\right\}$$

(B) 24 kg de A i 10 kg de B. Benefici 23000 €.

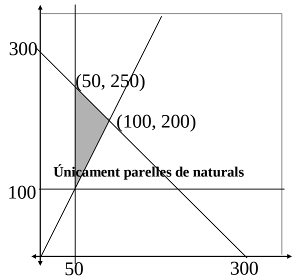
(C) 320/19 kg de A i 360/19 kg de B.



19. (A) $f(x, y) = 1.5x + y$

$$\text{(B)}\quad \left.\begin{array}{l} x \ge 50 \\ y \ge 100 \\ y \ge 2x \\ x + y \le 300 \end{array}\right\}$$

(C) 100 unitats de A i 200 de B. Benefici 350 €.

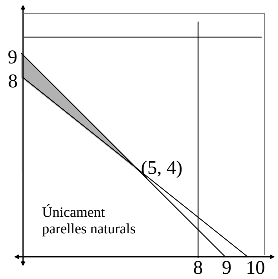


20. (A) $f(x, y) = 600x + 800y$

$$\left.\begin{array}{l} x \le 8, \;\; y \le 10 \\ x + y \le 9 \\ 40x + 50y \ge 400 \\ x \ge 0, \;\; y \ge 0 \end{array}\right\}$$

(B) 5 autobusos de 40 places i 4 de 50 places.

El cost del viatge és de 6200 €.



21. Cost: 26400 €.

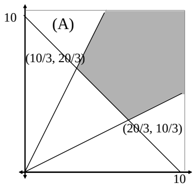
	A	**B**	**C**
M	9	2	19
S	1	13	1

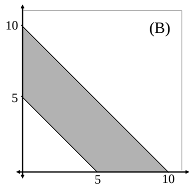
22. 86000 km.

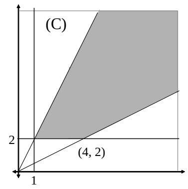
	C	**D**	**E**
A	8	1	1
B	7	9	4

Solucions dels problemes del capítol 4

1.



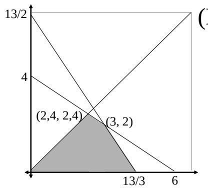




2.

	A		**B**		**C**	
	Màx.	Mín.	Màx.	Mín.	Màx.	Mín.
A	No	40/3	20	5	No	4
B	No	40/3	20	5	No	5
C	No	0	20	–10	No	0
D	No	10/3	10	0	No	1

3. (A) $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3$. (B) $3x + 2y \le 16, x - 3y \le -2, 4x - y \ge 3$. (C) $x + y \le 1, x + y \ge -1, -x + y \le 1, -x + y \ge -1$. (D) $y \le 4, y \ge 1, x \le 5, x \ge 1, x + 2y \ge 5$. (E) $x \ge 0, -x + 3y \ge 0, x - 2y \le 1, 4x - y \ge -4, 3x + 2y \le 19$.

4. (A) 

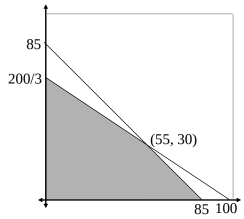
(B)

	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**
Màx	5	$\frac{13}{3}$	12	17	14.4	0	$\frac{13}{3}$	2.4
Mín	0	0	0	0	0	$-\frac{26}{3}$	0	0

5.

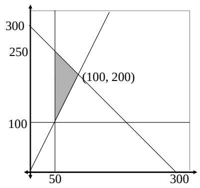
	Màx	**Mín**
m>1	40m	5+5m
m=1	40	10
m<1	20+20m	10m

6. (A) 11. (B) 22. **7.** Màxim: 2240, per a x = 55, y = 30; mínim: 0, per a x = y = 0. (B) No tindria ni màxim ni mínim. (C) El problema passa a ser de programació lineal entera, i amb desigualtats estrictes, els òptims estan en l'interior del conjunt factible. Màxim: 2214, per a x = 54, y = 30; i el mínim 53, per a x = y = 1.



8. (A) 18 i 3. (B) 3 i −12. (C) 12 i −3. (D) −3 i −18. **9.** (A) No s'assoleix el màxim. (B) No s'assoleix el mínim. (C) S'assoleix en (1, 2) i en (2, 1) i el seu valor és 15. **10.** (A) Mínim: 19/30, no hi ha màxim. (B) No hi ha màxim ni mínim. (C) El mínim es 4, no hi ha màxim. (D) No hi ha màxim ni mínim. **11.** 300 unitats de A i 600 de B. **12.** 40 xalets del tipus A i 60 del B (benefici 14000000 €). **13.** 25 cotxes xicotets i 15 grans (benefici 22250 €). **14.** 12000 € en bons del tipus A i 8000 € en bons del tipus B, amb benefici de 2400 €. **15.** 9 inspectors de la classe A i 0 de la B. Costs 3600 €. **16.** 10 pastels P_1 i 30 de P_2 (benefici de 850 €). **17.** 0 cadires i 4 taules, amb un benefici de 140 €. **18.** 186 vivendes de 200 m^2 i 76 de 300 m^2 (ingrés 41240000 €).

19. (A) f(x, y) = 1.5x + y. (B) $\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 100 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 300 \end{array}\right\}$



(C) 100 unitats de A; 200 unitats de B; ingrés màxim: 350 €.

20. La 1a. fàbrica 3 dies i la 2a. fàbrica 1 dia; cost: 190000 €. **21.** (A) 1000 televisors i 2000 cadenes de música. (B) 2000 televisors i cap cadena de música. **22.** 20 g de A i 30 de B (cost de 18 €). **23.** 0.5 pots de A i 2 de B. **24.** 20 litres de F_1 i 50 de F_2; benefici: 370 €. **25.** 550 litres de H i cap de K; benefici de 4400 €. **26.** 80 del tipus A i 40 del B; ingrés: 170000€. **27.** Un litre de P i 3 de Q; cost: 136 €. **28.** 150 ha de patates i 50 ha de carlotes; 65000 €. **29.** 6 tones de cada producte; 3900 €. **30.** 110 impresos en cotxes i 40 en bústies; 13.60 €.
31. 30 del tipus A i 50 del tipus B; 510 €. **32.** El màxim benefici s'assoleix per a 68 vagons de cotxes i 35 de motos. L'ingrés màxim és 50 000 euros.

33. Cost 840 €.

	P	**Q**	**R**
A	2000	0	6000
B	8000	7000	0

34. Cost 470 €.

	P	**Q**	**R**
A	1000	0	10000
B	5000	8000	0

2

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Càlcul diferencial i integral

educàlia
editorial

2 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Càlcul diferencial i integral

educàlia editorial

Primera edició, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-10-7
Depòsit legal: V-3246-2018
Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 4

Aplicacions de les derivades

4.1 Creixement d'una funció

Un dels objectius d'aquest capítol és representar perfectament les funcions que no coneixem prèviament. S'efectua a partir de les relacions entre la pròpia funció i les seues funcions derivades. Un altre dels objectius, molt aplicat en altres ciències, és l'optimització.

En primer lloc vegem la relació existent entre el creixement de les funcions i la funció derivada, d'on extraurem les primeres conclusions.

➢ Creixement i decreixement local

Considerem una funció f definida en un domini D_f i un punt $x_0 \in D_f$.

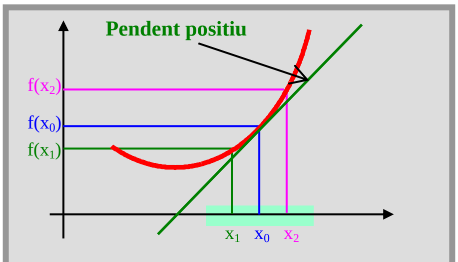
- Diem que f és ***estrictament creixent en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tal que per a qualsevol $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ es té que:

$$\text{si} \quad \mathbf{x < x_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f(x) < f(x_0)}$$
$$\text{si} \quad \mathbf{x > x_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f(x) > f(x_0)}$$

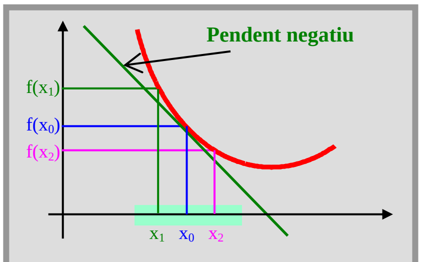
- Diem que f és ***estrictament decreixent en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tal que per a qualsevol $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ es té que:

$$\text{si} \quad \mathbf{x < x_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f(x) > f(x_0)}$$
$$\text{si} \quad \mathbf{x > x_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f(x) < f(x_0)}$$

Observa que la definició de creixement en un punt x_0 requereix el creixement en un entorn de x_0.



f estrictament creixent en x_0



f estrictament decreixent en x_0

Observa que el pendent de la recta tangent en x_0 és positiu en el primer dibuix, on f és creixent en x_0, i negatiu en el segon, on f és decreixent; així tenim la següent propietat:

➢ Propietat 1: condicions suficients de creixement en un punt

Considerem una funció f derivable en x_0:

- Si $\mathbf{f'(x_0) > 0}$ (pendent positiu) $\rightarrow$ **f és estrictament creixent en** $\mathbf{x_0}$
- Si $\mathbf{f'(x_0) < 0}$ (pendent negatiu) $\rightarrow$ **f és estrictament decreixent en** $\mathbf{x_0}$

Per tant, al trobar la derivada en un punt concret x_0:

- Si $f'(x_0) \neq 0$, la funció és estrictament creixent o bé estrictament decreixent.
- **Si** $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ o **f no és derivable en** $\mathbf{x_0}$, no podem assegurar res sobre la funció.

Anomenem ***punts singulars*** d'una funció f a aquells en què f no és derivable o f' val zero.

Exemple 1

Estudiem el creixement de les següents funcions en els punts $x_0 = -2, -1, 1$ i 2.

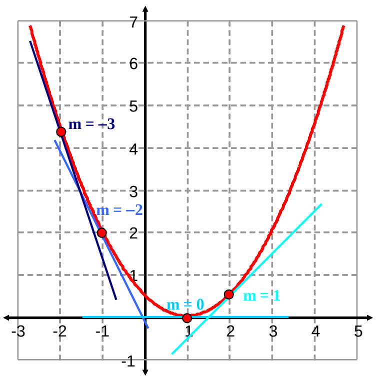
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \qquad g(x) = \frac{1}{9}(x+1)^3 \qquad h(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^3 \qquad t(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

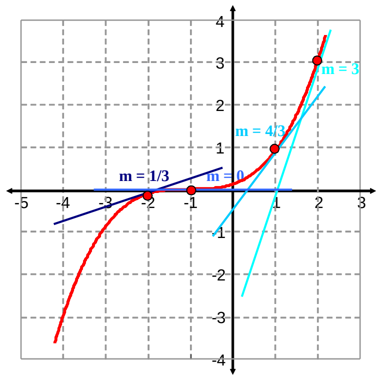
Les seues funcions derivades són

$$f'(x) = (x-1) \qquad g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^2 \qquad h'(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 \qquad t'(x) = -\frac{8}{(x-1)^3}$$

$f'(-2) = -3$	$\rightarrow$	f és decreixent en $x = -2$
$f'(-1) = -2$	$\rightarrow$	f és decreixent en $x = -1$
$f'(1) = 0$	$\rightarrow$	$x = 1$ és un punt singular de f
$f'(2) = 1$	$\rightarrow$	f és creixent en $x = 2$

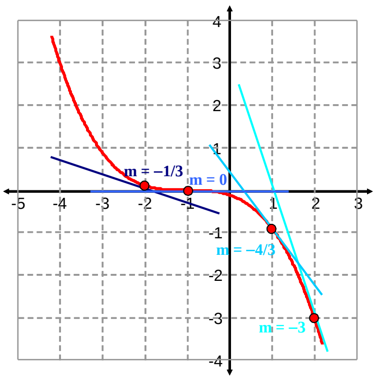
$g'(-2) = 1/3$	$\rightarrow$	g és creixent en $x = -2$
$g'(-1) = 0$	$\rightarrow$	$x = -1$ és un punt singular de g
$g'(1) = 4/3$	$\rightarrow$	g és creixent en $x = 1$
$g'(2) = 3$	$\rightarrow$	g és creixent en $x = 2$

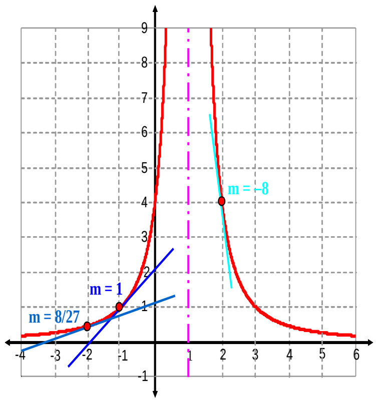




$h'(-2) = -1/3$	$\rightarrow$	h és decreixent en $x = -2$
$h'(-1) = 0$	$\rightarrow$	$x = -1$ és un punt singular de h
$h'(1) = -4/3$	$\rightarrow$	h és decreixent en $x = 1$
$h'(2) = -3$	$\rightarrow$	h és decreixent en $x = 2$

$t'(-2) = 8/27$	$\rightarrow$	t és creixent en $x = -2$
$t'(-1) = 1$	$\rightarrow$	t és creixent en $x = -1$
No existeix $t'(1)$	$\rightarrow$	$x = 1$ és un punt singular de t
$t'(2) = -8$	$\rightarrow$	t és decreixent en $x = 2$





- Observa que el signe positiu o negatiu de la derivada en cada punt (que és el signe del pendent) indica el creixement o decreixement de les funcions en l'esmentat punt.
- En canvi quan la derivada és nul·la o no existeix (punts singulars) hi ha incertesa; significa que cada funció, i en cada cas, tindrà resultats diferents. Així veiem que **f no creix ni decreix en x = 1, g és creixent en x = –1, h és decreixent en x = –1** i **t no està definida en x = 1**.

1 Estudia si les següents funcions creixen o decreixen en els punts $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$ i 5:

(A) $f(x) = 1/x$ (B) $f(x) = x^2 - 4x$ (C) $f(x) = \ln x$ (D) $f(x) = e^x$ (E) $f(x) = 1/x^2$

➢ Intervals de creixement d'una funció

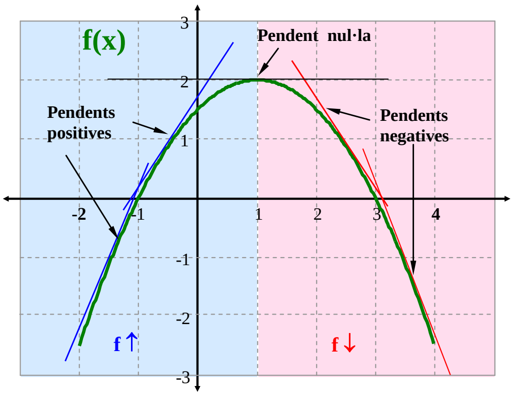
Diem que una funció f és ***estrictament creixent*** (***decreixent***) ***en un interval*** **I** si és estrictament creixent (decreixent) en cadascun dels punts de l'interval I.

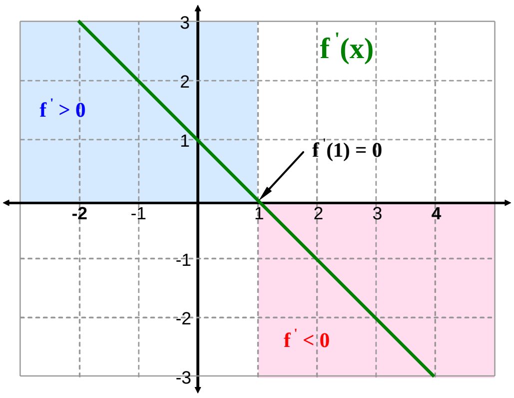
Exemple 2

Considerem la paràbola $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ amb domini $\mathbb{R}$.

La seua funció derivada és $f'(x) = -x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. És una funció afí (una recta).

Amb la representació gràfica de f i f' observem algunes característiques que expressem al costat de les seues gràfiques.





- La gràfica de f és una paràbola creixent fins al seu vèrtex V(1, 2) i decreixent a partir d'ell:

  f creix en]–∞, 1[i **decreix en]1, +∞[**

- $\forall x \in]-\infty, 1[$, la derivada és positiva.

  $\mathbf{f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-\infty, 1[}$

  (Observa que les rectes tangents tenen pendent positiu).

- $\forall x \in]1, +\infty[$, la derivada és negativa.

  $\mathbf{f'(x) < 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[}$

  (Observa que les rectes tangents tenen pendent negatiu).

- El punt on f passa de créixer a decréixer és un punt singular:

  $\mathbf{f'(1) = 0}$

Deduïm que **els punts rellevants per a determinar el creixement d'una funció són els punts singulars** (x = 1, en l'exemple). Obtenim el següent mètode per al seu estudi:

Considerem una funció definida en el seu domini D:

1 Trobem els punts singulars de f en D i els ordenem: $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

2 La recta real queda dividida pels punts singulars en els intervals:

$$]a, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ ]x_2, x_3[,\ \ldots\ ,\ ]x_n, b[, \qquad \text{on a pot ser } -\infty \text{ i b pot ser } +\infty.$$

En l'interior dels intervals anteriors no hi ha punts singulars, per tant f' té signe constant en cada interval. S'anomenen ***intervals de creixement*** de la funció.

3 Elegim un punt x de l'interior de cada interval. Si $f'(x) > 0$ aleshores f és creixent en l'interval. Si $f'(x) < 0$ aleshores f és decreixent en l'interval.

Exemple 3

Estudiem els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ amb domini $\mathbb{R}$.

Apliquem el mètode anterior seguint els passos indicats.

1 Trobem els punts singulars.

La funció derivada és $f'(x) = x^2 - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$, i s'anul·la en

$$\mathbf{f'(x) = 0} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = -2,\ x_2 = 2}$$

El conjunt de punts singulars ordenats són **{–2, 2}**.

2 A partir d'ells considerem els intervals **]–∞, –2[,]–2, 2[** i **]2, +∞[** dins dels quals, per construcció, no hi ha cap altre punt singular.

3 Estudiem el signe de la derivada en cada interval, elegint un punt qualsevol de cadascun.

En **]–∞, –2[** el signe de la derivada no pot canviar, per tant, el signe que tinga en $x = -3$, serà el mateix per a tots els punts de l'interval:

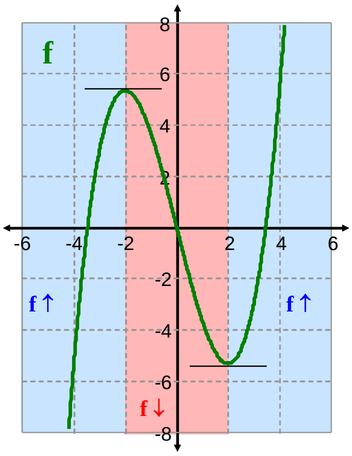
En **]–∞, –2[** considerem el punt $x = -3$: $\mathbf{f'(-3) = 5 > 0}$ $\Rightarrow$ **f estrictament creixent en]–∞, –2[**

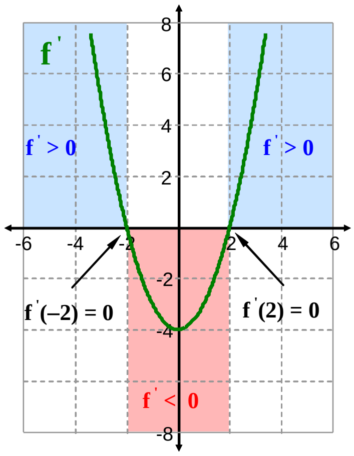
Anàlogament en els altres intervals:

En **]–2, 2[** considerem el punt $x = 0$: $\mathbf{f'(0) = -4 < 0}$ $\Rightarrow$ **f estrictament decreixent en]–2, 2[**

En **]2, +∞[** considerem el punt $x = 3$: $\mathbf{f'(3) = 5 > 0}$ $\Rightarrow$ **f estrictament creixent en]–2, +∞[**

Intervals	]–∞, –2[	]–2, 2[	]2, +∞[
Signe f '	+	–	+
f	↑	↓	↑





2 Troba els intervals de creixement de les funcions:

(A) $f(x) = -x^2 + 1$ (B) $f(x) = x^5 - 80x$ (C) $f(x) = e^{x-1}$ (D) $f(x) = \ln(x + 1)$ (E) $f(x) = -x^5$

(F) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ (G) $f(x) = -x + 1$ (H) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (I) $f(x) = 1/e^x$

(J) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (K) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (L) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (M) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

4.2 Extrems relatius d'una funció

Considerem una funció f i un punt $x_0 \in D_f$. Diem que:

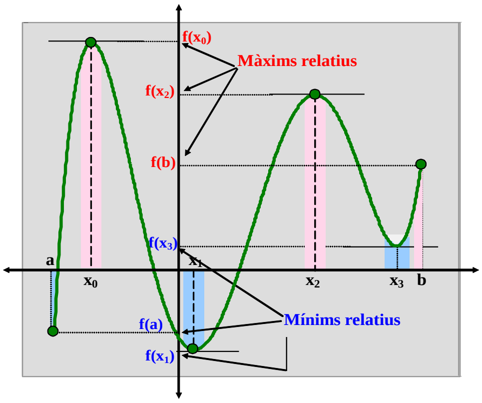
- **f *té un màxim relatiu en* x_0** si les imatges dels punts d'un entorn de x_0 verifiquen

$$\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$$

- **f *té un mínim relatiu en* x_0** si les imatges dels punts d'un entorn de x_0 verifiquen

$$\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$$

L'***extrem relatiu*** (màxim o mínim) és $\mathbf{f(x_0)}$, que direm és **assolit en** el punt $\mathbf{x_0}$.



Les imatges dels punts x situats en l'entorn (en rosa) de x_0 són menors que $f(x_0)$:

$f(x_0)$ és un màxim relatiu

També ho són $f(x_2)$ i $f(b)$.

Les imatges dels punts x situats en l'entorn (en blau) de x_1 són majors que $f(x_1)$:

$f(x_1)$ és un mínim relatiu

També ho són $f(a)$ i $f(x_3)$.

En els punts de l'interior del domini d'una funció derivable en els quals s'assoleixen extrems relatius canvia el creixement de les funcions, i les rectes tangents en ells són horitzontals.

➢ Propietat 2: condició necessària d'extrem relatiu

Considerem que f és derivable en $x_0 \in D_f$.

Si **f té un extrem relatiu en x_0** $\Rightarrow$ $\mathbf{f'(x_0) = 0}$

La condició necessària anterior diu que **quan en un punt x_0 la derivada no és nul·la, és impossible assolir en ell un extrem relatiu** (recorda que en aquest cas la funció serà estrictament creixent o estrictament decreixent en ell).

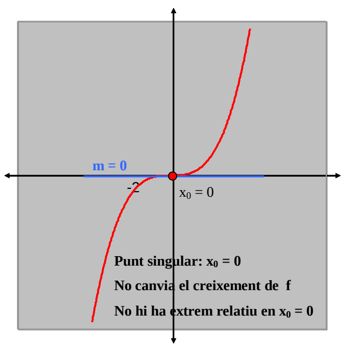
Per això deduïm que **els únics punts de l'interior del domini d'una funció f en què *es pot assolir* un extrem relatiu són els punts singulars**. No obstant això:

La gràfica de la funció $f(x) = x^3$ amb domini $\mathbb{R}$, demostra que **no és obligatori que en els punts singulars hi haja un extrem relatiu:**

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

L'únic punt singular de f és x = 0. No obstant això, f és estrictament creixent en qualsevol entorn de x = 0, perquè la derivada és no negativa:

$$f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \text{si } x \neq 0$$



3 Obtén el punt on assoleix un extrem relatiu la funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.3 Mètodes per a classificar els extrems relatius

Els següents mètodes estableixen si en un punt singular s'assoleix extrem relatiu. El primer mètode, **criteri del canvi de signe de la primera derivada**, s'aplica a punts singulars en què la funció siga contínua, encara que no siga derivable. El segon, **criteri del signe de la segona derivada,** només és aplicable als punts singulars en que la funció és derivable al menys dues vegades.

➢ Criteri del canvi de signe de la derivada

Suposem f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[excepte com a màxim en $x_0 \in$]a, b[:

- Si **f' < 0** en]a, x_0[i **f' > 0** en]x_0, b[→ **f passa de decréixer a créixer i per tant té un mínim relatiu en x_0**
- Si **f' > 0** en]a, x_0[i **f' < 0** en]x_0, b[→ **f passa de créixer a decréixer i per tant té un màxim relatiu en x_0**

Exemple 4

Trobem els extrems relatius de la funció $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ amb domini ℝ.

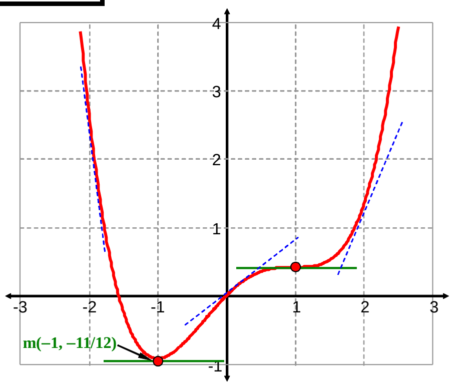
Estudiem els intervals de creixement i decreixement de la funció. La funció és derivable en ℝ, i els seus únics punts singulars són les solucions de:

$$\mathbf{f'(x) = 0} \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$$

Considerem els intervals **]–∞, –1[,]–1, 1[** i **]1, +∞[**.

En **]–∞, –1[** considerem x = –2: **f'(–2) = –9 < 0** ⇒ **f estrictament decreixent en]–∞, –1[**
En **]–1, 1[** considerem x = 0: **f'(0) = 1 > 0** ⇒ **f estrictament creixent en]–1, 1[**
En **]1, +∞[** considerem x = 2: **f'(2) = 3 > 0** ⇒ **f estrictament creixent en]1, +∞[**

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f '	–	+	+
f	↓	↑	↑
Canvi de signe de f ':		**Sí**	**No**



En els **canvis de signe de f ' hi haurà extrem relatiu**:

En x = –1 s'assoleix un mínim relatiu, perquè f passa de decréixer a créixer. **El valor mínim és**

$$\mathbf{f(-1) = -\frac{11}{12}}$$

En x = 1 no s'assoleix extrem relatiu (f és creixent).

Encara que no podem mostrar com realitzem la representació gràfica, la seua exposició recolza els resultats.

4 Troba els extrems relatius de la funció de l'exemple 4 si està definida en:
(A) [–1, 1] (B)]–1, 1[(C) [0, 3]

5 Troba els extrems relatius de les següents funcions definides en ℝ i en [–2, 2.5]:
(A) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (B) $f(x) = x^3 - x$ (C) $f(x) = x^3 + x$ (D) $f(x) = x^3 - 6x^2$

➢ Criteri del signe de la segona derivada

El signe de la segona derivada, avaluada en els punts amb primera derivada nul·la, permet conèixer els màxims i mínims relatius d’una funció. Vegem en un exemple el perquè.

Exemple 5

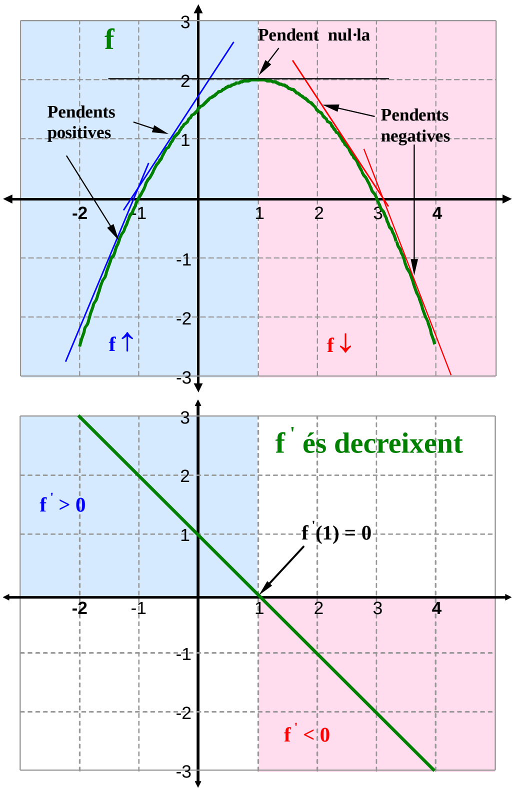
Considerem de nou la paràbola de l'exemple 2, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ amb domini $\mathbb{R}$.

La seua derivada és $f'(x) = -x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. És una funció afí (una recta).

La seua derivada segona és $f''(x) = -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. És una funció constant i sempre negativa.

Vegem el significat de la segona derivada en el punt singular d'aquesta funció (que sabem que és el vèrtex de la paràbola, en aquest cas un màxim relatiu)

$$\mathbf{f'(x) = 0} \iff -x + 1 = 0 \iff \mathbf{x = 1}$$



- Com que $\mathbf{f''(1) = -1 < 0}$, i f'' és la derivada de f', aleshores, per la propietat 1:

  f' és estrictament decreixent en x = 1

  Per tant en un entorn de x = 1, el pendent de la corba disminueix.

- Com que $\mathbf{f'(1) = 0}$, en aquest entorn:

  $\mathbf{f'(x) > 0}$ **si** $\mathbf{x < 1}$

  $\mathbf{f'(x) < 0}$ **si** $\mathbf{x > 1}$

  El pendent f' passa de signe positiu a negatiu en x = 1.

- Pel criteri del canvi de signe de la derivada:

  f té un màxim relatiu en x = 1

  perquè f passa de ser creixent a ser decreixent en aquest punt.

- Si en aquest exemple haguera ocorregut que en el punt singular, $\mathbf{f''(1)} > 0$, aleshores f' seria creixent en x = 1, que al combinar-ho amb $f'(1) = 0$, tindríem que f' passaria de ser negativa a ser positiva en x = 1, i hi hauria un mínim relatiu en x = 1.
- Què ocorre en un altre punt que no siga singular? Que no és candidat a màxim o mínim relatiu.

Considerem una funció f dues vegades derivable en x_0, tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$:

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ → **f té un mínim relatiu en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ → **f té un màxim relatiu en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ → **no podem assegurar res**

Exemple 6

La funció de l'exemple 4, $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ amb domini ℝ, té els següents punts singulars:

$$\mathbf{f'(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$$

Apliquem el criteri del signe de la segona derivada per a establir els extrems relatius:

Trobem la derivada segona de f: $\mathbf{f''(x) = 3x^2 - 2x - 1}$.

- Com que $\mathbf{f''(-1)} = 4 > \mathbf{0}$ → la funció assoleix un mínim relatiu en el punt $x = -1$
- Com que $\mathbf{f''(1) = 0}$ → el criteri no és concloent. Hem de recórrer al criteri anterior (exemple 4)

Exemple 7

Trobem els extrems relatius de les funcions $f(x) = x^3 - 3x$ i $g(x) = e^x$.

(A) $f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x$

Punts singulars: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$

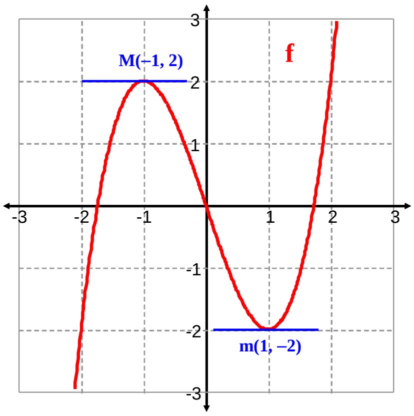
Criteri de la segona derivada:

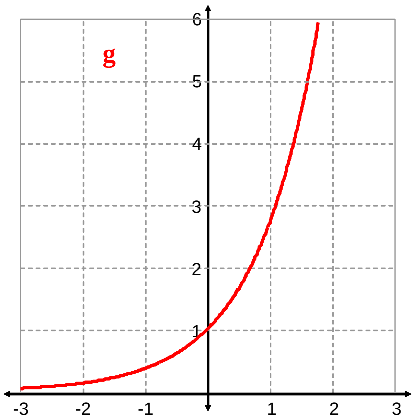
- $\mathbf{f''(-1)} = -6 < \mathbf{0}$ ⇒ en $x = -1$ la funció assoleix un màxim relatiu. Punt de la gràfica $(-1, 2)$.
- $\mathbf{f''(1)} = 6 > \mathbf{0}$ ⇒ en $x = 1$ la funció assoleix un mínim relatiu. Punt de la gràfica $(1, -2)$.

(B) $g(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g''(x) = e^x$

Punts crítics: $g'(x) = e^x = 0 \quad \Rightarrow$ no hi ha cap perquè $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Per tant no hi ha extrems relatius, la funció és sempre creixent ($g'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$).





6 Troba els extrems relatius de les funcions següents definides en ℝ, i també en [0, 5]:

(A) $f(x) = 2x + 3$ (B) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ (C) $f(x) = (x-2)^4 + 1$ (D) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

7 Troba el valor dels paràmetres m i n de la funció $f(x) = x^2 + mx + n$ perquè tinga un extrem relatiu en el punt $(4, -4)$.

4.4 Extrems absoluts d'una funció

Els extrems relatius d'una funció són els valors més grans (màxims) o més petits (mínims) que pren una funció en un determinat entorn. Ara ens preguntem pel major i menor valor que pren la funció però en tot el seu domini.

Considerem una funció f definida en un domini D_f. Diem que:

- ***f té un màxim absolut en*** $\mathbf{D_f}$ si

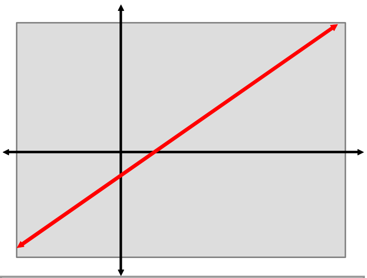
$$\exists \mathbf{x_M} \in \mathbf{D_f} \text{ tal que } \forall x \in D_f \text{ es verifica } \mathbf{f(x_M) \geq f(x)}$$

- ***f té un mínim absolut en*** $\mathbf{D_f}$ si

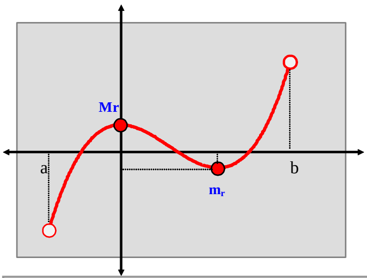
$$\exists \mathbf{x_m} \in \mathbf{D_f} \text{ tal que } \forall x \in D_f \text{ es verifica } \mathbf{f(x_m) \leq f(x)}$$

L'extrem absolut (màxim o mínim) és $\mathbf{f(x_0)}$, que direm **s'assoleix en** el punt $\mathbf{x_0}$.

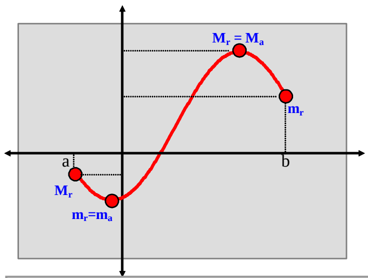
Des del punt de vista gràfic, l'extrem absolut serà un punt de la gràfica de f, $A(x_0, f(x_0))$, que ocuparà la posició més alta o més baixa de la gràfica. Vegem diferents situacions.



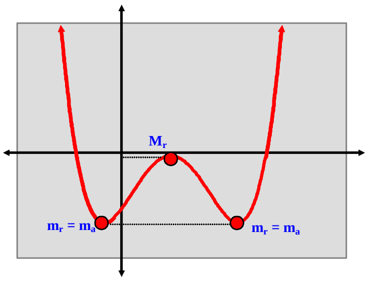
Domini: ℝ.
No posseeix extrems absoluts ni relatius.



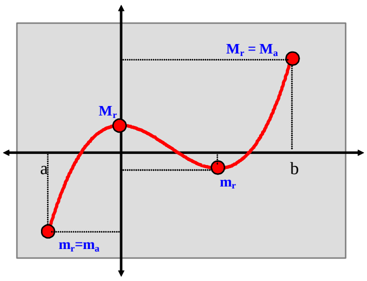
Domini:]a, b[.
No posseeix extrems absoluts.
Posseeix extrems relatius.



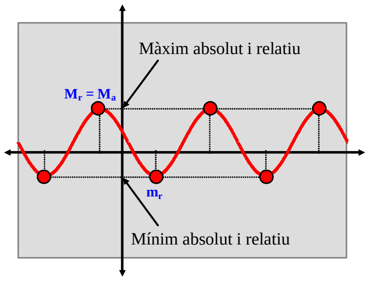
Domini: [a, b] .
Posseeix extrems absoluts i relatius (alguns coincideixen).



Domini: ℝ.
Idèntics mínims absoluts i relatius.
Posseeix màxim relatiu però no absolut.



Domini: [a, b] .
Posseeix extrems absoluts i relatius.
No coincideixen.



Domini: ℝ.
Posseeix extrems absoluts i relatius idèntics.

Observa que:

- El domini de la funció juga un paper important en l'existència d'extrems absoluts. **Si és un interval tancat i la funció és contínua sempre hi ha extrems absoluts**.
- Si hi ha extrems absoluts, coincideixen amb algun extrem relatiu, bé situat en l'interior del domini bé en els punts extrems del domini de la funció.

➢ Càlcul dels extrems absoluts

Considerem una funció f en el seu domini. Per a obtenir els extrems absoluts de f:

1 Trobem els extrems relatius $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ entre els punts singulars de f.

2 Si f és contínua i el domini és un interval tancat [a, b], sempre hi ha extrems absoluts:
- El **mínim absolut** de f és el menor dels valors $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.
- El **màxim absolut** de f és el major dels valors $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

3 Si el domini de f no és un interval tancat, els extrems absoluts es troben entre els relatius, **però només si** els límits de f, cap als extrems de l'interval (a, b, $-\infty$, $+\infty$) o cap a punts de discontinuïtat, **no invaliden aquests valors màxims o mínims**.

Exemple 8

Trobem els extrems absoluts de la funció $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ definida en l'interval $]-2, 3]$.

1 Trobem els extrems relatius existents en els punts singulars (els situats en $]-2, 3[$).

Les dues primeres derivades de f són $f'(x) = -x^2 + 2x$ i $f''(x) = -2x + 2$.

- Punts singulars de f:

$$f'(x) = -x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 0,\ x_2 = 2}$$

- Criteri del signe de la segona derivada:

$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ **en x = 0 s'assoleix un mínim relatiu el valor del qual és f(0) = 0**
$f''(2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ **en x = 2 s'assoleix un màxim relatiu el valor del qual és f(2) = 4/3**

2 El domini $]-2, 3]$ no és un interval tancat. Calculem el valor de f en x = 3, i el límit de f quan tendeix a -2 per la dreta:

$$f(3) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) = \frac{20}{3}$$

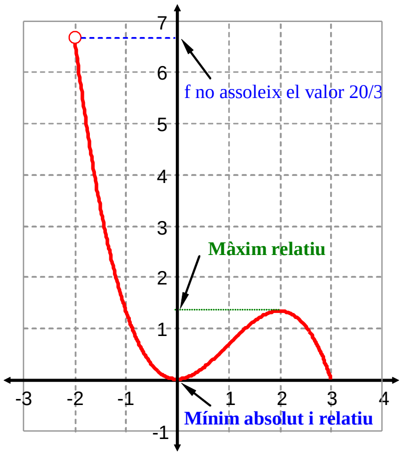
Comparem els extrems relatius de f amb els valors anteriors:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{20}{3} \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{4}{3} \qquad f(3) = 0$$

El **mínim absolut és 0**, menor imatge, que s'assoleix per a x = 0 i per a x = 3. (el mínim absolut i el relatiu coincideixen).

No existeix màxim absolut perquè al tendir a -2 les imatges s'acosten a 20/3, però no l'assoleixen.

Existeix màxim relatiu però no és absolut (punt 3).



8 Troba els extrems absoluts de les següents funcions definides en [0, 5] i també en]–1, 3[.
(A) $f(x) = -2x + 4$ (B) $g(x) = -3$ (C) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

9 Troba els extrems absoluts de la funció $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ definida en l'interval [0, 5], i també en l'interval [1, 4].

10 Troba els extrems absoluts de la funció $f(x) = x^4 + 32x$ definida en $\mathbb{R}$, i també en [–3, 2].

4.5 Problemes d'optimització

Exemple 9

Un molí produeix farina amb una funció de cost donada per $C(x) = 2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10$, on x reflexa les tones mètriques (tm) de farina produïda i C(x) el cost en centenars d'euros.
La producció màxima que pot aconseguir és de 7 tm.
El preu de venda (en centenars d'euros) per tona de farina és funció de la quantitat produïda

$$p(x) = 25 - 0.25x.$$

Trobem la quantitat de producció necessària que maximitze el benefici, i el valor d'aquest benefici.

Constitució de la funció que expressa el benefici obtingut dependent de la producció:

La funció de cost és

$$C(x) = 2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10 \quad \text{amb domini } [0, 7]$$

La funció d'ingressos és

$$I(x) = \text{preu per quantitat} = p(x) \cdot x = (25 - 0.25x) \cdot x = 25x - 0.25x^2, \quad \text{definida en } [0, 7]$$

La funció benefici és

$$\mathbf{B(x)} = I(x) - C(x) = 25x - 0.25x^2 - (2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10) = \mathbf{-2x^3 + 18x^2 - 30x - 10}, \quad \forall x \in [0, 7]$$

Optimització de la funció benefici:

(A) Extrems relatius entre els punts singulars:

Les dues primeres derivades són $B'(x) = -6x^2 + 36x - 30$ i $B''(x) = -12x + 36$.

- Punts singulars: $B'(x) = 0 \iff -6x^2 + 36x - 30 = 0 \iff \mathbf{x_1 = 1, \ x_2 = 5}$
- Criteri del signe de la segona derivada:

  $B''(1) = 24 > 0 \Rightarrow$ en x = 1 s'assoleix un mínim relatiu el valor del qual és $B(1) = -24$

  $B''(5) = -36 < 0 \Rightarrow$ en x = 5 s'assoleix un màxim relatiu el valor del qual és $B(5) = 40$

(B) Imatges dels extrems de l'interval del domini (també són extrems relatius):

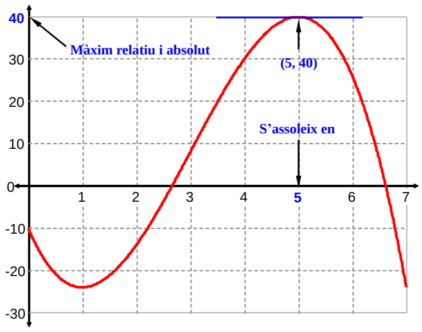
$$B(0) = -10 \qquad B(7) = -24$$

(C) El màxim absolut és el **major** de tots els relatius:

$B(0) = -10$ $\quad$ $B(7) = -24$ $\quad$ $B(1) = -24$ $\quad$ $\mathbf{B(5) = 40}$

Màxim benefici: 40 centenars d'euros (4 000 €).

S'assoleix per a x = 5 t de farina (5 000 kg).



11 Per a quina producció s'assoleix el mínim benefici (màximes pèrdues) en l'exemple anterior? En quin nivell de producció s'assoleix el mínim cost? i el màxim ingrés?

12 El compte de resultats, pèrdues o beneficis en milions d'euros, d'una empresa ve donat per la següent funció dels anys x d'existència de la mateixa:

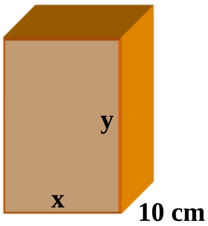
$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}, \quad x \geq 0$$

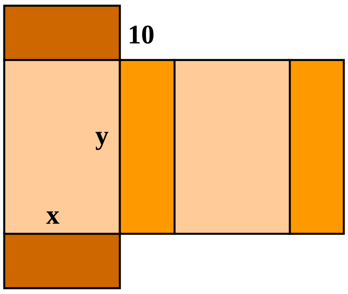
(A) A partir de quin any l'empresa deixa de tindre pèrdues?
(B) En quin moment l'empresa assoleix els màxims beneficis? A quant ascendeixen aquests?
(C) Descriu l'evolució del compte de resultats de l'empresa. Quins seran els beneficis a molt llarg termini?

Exemple 10

Un fabricant de "bricks" de llet i sucs, **d'un litre de capacitat**, vol minimitzar el cost de material emprat en la seua elaboració. Trobem les dimensions dels brikcs si un estudi revela que la seua profunditat, per a ajustar-se a les mesures dels estants existents en la majoria de les neveres, ha de ser de 10 cm.

Minimitzar el cost passa per minimitzar l'àrea emprada en la producció de l'envàs. Per simplificar ometrem les parts necessàries per a l'encolat.





Constitució de la funció que expressa l'àrea de l'envàs.

Si anomenem x i y a les longituds (en centímetres) dels costats de la cara frontal, la superfície emprada és la funció de dues variables x i y:

$$\mathbf{S} = S(x, y) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x = \mathbf{2xy + 20y + 20x}$$

A més tenim la condició imposada pel volum, que ha de ser d'un litre o 1000 cm^3:

$$\mathbf{V = 1000} \quad \rightarrow \quad 10 \cdot x \cdot y = 1000 \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{100}{x}}$$

Substituint la y en la funció S tenim que l'àrea depèn només de x:

$$\mathbf{S(x) = 200 + \frac{2000}{x} + 20x \quad \forall x \in]0, +\infty[}$$

Obtenció del mínim absolut de S(x) en [0, +∞[:

(A) Punts crítics de S(x). La primera derivada és $S'(x) = -\dfrac{2000}{x^2} + 20$.

$$S'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2000}{x^2} + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 10}$$

Intervals	]0, 10[	]10, +∞[
Signe S'	–	+
S(x)	↓	↑

→ S(x) té un mínim relatiu en x = 10.

(B) Mínim absolut: com que S(x) és contínua, decreix en]0, 40[i creix en]40, +∞[, és evident que el mínim relatiu és també absolut.

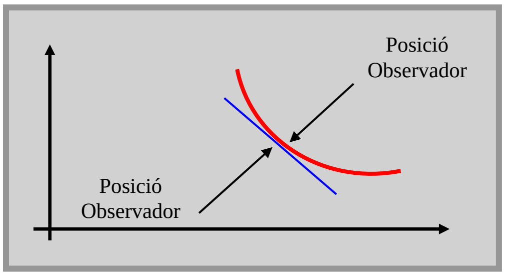
Les mesures de l'envàs són **x = 10 cm**, **y = 10 cm** i la superfície mínima és **S(10) = 600 cm²**.

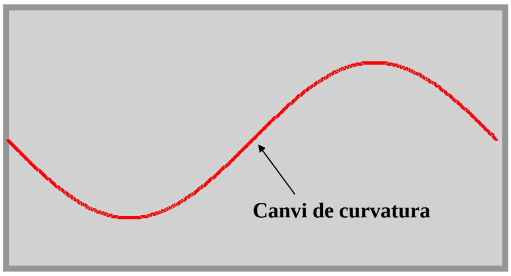
13 Una empresa fabrica maquinetes d'afaitar amb un cost, en euros, donat per la expressió C(x) = 0.3x + 3000, sent x el nombre de maquinetes demandades. El preu de venda depèn del nombre de maquinetes i ve donat per la funció p = p(x) = 12 – 0.006x. Si el benefici és ingressos menys costs, i els ingressos són demanda per preu, troba el preu que maximitze els beneficis de l'empresa. A quant ascendeix?

14 Volem cercar una parcel·la rectangular de 2400 m^2 d'àrea. El costat de la parcel·la que llinda amb la carretera es farà amb material de qualitat, que resulta a 30 € el metre de longitud, mentre que els altres tres costats es faran amb material d'inferior qualitat, que resulta a 15 € el metre. Obtén les longituds dels costats de la parcel·la perquè les despeses en el cercat siguen mínimes, i el valor d'aquestes mínimes despeses.

4.6 Curvatura

Una lent de contacte situada entre dos observadors presenta diferent forma, ***còncava*** i ***convexa***, per a cadascun d'ells. De la mateixa manera, la visualització gràfica d'un màxim i d'un mínim relatius presenten curvatures diferents, segons d'on mirem. Es requereix per tant d'establir un sistema de referència per a definir aquestes característiques.





A més, els punts en què canvia el tipus de curvatura d'una gràfica reben el nom de ***punts d'inflexió***.

El sistema de referència que s'utilitza en general en les Ciències Socials, i en particular en les Econòmiques, és l'origen de coordenades (perquè habitualment les funcions utilitzades es representen únicament en el primer quadrant).

No obstant, en alguns tipus de funcions presenta problemes, per la qual cosa utilitzem el sistema habitual de les Ciències Naturals: **l'observador està situat en la part més alta de l'eix OY**.

Recordem que l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció f en x_0 és:

$$\mathbf{t: y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Considerem una funció f qualsevol i un punt x_0 en què és derivable.

- Diem que **f és *còncava en* $\mathbf{x_0}$** si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en el qual la gràfica de f està representada per damunt de la recta tangent en x_0, és a dir

$$\mathbf{f(x) > T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \;\; \mathbf{x \neq x_0}$$

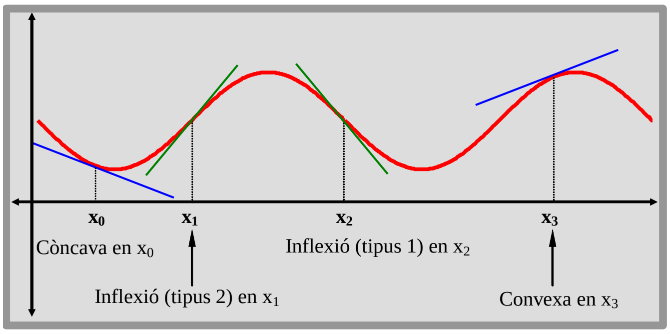
- Diem que **f és *convexa en* $\mathbf{x_0}$** si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en el qual la gràfica de f està representada per davall de la recta tangent en x_0, és a dir,

$$\mathbf{f(x) < T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \;\; \mathbf{x \neq x_0}$$

- Diem que **f té una *inflexió en* $\mathbf{x_0}$** si en tot entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, la recta tangent en x_0 travessa la gràfica de la funció. Succeeix en dues situacions:

(1) $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$

(2) $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$



Exemple 11

Donada una funció f, anomenem pendent de la gràfica de f en x_0 al pendent de la recta tangent a aquesta gràfica en x_0. Per tant, la funció $m(x) = f'(x)$ proporciona el pendent de la corba en cada punt.

Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ amb domini $\mathbb{R}$, contestem a les següents preguntes:

(A) Expressió general del pendent de la gràfica de f en x.
(B) Per a quins valors de x el pendent augmenta? I disminueix?
(C) Quin és el major pendent de la corba? I el menor? En quins punts s'assoleix?

(A) El pendent de la corba en x és la derivada de f en x: $\mathbf{m(x) = f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}}$.

(B) Estudiem els intervals de creixement del pendent m(x). Per a això, obtenim la seua derivada, que és la segona derivada de f. **El creixement del pendent de f s'estudia amb la segona derivada**:

$$\mathbf{m'(x) = f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}}$$

Estudiem els intervals de creixement del pendent m(x). Els punts singulars són les solucions de:

$$\mathbf{m'(x) = 0} \iff \mathbf{f''(x) = 0} \iff \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \iff 1-3x^2 = 0 \iff \mathbf{x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}, \mathbf{x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Considerem els intervals $\left]-\infty, x_1\right[$, $\left]x_1, x_2\right[$ i $\left]x_2, +\infty\right[$.

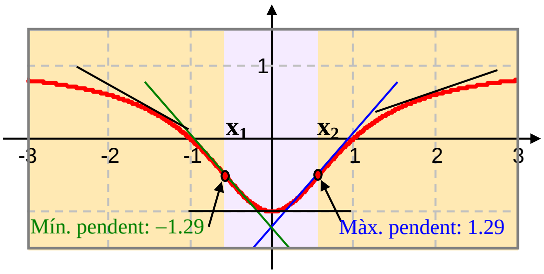
En $\left]-\infty, x_1\right[$ considerem x = –2: $\mathbf{m'(-2) = -0.35 < 0}$ $\Rightarrow$ **m = f' és decreixent en** $\left]-\infty, x_1\right[$

En $\left]x_1, x_2\right[$ considerem x = 0: $\mathbf{m'(0) = 4 > 0}$ $\Rightarrow$ **m = f' és creixent en** $\left]x_1, x_2\right[$

En $\left]x_2, +\infty\right[$ considerem x = 2: $\mathbf{m'(2) = 0.35 > 0}$ $\Rightarrow$ **m = f' és decreixent en** $\left]x_2, +\infty\right[$

Intervals	$]-\infty, x_1[$	$]x_1, x_2[$	$]x_2, +\infty[$
Signe m'	–	+	–
Pendent m	↓	↑	↓

Canvi de signe de m': **Sí** **Sí**



(C) **En** $\mathbf{x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **s'assoleix un mínim relatiu del pendent m(x) amb valor** $\mathbf{m(x_1) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

En $\mathbf{x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **s'assoleix un màxim relatiu del pendent m(x) amb valor** $\mathbf{m(x_2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Són el menor i major pendent de la corba, com veiem en la gràfica, i s'han obtingut en els punts en què el pendent passa de créixer a decréixer. Observa que:

- El creixement del pendent equival a curvatura còncava.
- El decreixement del pendent equival a curvatura convexa.
- Els punts de màxim i mínim pendent són a més els punts d'inflexió de la corba.

15 Donada la funció $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, obtén:
(A) El conjunt de punts on el pendent de la gràfica augmenta.
(B) El conjunt de punts on el pendent de la gràfica disminueix.
(C) Els punts on aquest pendent passa d'augmentar a disminuir.

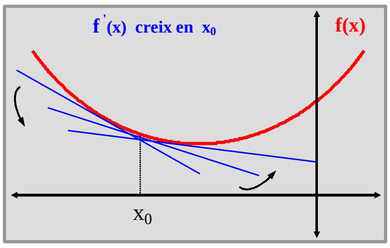
➢ Propietat 3: condicions suficients de curvatura

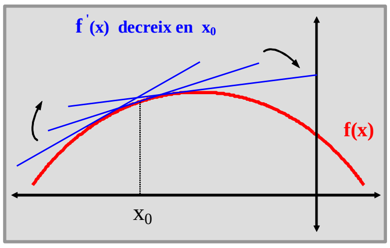
Considerem una funció f dues vegades derivable en x_0.

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ → **f és còncava en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ → **f és convexa en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ → **no podem assegurar res**

Recordem que la segona derivada f'' estudia el creixement de la primera derivada f', aleshores:

- Si en un punt x_0 tenim que $f''(x_0) > 0$, per la propietat 1, la funció f' és creixent en x_0, és a dir, el pendent de la corba augmenta. Açò només ocorre en el cas de ser un punt on la funció és còncava.
- Si en un punt x_0 tenim que $f''(x_0) < 0$, per la propietat 1, la funció f' és decreixent en x_0, és a dir, el pendent de la corba disminueix. Açò només succeeix en el cas de ser un punt on la funció és convexa.





- Si en un punt x_0 tenim que $f''(x_0) = 0$, aleshores **x_0 és un punt singular de la funció $f'(x)$**, i no podem assegurar res del creixement d'aquesta funció en qüestió (f' en aquest cas) i, per tant, no assegurem res sobre la curvatura de f.

Exemple 12

Estudiem la curvatura de la funció $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - 2x^2 + \frac{16}{3}x - 3$ amb domini en els punts $x_0 = 1, 2, 3$ i 4.

Trobem les dues primeres derivades de f:

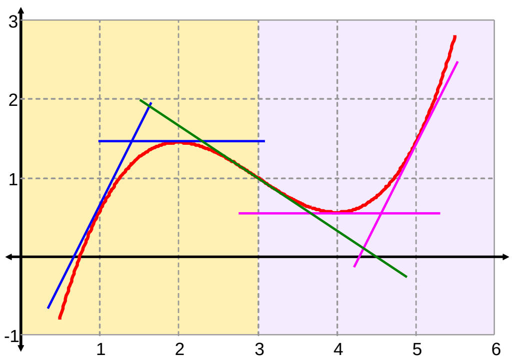
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{16}{3} \qquad f''(x) = \frac{4}{3}x - 4$$

$$f''(1) = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f és convexa en } x = 1$$

$$f''(2) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f és convexa en } x = 2$$

$f''(3) = 0$ i la propietat 3 no ens assegura res, encara que en aquest cas hi ha una inflexió.

$$f''(4) = \frac{4}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f és còncava en } x = 4$$



16 Estudia la curvatura de les següents funcions en els punts indicats:

(A) $f(x) = x^4 - x^3$ en els punts $x = -2, 0, 1$ i 2.

(B) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en els punts $x = -2, 0$ i 2.

➢ Intervals de concavitat i convexitat d'una funció

Igual que passava amb l'estudi del creixement de la funció, l'estudi puntual de la curvatura no és la solució ideal, es requereix l'estudi per intervals.

Considerem una funció f definida en el seu domini:

1 Trobem els punts singulars de f'. Els suposem ordenats: $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

2 La recta real queda dividida pels punts singulars en els intervals:

$$]a, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ ]x_2, x_3[,\ \dots,\ ]x_n, b[, \qquad \text{on a pot ser } -\infty \text{ i b pot ser } +\infty$$

En l'interior dels intervals anteriors no hi ha punts singulars, per tant f'' té signe constant en cada interval. S'anomenen ***intervals de concavitat i convexitat*** de la funció.

3 Elegim un punt x de l'interior de cada interval. Si $f''(x) > 0$, aleshores f és còncava en l'interval. Si $f''(x) < 0$, aleshores f és convexa en l'interval.

4 Si en dos intervals contigus la funció canvia de tipus de curvatura, aleshores en el punt singular que els separa hi ha una inflexió (sempre que f siga derivable en aquest punt).

Exemple 13

Trobem els intervals en què la funció $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ és còncava o convexa.

En primer lloc f és derivable en ℝ totes les vegades que necessitem i

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x \qquad f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

- Trobem els punts singulars de f', que són les solucions de l'equació

$$f''(x) = 0 \iff 4e^{2x} - 4e^x = 0 \iff 4e^x(e^x - 1) = 0 \iff e^x = 1 \iff \mathbf{x = 0}$$

- Considerem els intervals $]-\infty, 0[$ i $]0, +\infty[$, que no contenen cap punt singular, i estudiem el signe de la segona derivada en cadascun d'ells:

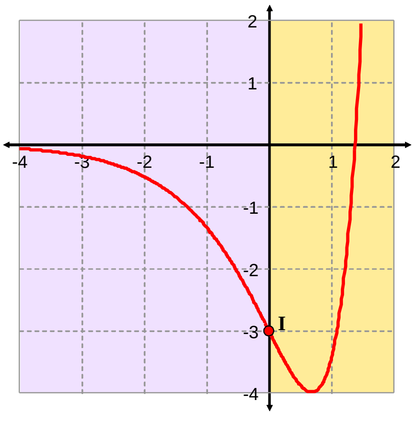
En **]–∞, 0[** considerem x = –1: $\mathbf{f''(-1) = -0.388 < 0}$ ⇒ **f és convexa en]–∞, 0[**
En **]0, +∞[** considerem x = 1: $\mathbf{f''(1) = 48.239 > 0}$ ⇒ **f és còncava en]0, +∞[**

En x = 0 canvia la curvatura i f és derivable, per tant tenim un **punt d'inflexió**.

Se situa en el punt de la gràfica I(0, f(0)) = **I(0, –3)**.

Intervals	**]–∞, 0[**	**]0, +∞[**
Signe f''	–	+
f	**Convexa**	**Còncava**

Inflexió
(0, –3)



17 Troba els intervals de concavitat i convexitat de les següents funcions:

(A) $f(x) = x^5$ (B) $f(x) = e^x - e^{-x}$ (C) $f(x) = x\,e^x$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (E) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ (F) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Teorema: condició necessària de punt d'inflexió

Considerem una funció f dues vegades derivable en x_0:

Si **f té un punt d'inflexió en x_0** $\Rightarrow$ **$f''(x_0) = 0$**

Aquesta propietat es deriva del fet que si f té un punt d'inflexió en x_0, aleshores canvia la seua curvatura en x_0, per la qual cosa el pendent $m(x) = f'(x)$ de la corba passa de créixer a decréixer, o al revés. Per tant, $m = f'$ té en x_0 un màxim o un mínim relatiu, i per la propietat 2, aplicada a $m = f'$, la seua derivada és nul·la:

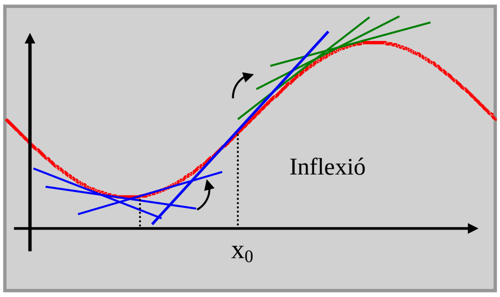
$$\mathbf{m'(x_0) = f''(x_0) = 0}$$

Per tant els únics punts del domini d'una funció f (sempre que siga 2 vegades derivable) en què es pot presentar un punt d'inflexió són **les solucions de l'equació $f''(x) = 0$.**

Teorema: criteri de la tercera derivada

Considerem una funció f derivable 3 vegades en x_0.

Si **$f''(x_0) = 0$** i **$f'''(x_0) \neq 0$** $\Rightarrow$ **f té un punt d'inflexió en x_0**



- Si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) < 0$, aleshores la funció f' té un màxim relatiu en x_0, per la qual cosa f' passa de ser decreixent a ser creixent, és a dir, f canvia el seu tipus de curvatura en x_0, i per tant hi ha inflexió.
- Si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) > 0$, f' passa de ser creixent a ser decreixent, i també hi ha una inflexió.

Exemple 14

Estudiem el tipus de curvatura de les funcions $f(x) = (x-2)^3$ i $g(x) = (x-2)^4$ en el punt x = 2.

(A) Obtenim les 3 primeres derivades de f: $f'(x) = 3(x-2)^2$, $f''(x) = 6(x-2)$, $f'''(x) = 6$.

Com que $f''(2) = 0$ i $f'''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ f té una inflexió en x = 2

(B) Obtenim les 3 primeres derivades de g: $g'(x) = 4(x-2)^3$, $g''(x) = 12(x-2)^2$, $g'''(x) = 24(x-2)$.

Com que $g''(2) = 0$ i $g'''(2) = 0$, desconeixem si en x = 2, g és còncava, convexa, o té una inflexió.

Recorrem en aquest cas a estudiar la curvatura per intervals. L'únic punt singular de g'' és x = 2.

Tenim dos intervals, $]-\infty, 2[$ i $]2, +\infty[$ on el signe de g'' és constant:

Com que $g''(1.9) = 0.12 > 0 \Rightarrow$ g és còncava en $]-\infty, 2[$
Com que $g''(2.1) = 0.12 > 0 \Rightarrow$ g és còncava en $]2, +\infty[$

Com que la curvatura no varia en x = 2, no és un punt d'inflexió. La funció és sempre còncava. A més, el que tenim en x = 2 és un mínim de g, com podem comprovar si estudiem els intervals de creixement i decreixement de g.

➢ Punt de rendiments decreixents: Màxima eficiència

Exemple 15

Un operari d'una empresa treballa 10 hores diàries. La funció que reflexa el nombre total de quintars mètrics (1 Qm = 500 kg) de producte que elabora, en funció del temps, és:

$$f(t) = -\frac{1}{50}\left(t^3 - 15t^2\right) \qquad \text{definida per a } t\in[0, 10]$$

Després de les dues primeres hores de treball el nombre de quintars elaborats és $f(2) = 1.04$ Qm (520 kg) i després de les primeres quatre, $f(4) = 3.52$ Qm (1760 kg). El nombre mitjà de quintars mètrics elaborats en els intervals [0, 2] i [2, 4] és la variació mitjana en aquests intervals:

$$\mathbf{VM_{[0,\,2]}} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \mathbf{0.52\ Qm/h} \qquad\qquad \mathbf{VM_{[2,\,4]}} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \mathbf{0.88\ Qm/h}$$

És per tant més eficient en el segon interval. **L'eficiència o ritme que porta en cada instant de temps** es mesura amb la variació instantània (derivada en el moment considerat). El ritme de treball a les 2 i a les 4 hores és

$$f'(t) = -\frac{1}{50}\left(3t^2 - 30t\right) \quad\rightarrow\quad \mathbf{f'(2) = 0.96\ Qm/h} \ \text{ i } \ \mathbf{f'(4) = 1.44\ Qm/h}$$

És per tant més eficient en l'instant t = 4 que en t = 2; però en quin instant de la seua jornada ho és més?
L'eficiència o ritme serà màxima en l'instant t en el qual s'assoleix el màxim absolut de la funció $f'(t)$:

- $f''(t) = 0 \quad\rightarrow\quad -\frac{1}{50}(6t-30) = 0 \quad\rightarrow\quad \mathbf{t = 5}$ (únic punt singular de f')
- El màxim absolut de f' s'assolirà en $t = 5$ (major valor entre les imatges de 0, 5 i 10):

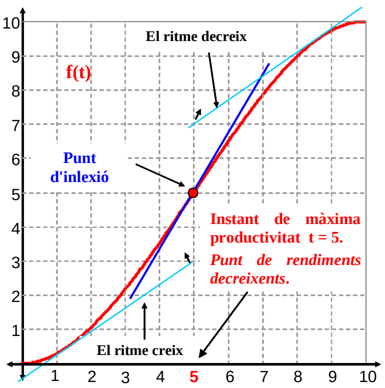
$f'(0) = 0$ Qm/h $\qquad$ **$f'(5) = 1.5$ Qm/h (màxima eficiència)** $\qquad$ $f'(10) = 0$ Qm/h

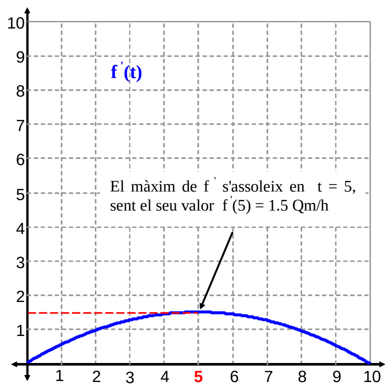
El signe de la segona derivada ens indica els instants en què la eficiència f' augmenta o disminueix:

Intervals	[0, 5[	]5, 10]
Signe f''	+	–
f' i f	↑ i còncava	↓ i convexa

En [0, 5] tenim que f' creix mentre que en [5, 10] f' decreix; en $t = 5$ s'assoleix la màxima eficiència o ritme de treball. Des d'aquest instant, el ritme disminueix (no així la producció, que sempre augmenta).

En t = 5 la funció f té un punt d'inflexió i f' el seu valor màxim. Així aquesta inflexió de f indica el punt en què **l'eficiència o rendiment f' començarà a disminuir**: és el ***punt de rendiments decreixents***.





18 Un excursionista realitza una excursió de 13 hores. L'espai que recorre (en km), dependent del temps (en hores), s'expressa per la funció $f(t) = -0.1t^3 + 1.8t^2 + 4t$. En quin moment s'assoleix el punt de rendiments decreixents? Quin significat té? Quin és el màxim recorregut realitzat?

4.7 Representació gràfica de funcions

Exemple 16

Representem la funció polinòmica $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 8$ definida en ℝ.

Les funcions polinòmiques són contínues en ℝ, per la qual cosa no tenen asímptotes verticals. Tampoc tenen asímptotes horitzontals ni obliqües (excepte les de graus 0 i 1, que són rectes) perquè

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

Són funcions derivables en ℝ i per això l'estudi de les equacions

(1) $f(x) = 0$ **(2) $f'(x) = 0$** **(3) $f''(x) = 0$**

proporciona els talls amb l'eix OX (1), els possibles extrems relatius (2) i les possibles inflexions (3).

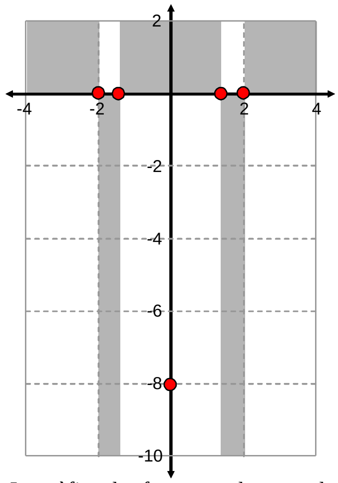
(1) $\mathbf{f(x) = 0} \rightarrow -x^4 + 6x^2 - 8 = 0 \rightarrow \mathbf{x = \pm 2, \pm\sqrt{2}}$

Els talls amb l'eix són **(–2, 0), (–$\sqrt{2}$, 0), ($\sqrt{2}$, 0)** i **(2, 0)**.

Estudiem el signe de la funció en els intervals en què els anteriors punts de tall divideixen la recta real:

Intervals	$]-\infty, -2[$	$]-2, -\sqrt{2}[$	$]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$	$]\sqrt{2}, 2[$	$]2, +\infty[$
Signe f	–	+	–	+	–

A més, el tall amb l'eix OY és (0, f(0)), és a dir, **(0, –8)**.



La gràfica de f passa pels punts de tall marcats, però no ho fa per les regions ombrejades.

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \rightarrow -4x^3 + 12x = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0, \pm\sqrt{3}}$

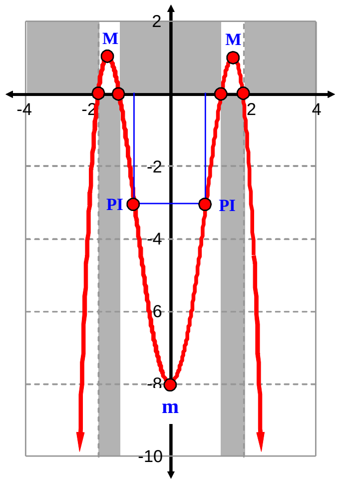
Intervals	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}, 0[$	$]0, \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
Signe f'	+	–	+	–
f	↑	↓	↑	↓

Màxim **M(–$\sqrt{3}$,1)** Mínim **m(0, –8)** Màxim **M($\sqrt{3}$, 1)**

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \rightarrow -12x^2 + 12 = 0 \rightarrow \mathbf{x = \pm 1}$

Intervals	$]-\infty, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, +\infty[$
Signe f''	+	–	+
f	Convexa	Còncava	Convexa

Inflexió **PI(–1, –3)** Inflexió **PI(1, –3)**



19 Representa gràficament les funcions polinòmiques següents:

(A) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2}{10}$ (B) $f(x) = \dfrac{x^5 + 5x^3}{10}$ (C) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 30}{10}$ (D) $f(x) = \dfrac{x^6 - 16x^2}{10}$

Exemple 17

Representem la funció racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ definida en $\mathbb{R}$.

Als passos indicats en l'exemple anterior, afegim el càlcul d'asímptotes.

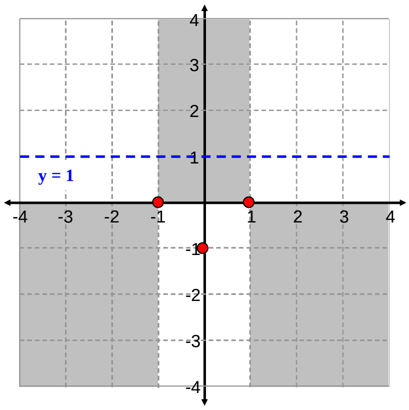
- No hi ha **asímptotes verticals** ja que el denominador no s'anul·la per a cap valor de la variable x.
- Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \quad \rightarrow$ la recta **y = 1** és **asímptota horitzontal bilateral**

Les derivades són $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ i $f''(x) = \dfrac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(1) $\mathbf{f(x) = 0} \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{x = -1, 1}$

Talls amb l'eix OX: **(–1, 0)** i **(1, 0)**.

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f	+	–	+



Talls amb l'eix OY és (0, f(0)), és a dir, **(0, –1)**.

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \rightarrow 4x = 0 \rightarrow$ **x = 0 (punt singular)**.

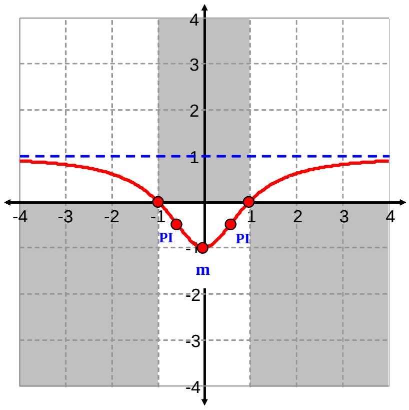
Intervals	]–∞, 0[	]0, +∞[
Signe f '	–	+
f	↓	↑

Mínim
m(0, –1)

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \rightarrow -12x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Intervals	$\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$
Signe f ''	+	–	+
f	Convexa	Còncava	Convexa

Inflexió $\mathbf{PI}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ Inflexió $\mathbf{PI}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$



20 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ (B) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ (C) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Exemple 18

Una determinada població creix, en un interval de 700 anys, seguint una expressió del tipus:

$$f(x) = \frac{5}{1+e^{-2x+6}} + 1 \quad \forall x \in [0, 7]$$

on x ve mesurat en centenars d'anys i f(x) en milions de persones. Representem gràficament aquesta funció coneguda per ***exponencial de creixement frenat*** (també per ***corba logística***).

- **No hi ha asímptotes verticals** perquè el denominador no s'anul·la per a cap valor de la variable x.
- **No hi ha asímptotes horitzontals**, perquè el domini de f només és l'interval [0, 7] (si el domini fora $\mathbb{R}$, aleshores hi haurien dues asímptotes horitzontals, les rectes $y = 1$ i $y = 6$, com s'intueix en la gràfica).

Les derivades són $f'(x) = \dfrac{10\,e^{-2x+6}}{\left(1+e^{-2x+6}\right)^2}$, $\forall x \in]0, 7[$ i $f''(x) = \dfrac{20\,e^{-2x+6}\left(e^{-2x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-2x+6}\right)^3}$, $\forall x \in]0, 7[$.

(1) L'equació **f(x) = 0** no té solució, per tant no hi ha punts de tall amb l'eix OX

$$f(x) = 0 \iff \frac{5}{1+e^{-2x+6}} = -1 \iff 1 + e^{-2x+6} = -5 \iff e^{-2x+6} = -6$$

que és impossible, perquè la funció exponencial és sempre positiva.

Intervals	[0, 7]
Signe f	+

El punt de tall amb l'eix OY és (0, f(0), és a dir, **(0, 1.012)** (aproximadament).

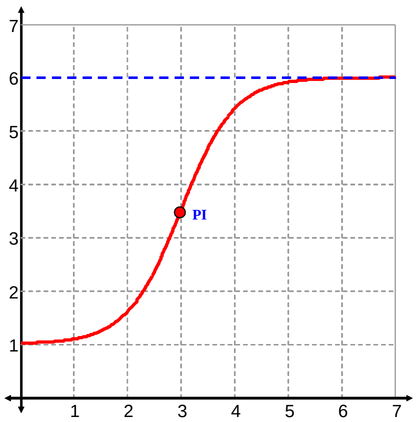
(2) $f'(x) > 0 \rightarrow$ **no existeixen punts crítics. No hi ha extrems relatius.**

Intervals	]0, 7[
Signe f '	+
f	↑

(3) $f''(x) = 0 \rightarrow e^{-2x+6} - 1 = 0 \rightarrow e^{-2x+6} = 1 \rightarrow$
$\rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow$ **x = 3**

Intervals	] 0, 3[	]3, 7[
Signe f ''	–	+
f	Còncava	Convexa

Inflexió
PI(3, 3.5)



21 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (B) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x - 3$ (C) $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ (D) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

Problemes del capítol 4

1 Estudia el creixement de les següents funcions en els punts $x = -2$, 2 i 4:

$f(x) = x^2 + x$ $\quad g(x) = \ln(x + 5)$ $\quad h(x) = \sqrt{x+3}$ $\quad t(x) = e^{2x+1}$ $\quad p(x) = 5$

2 Obtén els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

(A) $f(x) = x + 2$ $\quad g(x) = x^3 - 4x$ $\quad h(x) = x^2 - 3x - 10$ $\quad t(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

(B) $f(x) = \ln(x - 5)$ $\quad g(x) = \sqrt{x-3}$ $\quad h(x) = e^{3x-6}$ $\quad t(x) = x^4 - x^2$

3 La velocitat que porta un motorista en cada instant, durant les 8 hores de recorregut, ve donada per la funció $v(x) = -6x^2 + 72x$. Troba els intervals en què va augmentant i disminuint la velocitat. En quins intervals incrementa i disminueix l'acceleració?

4 Obtén els extrems relatius de les funcions següents:

(A) $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2$ $\quad g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ $\quad h(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4$

(B) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ $\quad g(x) = (x + 2)^4$ $\quad h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $\quad t(x) = (x + 3)^5$

(C) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad h(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$ $\quad t(x) = \dfrac{1}{2^x+1}$

5 Comprova el tipus de curvatura de les funcions del problema 1 en els punts indicats.

6 Obtén els intervals de concavitat i convexitat de les funcions:

(A) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad$ (B) $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2$ $\quad$ (C) $f(x) = \dfrac{9x}{x^2+2}$ $\quad$ (D) $f(x) = \dfrac{10}{1+e^{-2x+4}}$

7 Representa gràficament les funcions dels problemes 2, 4 i 6. En algunes d'elles és necessari que calcules les seues asímptotes.

8 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions en els intervals indicats:

(A) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ en $[-1, 3]$. $\quad$ (B) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ en $[-1, 2]$.

(C) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $]-2, 2[$. $\quad$ (D) $g(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$ en $[-1, 3[$.

9 Donada la funció $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$, es demana:

(A) Intervals de creixement i decreixement.
(B) Màxims i mínims relatius, i valor de x on s'assoleixen.
(C) Màxim i mínim absolut de f en tot el seu domini, si en té.

10 Donada la funció $f(x) = (x^2 + x)^2$, es demana:

(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Intervals de creixement i decreixement.
(C) Màxims i mínims locals.
(D) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

11 Donada la funció $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$, es demana:

(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Intervals de creixement i decreixement.
(C) Màxims i mínims locals.
(D) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

12 Donada la funció $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$, es demana:

(A) Punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Hi ha màxim absolut? I mínim absolut? En cas afirmatiu, quin és eixe valor?
(D) Intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(E) Representació gràfica.

13 Donada la funció $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement.
(B) Punts de la gràfica on es troben els màxims i els mínims relatius.
(C) Intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(D) Representació gràfica aproximada.

14 Donada la funció $f(x) = x^4 - 4x^3$, es demana:
(A) Punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Hi ha màxim absolut? I mínim absolut? En cas afirmatiu, quin és eixe valor?
(D) Intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(E) Representació gràfica.

15 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15}$, es demana:
(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Equació de les seues asímptotes verticals i horitzontals.
(C) Intervals de creixement i decreixement.
(D) Màxims i mínims relatius.
(E) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

16 Donada la funció $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$, es demana:
(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Equació de les seues asímptotes verticals i horitzontals.
(C) Intervals de creixement i decreixement.
(D) Màxims i mínims locals.
(E) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

17 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$, es demana:
(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Equació de les seues asímptotes verticals i horitzontals.
(C) Intervals de creixement i decreixement.
(D) Màxims i mínims relatius.
(E) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

18 Donada la funció $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 1}$, es demana:
(A) El seu domini i punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Equació de les seues asímptotes verticals i horitzontals.
(C) Intervals de creixement i decreixement.
(D) Màxims i mínims relatius.
(E) Representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

19 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, es demana:
(A) El seu domini i l'equació de les seues asímptotes.
(B) Intervals de creixement i decreixement.
(C) Màxims i mínims relatius.

20 Comprova que les següents funcions definides a trossos són derivables en els punts de connexió i troba els intervals de creixement i decreixement, extrems relatius, i els intervals de concavitat i convexitat (actua en cada branca com si es tractara d'una funció diferent).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6x - \dfrac{27}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq -1 \\ 4x^2 + 6x & \text{si } x < -1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

21 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$:

(A) Estudia la continuïtat i derivabilitat de f(x) en el seu domini, i obtén la funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement de f(x).
(C) Calcula els màxims i mínims locals de f(x).

22 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x^2 - 3x - 8 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a per al qual f és contínua en [2, 7].
(B) Per a eixe valor de a, obtén els intervals de creixement i decreixement de f.
(C) Per a eixe valor de a, obtén el mínim i el màxim absolut de f en [2, 7], i el valor de x on s'assoleixen.

23 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$:

(A) Estudia la continuïtat de f en l'interval [−2, 5].
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement de f.
(C) Calcula els màxims i mínims absoluts de f en l'interval [−2, 2].
(D) Calcula els màxims i mínims absoluts de f en l'interval [–2, 5].

24 Obtén un nombre positiu que sumat amb 25 vegades el seu recíproc resulte un valor mínim.

25 Volem construir dues parcel·les rectangulars iguals i adossades, que comparteixen una paret comuna, cadascuna amb un àrea de 300 m^2. Obtén les dimensions de cada parcel·la si la tanca amb què les voregem val 10 € el metre lineal, i volem que les despeses siguen mínimes. Obtén el valor d'aquestes despeses mínimes.

26 La suma de les 12 arestes d'un prisma recte de base quadrada és 60 cm. Troba les dimensions que hauran de tenir perquè el volum siga màxim.

27 Troba les dimensiones d'un pot cilíndric de refresc d'un litre de capacitat perquè es faça amb la menor quantitat possible de material.

28 De tots els terrenys rectangulars de 900 m^2 de superfície, quin és el que necessitarà menor nombre de metres de tanca?

29 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, que passa pel punt A(2, 4), tinga extrems relatius en x = –2 i en x = 2.

30 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tinga una inflexió de tangent horitzontal en el punt A(1, 0).

31 Obtén una funció polinòmica de grau 3 sabent que passa pels punts A(–1, 0) i B(1, 2) i té un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = 2.

32 Troba una funció polinòmica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabent que passa pel punt A(1, 0), i en el punt B(–1, 2) presenta una inflexió.

33 Una fulla de paper ha de contenir 200 cm^2 reservats per a text. Si els marges superior i inferior són de 2 cm i els laterals d'1 cm, quines dimensions ha de tenir la fulla per a utilitzar la menor quantitat de paper possible?

34 Una piscina en forma de paral·lelepípede rectangular de base quadrada té un àrea de 192 m^2. Troba les longituds de les seues arestes perquè el volum d'aigua continguda siga màxim.

35 Una màquina no pot produir més de 100 kg de sacarina, en un determinat període de temps. La funció de costs totals és $C(x) = -0.2x^2 + 50x + 100$, on x representa la quantitat de kilograms produïts, i C(x) els costs en euros. Un bon client de l'empresa paga un preu, en funció de la quantitat comprada, que ve donat per la funció $p(x) = 60 - 0.3x$. Calcula la quantitat x de kg de sacarina que convé fabricar per a maximitzar el benefici. Quin és aquest benefici?

36 Si la funció $P(t) = -t^4 + 150t^2$ proporciona la quantitat emmagatzemada, en quilograms, d'un producte en l'instant de temps t, en hores, d'una jornada laboral de 8 hores, calcula:
(A) El nombre de quilograms emmagatzemats en les 2 primeres hores i també en les 6 primeres hores.
(B) El nombre de quilograms emmagatzemats entre la 2a i la 6a hora.
(C) El nombre mitjà de quilograms emmagatzemats en l'anterior interval de temps.
(D) El ritme d' emmagatzematge en els instants t = 3, t = 4 i t = 5.
(E) En quins moments de la seua jornada laboral augmenta l'emmagatzematge? Per què?
(F) En quins moments de la seua jornada laboral augmenta el ritme d' emmagatzematge?
(G) Quan és el ritme d'emmagatzemament màxim?

37 Una agència proposa un viatge conjunt a 60 persones, al preu de 200 euros per persona. Amb la fi d'obtenir major nombre de clients, per cada viatger addicional als inicialment proposats, redueix en 2 euros el preu del viatge per a cada persona.
(A) Si van 10 viatgers més, quins ingressos tindrà l'agència? Li convé que vagen 10 més?
(B) Expressa els ingressos de l'agència en funció del nombre addicional x de viatgers.
(C) Obtén fins quin nombre addicional de viatgers els ingressos de l'agència creixen.
(D) Obtén els màxims ingressos que pot tenir l'agència, i el nombre de viatgers per al qual s'obtenen.

38 Una empresa disposa de 15 comercials que proporcionen uns ingressos per vendes de 5750 euros mensuals cadascun. Es calcula que per cada nou comercial que contracte l'empresa, els ingressos de cadascun disminueixen en 250 euros. Calcula:
(A) Els ingressos mensuals de l'empresa proporcionats pels 15 comercials.
(B) Els ingressos mensuals de l'empresa si es contracten 5 comercials més.
(C) La funció que determina els ingressos mensuals que s'obtindrien si es contractaren *x* comercials més.
(D) El nombre total de comercials que ha de tenir l'empresa per tal que els ingressos siguen màxims, i el valor d'aquests màxims ingressos.

39 Una horta té actualment 20 arbres, que produeixen 500 fruits cadascun. Es calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 10 fruits. Calcula el nombre addicional d'arbres que ha de tenir l'horta perquè la producció total de fruits siga màxima, i el valor d'aquesta màxima producció.

40 El cost de fabricar x unitats d'un determinat producte és $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 100$. El preu de venda de x unitats és $p(x) = 83 - 0.3x$. Quantes unitats s'han de fabricar i vendre per a maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? A quin preu es venen les unitats?

41 Una pastisseria ha comprovat que el nombre de pastissos d'un determinat tipus que ven setmanalment depèn del seu preu p en euros, segons la funció $n(p) = 2000 - 1000p$, on n(p) és el nombre de pastissos venuts cada setmana. Calcula:
(A) La funció I(p) que expressa els ingressos setmanals de la pastisseria en funció del preu p de cada pastís.
(B) El preu a què cal vendre cada pastís per a obtenir els ingressos setmanals màxims. A quant ascendiran aquests ingressos màxims?

42 En cert país comença una epidèmia. El nombre de persones que es contagia cada dia ve donat per la funció $f(x) = -x^2 + 40x + 84$, on x representa el nombre de dies transcorreguts des que va aparèixer la malaltia. Calcula:
(A) La taxa de propagació de la malaltia al cap de 5 dies.
(B) El moment en què el nombre de contagis deixa de créixer.
(C) En quin moment deixarà de produir-se contagis?

43 Anomenem x a la longitud d'un costat d'un rectangle de 20 metres de perímetre.
(A) Expressa l'àrea del rectangle en funció de x.
(B) Expressa la longitud de la diagonal del rectangle en funció de x.
(C) Per a quin valor de x l'àrea del rectangle és màxima? Quant mesura aquesta àrea?
(D) Per a quin valor de x la longitud de la diagonal és mínima? Quant mesura aquesta?

44 Volem construir dues parcel·les quadrades amb un perímetre total de 160 m. En una parcel·la plantarem gespa de primera qualitat, a 3 €/m^2, i en l'altra plantarem gespa de segona qualitat, a 2 €/m^2. Obtén les dimensions de cada parcel·la perquè les despeses totals en gespa siguen mínimes, i el valor d'aquestes despeses.

45 Volem construir dues habitacions iguals que comparteixen una paret comuna (adossades), cadascuna amb una àrea de 12 m^2. Obtén les dimensions x i y de cada habitació perquè el material utilitzat en la construcció de les seues parets siga mínim.

46 Volem construir 2 parcel·les rectangulars adossades, que tinguen un costat comú, cadascuna amb un àrea de 1000 m^2. Si els murs exteriors de cada parcel·la costen a 20 €/m i el mur interior comú a 10 €/m, obtén les dimensions de cada parcel·la perquè el cost total de construcció dels murs siga mínim, i el valor d'aquest mínim cost.

47 Volem construir 5 parcel·les rectangulars iguals, de 1000 m^2 d'àrea cadascuna i adossades. Si els murs exteriors de cada parcel·la costen a 20 €/m i els murs interiors costen a 10 €/m, obtén les dimensions de cada parcel·la perquè el cost total de construcció dels murs siga mínim, i el valor d'aquest mínim cost.

48 El preu en euros d'un diamant és igual al quadrat del seu pes en grams. Suposem que un diamant de 50 grams de pes es trenca en dos trossos.
(A) Si un dels dos trossos pesa 10 grams, comprova que tenim pèrdues respecte del preu que tenia el diamant abans de trencar-se, i calcula aquestes pèrdues.
(B) Si un dels trossos pesa x grams, expressa les pèrdues en funció de x, i comprova que sempre n'hi ha.
(C) Obtén el pes dels trossos per als quals la pèrdua és màxima, i el valor d'aquesta pèrdua.

49 Si la funció $B(x) = \dfrac{1000}{100 + 2^{-2x+100}}$ proporciona el benefici obtingut per una empresa (en milers d'euros) en funció del temps (en mesos) des que comença la seua activitat, estudia l'interval de creixement dels beneficis. Hi ha màxim absolut? Seran per tant infinits? Explica la resposta.

50 La qualificació que obté un alumne depèn del temps (en hores) de preparació a través de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\,x & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ \dfrac{3(x-10)}{0.3x} & \text{si} \quad x > 20 \end{cases}.$$

(A) Estudia la continuïtat de la funció.
(B) Estudia el creixement de les seues branques.
(C) En algun moment és molt rentable estudiar un poc més?
(D) Quant de temps d'estudi es requereix per a aconseguir el 10?

51 Es calcula que entre les 2000 i les 5000 revolucions per minut el consum de gasolina d'un motor ve donat per la funció $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, on f(x) indica els litres consumits per cada 100 km, i x ve expressada en milers de revolucions per minut. Calcula:
(A) Les revolucions en què el consum del motor és mínim, i el valor d'aquest consum.
(B) Les revolucions en què el consum del motor és màxim, i el valor d'aquest consum.

52 La velocitat (en m/s) que assoleix un atleta en una carrera de 200 metres s'expressa en funció de l'espai recorregut x (en metres) per l'expressió $f(x) = -0.00055x(x - 300)$.
(A) Quina velocitat té quan ha recorregut 50 metres?
(B) A quina velocitat aplega a la meta?
(C) Calcula la distancia recorreguda per l'atleta quan assoleix la seua màxima velocitat. Quina és aquesta velocitat?

53 Un ramader muny una vaca des de l'endemà que aquesta ha parit fins a 300 dies després del part. La producció diària en litres de llet que s'obté d'aquesta vaca ve donada per la funció:

$$f(x) = \frac{120x - x^2}{5000} + 40$$

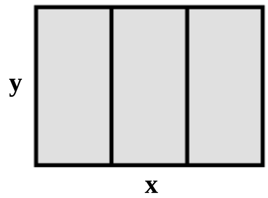
on *x* representa el nombre de dies transcorreguts des del part. Es demana:
(A) El dia de màxima producció i la producció màxima.
(B) El dia de mínima producció i la producció mínima.

54 Volem construir finestres com la de la figura, utilitzant 20 metres de fusta per a la construcció, sent la longitud x de la base un valor entre 3 i 6 metres.

(A) Expressa l'àrea de la finestra en funció de la longitud x de la base.

(B) De totes les finestres possibles, obtén la de menor àrea, i el valor d'aquesta mínima àrea.

(C) Obtén també la finestra de major àrea, i el valor d'aquesta màxima àrea.



55 El benefici d'una empresa depèn de la quantitat invertida inicialment i ve establida per la funció

$$f(x) = x^3 - \frac{39}{2}x^2 + 120x$$

on las quantitats (tan de x com de f(x)) venen donades en milions d'euros.

(A) Si només disposem de 9 milions d'euros per a realitzar la inversió inicial, calcula la quantitat que hem de invertir per a tenir el màxim benefici.

(B) Què passaria si disposàrem de 10 milions? Per què?

56 El cost total, donat en euros, de la producció de x litres d'un determinat producte ve donat per la funció $C(x) = 0.5x^2 + 5x + 800$. Defineix la funció que determina el cost mitjà per litre produït i determina amb quina producció l'esmentat cost mitjà serà mínim. Quin és el valor de l'esmentat cost?

57 Es creu que el nombre y d'unitats venudes d'un cert producte en funció del preu d'aquest producte, x, en euros, ve donat per $y = 50 - x$, on el preu varia entre 0 i 50 €. Si per cada unitat venuda s'obté un benefici de $x - 10$ €, determina el preu x que produirà un major benefici, el nombre d'unitats venudes i el benefici obtingut.

58 Un restaurant obri a les 8 de la nit i tanca quan tots els clients se n'han anat. La funció $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el nombre de clients que hi ha al restaurant en funció del nombre d'hores t que du obert el restaurant. Es demana:

(A) El nombre màxim de clients que van una determinada nit al restaurant. A quina hora es produeix aquest màxim?

(B) Si volem anar al restaurant quan hi haja almenys 50 persones però no més de 80, entre quines hores hauríem d'anar?

59 Una empresa de telefonia vol llançar al mercat una oferta de tarifa plana d'Internet. S'ha realitzat un estudi que determina que si la tarifa fóra de 36 € podrien aconseguir-se 4800 contractes. Tanmateix, per cada euro menys en la tarifa, el nombre de contractes previst anteriorment s'incrementaria en 150. Es demana:

(A) Expressa l'ingrés total previst en funció del nombre x d'euros de rebaixa en la tarifa.

(B) Quina hauria de ser la tarifa perquè l'empresa obtinguera l'ingrés màxim? Quin és aquest, i amb quants abonats s'aconseguiria?

60 S'estima que els beneficis mensuals d'una fàbrica de caramels, en milers d'euros, venen donats per la funció $B(x) = -0.1x^2 + 2.5x - 10$, quan es venen x tones de producte. Es demana:

(A) Quantitat de tones que s'ha de vendre per a obtenir el benefici màxim, i calcular-lo.

(B) Quantitat mínima que s'ha de vendre per a no tindre pèrdues.

(C) Quina quantitat produeix el màxim benefici per tona venuda? Calcula també aquest màxim benefici.

61 L'efectiu, en milers d'euros, d'una oficina bancària durant les sis hores que roman la caixa oberta al públic ve donat per l'expressió $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$, sent t el temps en hores transcorregut des de la seua obertura.

(A) En quin moment hi ha més diners en efectiu i quants?

(B) En quin moment hi ha menys diners en efectiu i quants?

62 Una funció $f(x) = ax + b$, definida en l'interval $[-2, 2]$, té per funció derivada $f'(x) = -5$.

(A) Què podem afirmar del seu creixement?

(B) Si el seu valor mínim és 10, quant valen els paràmetres a i b?

63 El rendiment d'un estudiant durant les primeres 6 hores d'estudi ve donat (en percentatge) per la funció $R(t) = \dfrac{700t}{4t^2 + 9}$, on t és el nombre d'hores transcorregudes.

(A) Calcula el rendiment a les 3 hores d'estudi.

(B) Determina l'evolució del rendiment durant les primeres 6 hores d'estudi (quan augmenta i quan disminueix). Quin és el rendiment màxim?

64 Una empresa de material fotogràfic ofereix una màquina que és capaç de revelar 15,5 fotografies per minut. No obstant això, la seua capacitat es va deteriorant amb el temps de manera que el nombre de fotografies revelades per minut ve donat per la funció f(x), on x és l'antiguitat de la màquina en anys:

$$f(x) = \begin{cases} 15.5 - 1.1x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{5x+45}{x+2} & \text{si } x > 5 \end{cases}.$$

(A) Estudia la continuïtat de f(x) en l'interval $[0,+\infty[$.
(B) Comprova que el nombre de fotografies revelades per minut decreix amb l'antiguitat de la màquina.
(C) És cert que la màquina mai revelarà menys de 5 fotografies per minut? Per què?

65 En una sessió de borsa, el valor d'una certa acció, en euros, va vindre donat per la funció

$$f(x) = \begin{cases} -x+15 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 8x + 26 & \text{si } 3 < x \le 6 \\ 2x+2 & \text{si } 6 < x \le 8 \end{cases}$$

on x representa el temps, en hores, transcorregut des de l'inici de la sessió. Es demana:
(A) Estudia la continuïtat de f(x).
(B) Calcula el valor màxim i el valor mínim que va aconseguir l'acció i el moment en que es va aconseguir.
(C) En quins moments va convenir comprar i vendre per a maximitzar el benefici? Quin hauria sigut aquest?

66 La funció següent representa la valoració d'una empresa en milions d'euros en funció del temps t, al llarg dels últims 13 anys:

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0.1t & \text{si } 0 \le t < 5 \\ 4.5 + 0.05(t-5) & \text{si } 5 \le t < 10 \\ 4.75 + 0.1(t-10)^2 & \text{si } 10 \le t \le 13 \end{cases}.$$

Estudia en l'interval [0,13]:
(A) Si la funció f(t) és o no contínua, i indica en cas negatiu els punts de discontinuïtat.
(B) L'instant t en què la valoració de l'empresa és màxima i l'esmentada valoració màxima.
(C) L'instant t en què la valoració de l'empresa és mínima i l'esmentada valoració mínima.

67 Una cadena de muntatge està especialitzada en la producció d'un cert model de motocicleta. El cost C(x) de producció en euros esta relacionat amb el nombre x de motocicletes fabricades mitjançant la següent expressió $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$. Si el preu de venda de cadascuna de les motocicletes és de 8000 euros i es venen totes les motocicletes fabricades, es demana:
(A) Defineix la funció d'ingressos I(x) que obté la cadena de muntatge en funció de les vendes de les motocicletes produïdes.
(B) Quina és la funció B(x) que expressa els beneficis de la cadena de muntatge?
(C) Quantes motocicletes han de fabricar per a maximitzar els beneficis? A quant ascendiran aquests beneficis?

68 La especialitat d'una pastisseria és la fabricació de caixes de bombons. Els costs de fabricació, C(x) en euros, estan relacionats amb el nombre de caixes produïdes, x, mitjançant la funció $C(x) = 0.1x^2 + 20x + 2500$. Si el preu de venda d'una caixa de bombons és de 80 euros i es venen totes les caixes produïdes, es demana:
(A) La funció d'ingressos que obté la pastisseria amb la venda de les caixes.
(B) La funció de beneficis, entesa com a diferència entre ingressos i costs de fabricació.
(C) El nombre de caixes de bombons que s'ha de produir per a maximitzar el benefici, i el benefici màxim.

69 S'estima que el benefici anual B(t), en percentatge, que produeix una certa inversió, està determinat pel temps t en mesos que es manté aquesta inversió a través de l'expressió següent:

$$B(t) = \frac{36t}{t^2+324} + 1, \quad t \ge 0.$$

(A) Descriu l'evolució del benefici en funció del temps durant els primers 30 mesos.
(B) Calcula raonadament quant de temps ha de mantenir-se aquesta inversió per tal que el benefici siga màxim. Quin és el benefici màxim?
(C) Quin seria el benefici de la inversió si aquesta es mantinguera en el temps de forma indefinida?

70 Radio Jove ha determinat per mitjà d'enquestes que el nombre de persones que la sintonitzen entre les 12 del matí i les 12 de la nit ve donat per la funció $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, on t indica les hores transcorregudes des de les 12 del matí.
(A) Calcula la variació mitjana entre les 12 hores i les 15 hores.
(B) Calcula la variació instantània a les 15 hores i a les 22 hores.
(C) A quines hores s'assoleix la màxima i la mínima audiència?
(D) Quantes persones sintonitzen l'emissora a eixes hores?
(E) A quina hora es produeix la major taxa de variació de l'audiència? Quina és eixa taxa?

71 El benefici d'una empresa depèn de la quantitat invertida inicialment en aquesta empresa i ve establert per la funció $f(x) = x^3 - \frac{39}{2}x^2 + 120x$, on les quantitats x i f(x) venen donades en milions d'euros.
(A) Si disposem de fins a 9 milions d'euros per a realitzar la inversió inicial, calcula la quantitat que hem d'invertir per a assolir el màxim benefici.
(B) Què passaria si disposarem de 10 milions d'euros? Perquè?

72 Una empresa té una demanda de sucre (en kg) en funció del preu (en euros) donada per la funció:

$$D(p) = 10000 - 1000\ p.$$

Es demana:
(A) Quina és la demanda si el preu és 5 €?
(B) Quina és la variació mitjana de la demanda en l'interval [1, 5]? Què et suggereix el resultat?
(C) Quina és la variació instantània per a p = 3€?
(D) Si el preu oscil·la en l'interval [1, 10], quina és la quantitat màxima de sucre demanada? A quin preu?
(E) Estudia el creixement i decreixement d'aquesta funció en l'interval anterior.
(F) Quin és la funció ingrés?. A quin preu obté esta empresa el màxim ingrés? Quina quantitat tindrà demandada en ell?

73 Si la funció $P(t) = -2t^3 + 24t^2 - 72t + 250$ és el nombre de peces que ha fabricat un treballador fins a l'instant t en hores, amb $2 \le t \le 6$.
(A) Quina serà la funció que ens expresse el ritme de peces fabricades per hora?
(B) A quin ritme fabrica a les 3 hores? I a las 3.5 hores? I a les 5 hores?
(C) En quin moment fabrica a més ritme i quin és eixe ritme? Què passa un poc abans i un poc després d'eixe instant?

74 Un model per a 3 mesos per als costs d'emmagatzematge i transport de materials per a un procés de manufactura té la funció de cost $C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$, on C(x) es el cost (en euros) d'emmagatzematge i transport de x tones de materials.
(A) Quina quantitat de materials fa que el cost siga mínim? Quin és el cost mínim?
(B) S'anomena ***cost marginal*** de produir una nova unitat de producte (la unitat x + 1) a la diferència de costs C(x + 1) − C(x), és a dir, l'increment de costs per a poder produir-la. Un valor aproximat del cost marginal de produir la unitat x + 1 és $\mathbf{C'(x)}$. Calcula el cost marginal de la tona 101.

75 Les pèrdues o guanys d'una empresa segueixen la llei $y = \frac{2x-4}{x+2}$, sent x els anys de vida de l'empresa i y les pèrdues o guanys en milions d'euros.
(A) Determina l'any en què l'empresa deixa de tindre pèrdues.
(B) Poden ser el seus beneficis de tres milions d'euros en algun moment? Justifica la resposta.
(C) Estudia el creixement i decreixement de la funció.
(D) Quan s'assoleix el màxim benefici?

76 Una empresa ha realitzat un estudi al voltant dels costs de producció aplegant a la conclusió que produir x unitats d'un producte té un cost en milers d'euros expressat per la funció $C(x) = 0.25x^2 + 25x + 25$. La venda de x unitats d'aquest producte proporciona un ingrés en milers d'euros que ve donat per la funció $i(x) = (30 + 0.125x)x$, sent x el nombre d'unitats produïdes i venudes. Es demana:
(A) El nombre d'unitats que s'ha de produir perquè el cost siga mínim.
(B) Calcula la funció benefici, depenent de x, suposant sempre que es venen les x unitats produïdes.
(C) Obtén el nombre d'unitats que s'ha de produir i vendre perquè el benefici siga màxim i obtén el valor d'aquest benefici.

77 Un venedor de pòlisses d'assegurances té uns ingressos que depenen del nombre de pòlisses x venudes i està expressat per la funció $S(x) = 100000 + 2660x - 0.2x^3$. Per a realitzar el seu treball té unes despeses que depenen del nombre de pòlisses venudes, expressades per la funció $G(x) = 20000 + 500x$.

(A) Quantes pòlisses ha de vendre perquè el seu benefici (ingressos menys despeses) siga màxim? Quin és el benefici màxim?

(B) Quin és el benefici marginal de vendre la 52a pòlissa? I la 58a, 60a, 61a i 63a? Què et suggereix el resultat?

Solucions de les activitats del capítol 4

1. No definida en 0, decreix en els demés. (B) Decreix en –2, –1, 0 i 1, creix en 5, i en 2 incertesa. (C) Creix en 1, 2 i 5, en els demés, no està definida. (D) Creix en tots. (E) Creix en –2 i –1, decreix en 1, 2 i 5 i en 0 no definida.

2.

	A	B	C	D	E	F	G
↗	]–∞, 0[	]–∞, –2[∪]2, +∞[	]–∞, +∞[	]–1, +∞[		]–∞, 2[∪]3,+∞[	
↘	]0, +∞[	]–2, 2[			]–∞, +∞[	]2, 3[	]–∞, +∞[

	H	I	J	K	L	M
↗	]–1, 0[∪]1, +∞[			]–∞, 0[	]–∞, –1[∪]–1, 0[	]0, +∞[
↘	]–∞, –1[∪]0, 1 [	]–∞, +∞[	]–∞, 2[∪]2, +∞[	]0, +∞[	]0, 1[∪]1, +∞[	]–∞, 0[

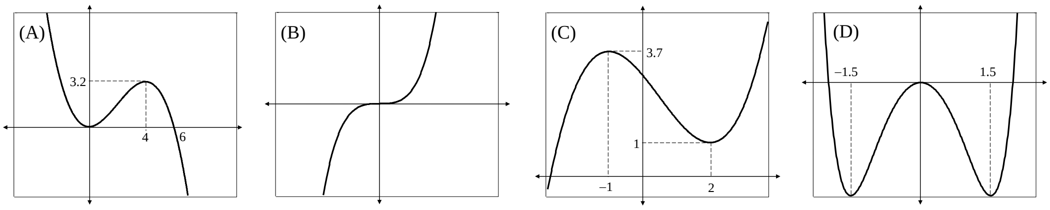
3. $x = -b/2a$. **4.** (A) $m = -11/12$ en $x = -1$, $M = 5/12$ en $x = 1$. (B) No en té. (C) m no en té, $M = 39/4$ en $x = 3$. **5.** (A) En $\mathbb{R}$: $m = -1/4$ en $x = 2.5$, M no en té; en $[-2, 2.5]$: $m = -1/4$ en $x = 2.5$, $M = 20$ en $x = -2$. (B) En $\mathbb{R}$: $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; en $[-2, 2.5]$: $m_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $m_2 = -6$ en $x = -2$; $M_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $M_1 = 13.125$ en $x = 2.5$. (C) En $\mathbb{R}$: no té ni m ni M; en $[-2, 2.5]$: $m = -10$ en $x = -2$, $M = 18.125$ en $x = 2.5$. (D) En $\mathbb{R}$: $m = -32$ en $x = 4$, $M = 0$ en $x = 0$; en $[-2, 2.5]$: $m_1 = -32$ en $x = -2$, $m_2 = -21.875$ en $x = 2.5$, $M = 0$ en $x = 0$. **6.** (A) En $\mathbb{R}$: No en té; en $[0, 5]$: $m = 3$ en $x = 0$, $M = 13$ en $x = 5$. (B) En $\mathbb{R}$: $m_1 = -38$ en $x = -1$, $m_2 = 16$ en $x = 2$, $M_1 = -16$ en $x = -2$, $M_2 = 38$ en $x = 1$; en $[0, 5]$: $m_1 = 0$ en $x = 0$, $m_2 = 16$ en $x = 2$, $M_1 = 38$ en $x = 1$, $M_2 = 6550$ en $x = 5$. (C) En $\mathbb{R}$: $m = 1$ en $x = 2$, M no en té; en $[0, 5]$: $m = 1$ en $x = 2$, $M_1 = 17$ en $x = 0$, $M_2 = 82$ en $x = 5$. (D) En $\mathbb{R}$: $m = 0$ en $x = 0$; en $[0, 5]$: $m =0$ en $x = 0$, $M = 25/26$ en $x = 5$. **7.** $m = -8$, $n = 12$. **8.** (A) En $[0, 5]$: $m = -6$ en $x = 5$ i $M = 4$ en $x = 0$; en $]-1, 3[$: no n'hi ha. (B) $m = M = -3$ en els dos casos. (C) En $[0, 5]$: $m = 0$ en $x = 2$ i $M = 9$ en $x = 5$; en $]-1, 3[$: $m = 0$ i M no existeix. **9.** En $[0, 5]$: $m = -27$ en $x = 0$, i $M = 13$ en $x = 2$ i 5; en $[1, 4]$: $m = 5$ en $x = 1$ i 4, i $M = 13$ en $x = 2$. **10.** En $\mathbb{R}$, $m = -48$ en $x = -2$, i M no n'hi ha; en $[-3, 2]$: $m = -48$ en $x = -2$, i $M = 80$ en $x = 2$. **11.** 1 tona, 10/3 tones, 7 tones. **12.** (A) A partir del primer any. (B) Als 7 anys, 6428579€. (C) L'empresa té pèrdues durant el primer any, i beneficis després, sent màxims als 7 anys. Després decreixen aproximant-se als 5 milions a llarg termini (sempre són majors) perquè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$. **13.** $p = 6.15$€, $B = 2703.75$€ (quan es venen $x = 975$ maquinetes). **14.** Costat que limita amb la carretera: 40m, l'altre costat, 60m. Despeses mínimes: 3600€. **15.** (A) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. (B) $]-1, 1[$. (C) –1 i 1. **16.** (A) f còncava en $x = -2$, 2 i 1. (B) f convexa en $x = -2$ i 0, còncava. en $x = 2$.

17.

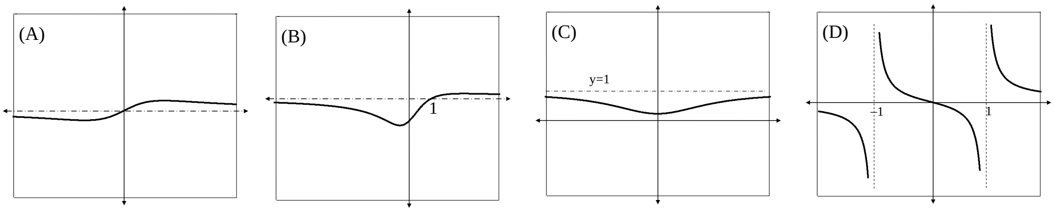
	A	B	C	D	E	F
Còncava	]0, +∞[	]0, +∞[	]–2, +∞[	]$-\sqrt{3}$, 0[∪] $\sqrt{3}$, +∞[	]–1, 0[∪]1, +∞[	]–∞,0[
Convexa	]–∞, 0[	]–∞, 0[	]–∞, –2[	]–∞, $-\sqrt{3}$ [∪]0, $\sqrt{3}$ [	]–∞, –1[∪]0, 1[	]0, +∞[

18. A les 6 hores, fins a aquest instant anava augmentant la seua velocitat, a partir de les 6 hores disminueix (instant de màxima velocitat del recorregut); el recorregut és 136.5 km.

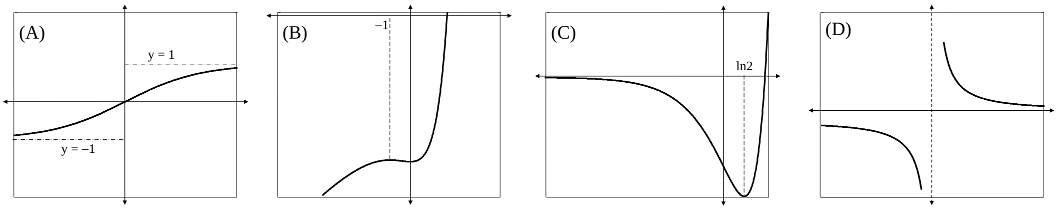
19.



20.



21.



Solucions dels problemes del capítol 4

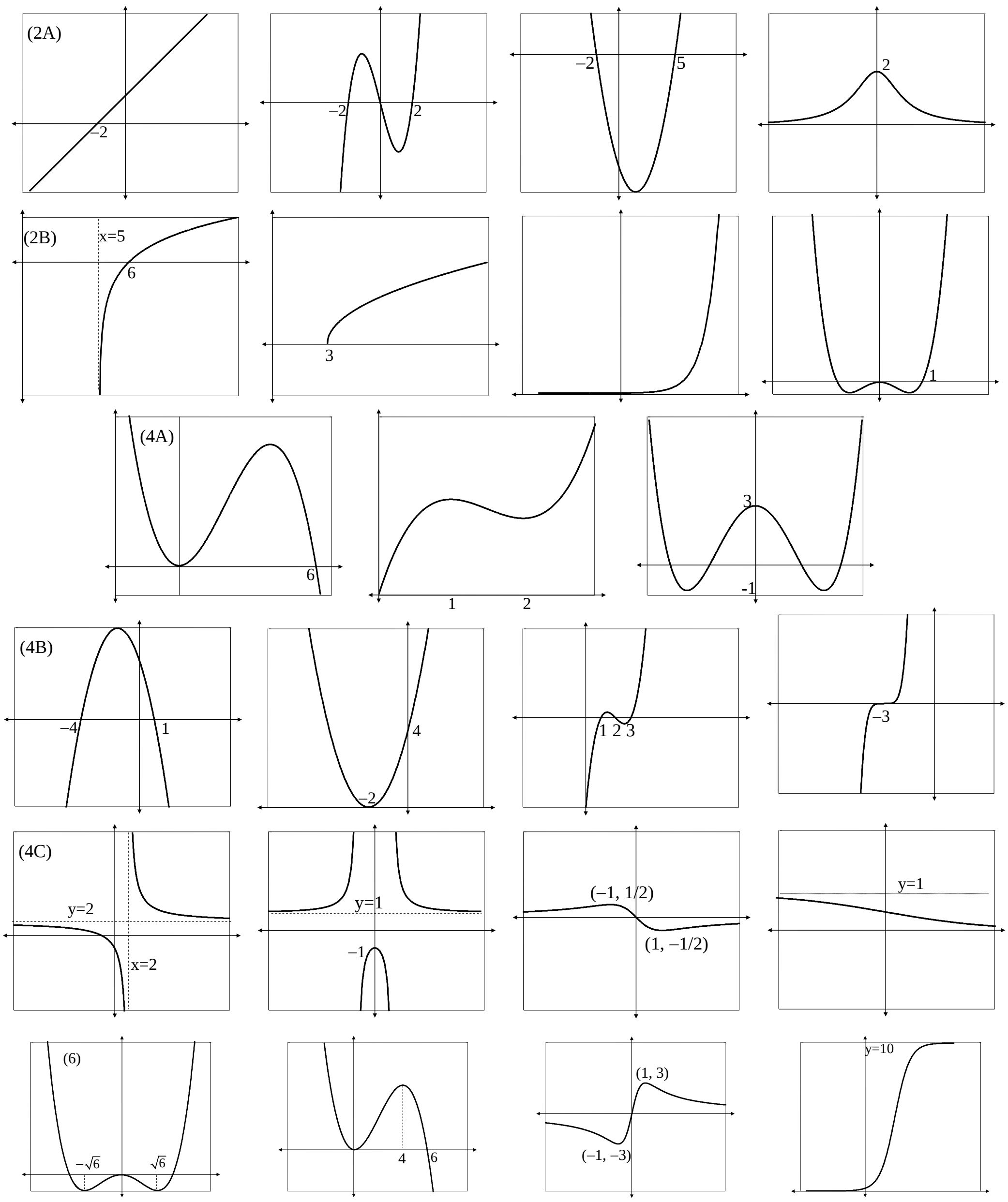
1. Respectivament, f decreix, creix i creix; g creix en els 3; h creix en els 3; t creix en els 3; p és constant.

2. (A) f creix en $\mathbb{R}$; g creix en $\left]-\infty,\frac{-2}{\sqrt{3}}\right[\cup\left]\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ i decreix en $\left]\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$; h creix en]3/2, +∞[i decreix en]–∞, 3/2[; t creix en]–∞, 0[i decreix en]0, +∞[. (B) f creix en]5, +∞[; g creix en]3, +∞[; h creix en $\mathbb{R}$; t creix en $\left]-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup\left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ i decreix en $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$. **3.** Augmenta en]0, 6[i disminueix en]6, 8[; l'acceleració disminueix en]0, 8[. **4.** (A) f: m = 0 en x = 0, M = 48 en x = 4; g: m = 4 en x = 2, M = 5 en x = 1; h: m = –1 en x = $\pm\sqrt{2}$, M = 3 en x = 0. (B) f: M = $\frac{25}{4}$ en x = 3/2; g: m = 0 en x = –2; h: m = $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en x = $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$, M = $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en x = $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$; t no en té. (C) f no en té; g: M = –1 en x = 0; h: m = –1/2 en x = 1, M = 1/2 en x = –1; t no en té. **5.** f i t còncaves en els tres punts, g i h convexes en els tres punts, t és constant.

6.

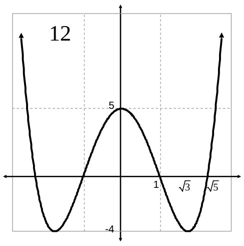
	f	g	h	t	p
Còncava	]–∞, –1[∪]1, +∞[	]–∞, 2[	]$-\sqrt{6}$, 0[∪] $\sqrt{6}$, +∞[	]–∞, 2– $\sqrt{2}$ [∪]2+ $\sqrt{2}$, +∞[	]–∞, 2[
Convexa	]–1, 1[	]2, +∞[	]–∞, $-\sqrt{6}$ [∪]0, $\sqrt{6}$ [	]2– $\sqrt{2}$, 2+ $\sqrt{2}$ [	]2, +∞[

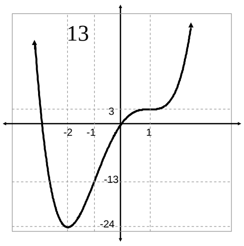
7.

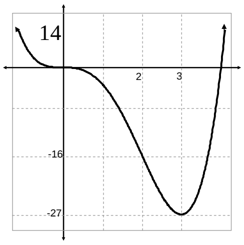


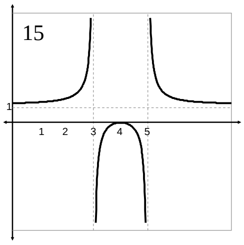
8. (A) m = –6 en x = –1, M = 6 en x = 3. (B) m = –7 en x = 2, M = 9 en x = 0. (C) m no n'hi ha, M = $\frac{203}{27}$ en x = $-\frac{4}{3}$. (D) m = –28 en x = –1, M no n'hi ha. **9.** (A) Decreix en]–∞, –2[∪]1, 0[i creix en]–2, –1[∪]0, +∞[. (B) Màxim relatiu en x = –1, valor f(1) = –7; mínim relatiu en x = –2 i en 0, valor –8 en ambdós. (C) No té màxim absolut en el seu domini, però el mínim absolut és –8. **10.** (A) $D_f = \mathbb{R}$, punts de tall P(0, 0) i Q(–1, 0). (B) Decreix en]–∞, –1[∪]–1/2, 0[i creix en]–1, –1/2[∪]0, +∞[. (D) Mínim relatiu en x = –1 i 0, valor f(–1) = f(0) = 0; màxim relatiu en x = –1/2, valor f(–1/2) = 1/16. **11.** (A) $D_f = \mathbb{R}$, punts de tall P(0, 4), Q(1, 0) i Q(–2, 0). (B) f decreix en]–∞, –2[∪]–1/2, 1[i creix en]–2, –1/2[∪]1, +∞[. (D) Mínim relatiu en x = –2 i 1, valor f(–2) = f(1) = 0; màxim relatiu en x = –1/2, valor f(–1/2) = 81/16. **12.** (A) A(0, 5), B$\left(\sqrt{5},0\right)$, C$\left(-\sqrt{5},0\right)$, D(1, 0), E(–1, 0). (B) Creix en $]-\sqrt{3}$, 0[∪]$\sqrt{3}$, +∞[, decreix en]–∞, $-\sqrt{3}$ [∪]0, $\sqrt{3}$ [. Mínims relatius en x = $\pm\sqrt{3}$, valor –4; màxim relatiu en x = 0, valor 5. (C) No hi ha màxim absolut, hi ha mínim absolut: –4, per a x = $\pm\sqrt{3}$. (D) Còncava en]–∞, –1[∪]1,+∞[; convexa en]–1, 1[. **13.** (A) Creix en]–2, +∞ [, decreix en]–∞, –2[. Mínim relatiu en x = –2, valor –24. (C) Còncava en]–∞, –1[∪]1,+∞[; convexa en]–1, 1[. (D) PI en x = ±1.

14. (A) A(0, 0) i B(4, 0). (B) Decreix en]–∞, 3[, creix en]3, +∞[. Mínim relatiu en x = 3, valor –27. (C) No hi ha màxim absolut, hi ha mínim absolut: –27, per a x = 3. (D) Còncava en]–∞, 0[∪]2, +∞[, convexa en]0, 2 [. PI en x = 0 i x = 2. **15.** (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{3, 5\}$, punts de tall P(0, 16/15) i Q(4, 0). (B) AH: y = 1 (bilateral), AV: x = 3, x = 5. (C) f creix en]–∞, 3[∪]3, 4[i decreix en]4, 5[∪]5, +∞[. (D) Màxim relatiu en x = 4, valor f(4) = 0.

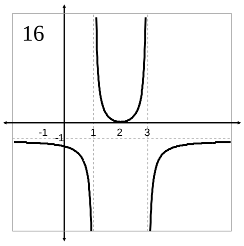


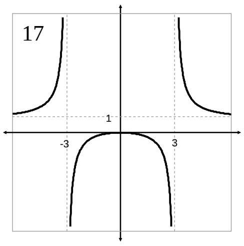


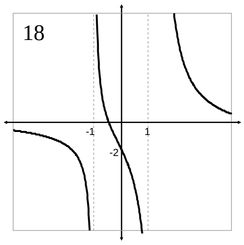




16. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, 3\}$, punts de tall P(0, –4/3) i Q(2, 0). (B) AH: y = –1 (bilateral), AV: x = 1, x = 3. (C) Decreix en]–∞, 1[∪]1, 2[i creix en]2, 3[∪]3, +∞[. (D) Mínim relatiu en x = 2, valor f(2) = 0. **17.** (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{-3, 3\}$, punts de tall P(0, –1/9). (B) AH: y = 1 (bilateral), AV: x = –3, x = 3. (C) Creix en]–∞, 0[~{– 3} i decreix en]0, +∞[~{3}. (D) Màxim relatiu en x = 0, valor f(0) = –1/9. **18.** (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, -1\}$, punts de tall P(0, –2) i Q(–2/3, 0). (B) AH: y = 0 (bilateral), AV: x = 1, x = –1. (C) Decreix en $\mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$. (D) No hi ha màxims ni mínims relatius.







19. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, -1\}$, AV: x = 1, x = –1, no hi ha AH, AO: y = x (bilateral). (C) f creix en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\sim\{-1, 1\}$. (D) Màxim relatiu en x = $-\sqrt{3}$, valor $f\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$; mínim relatiu en x = $\sqrt{3}$, valor $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **20.** (A) f creix en]1, 3[∪]3, +∞[, f decreix en]–∞, 1[, m = $-\dfrac{3}{2}$ en x = 1, f còncava en]–∞, 3[i recta en]3, +∞[. (B) g creix en]0, +∞[, decreix en]–∞, 0[, m = –3 en x = 0, g còncava en]–∞, –1[∪]–1, +∞[. (C) h creix en]–2, 2[∪]2, +∞[, decreix en]–∞, –2[, m = –4 en x = –2, còncava en]–∞, 2[∪]2, +∞[. **21.** (A) f contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{-1\}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > -1 \\ \dfrac{-12x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$. (B) f creix en]–∞, –1[∪]0, +∞[i decreix en]–1, 0[. (C) Màxim relatiu en x = –1, valor f(–1) = 3; mínim relatiu en x = 0, valor f(0) = 2. **22.** (A) a = 10. (B) f decreix en [2, 5[i creix en]5, 7]. (C) Màxim absolut: 20, quan x = 7; mínim absolut: 2, quan x = 5. **23.** (A) f contínua en [–2, 5]~{3}. (B) f decreix en]0, 1[i creix en [–2, 0[∪]1, 5[. (C) Màxim absolut: 2, quan x = 0 i 2; mínim absolut: 0, quan x = –2. (D) Màxim absolut: 14, quan x = 5; mínim absolut: 0, quan x = –2. **24.** 5. **25.** 15 × 20 m; 120 €. **26.** Totes 5 cm. **27.** $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ dm, $h = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ dm. **28.** x = y = 30 m.

29. a = –8, b = 0, c = 20. **30.** a = –3, b = 3, c = –1. **31.** a = 1, b = –3, c = 0, d = 4. **32.** a = 1/3, b = 1, c = –4/3. **33.** 12×24 cm. **34.** 8, 8 i 4 m. **35.** 50 kg; 150 €. **36.** (A) 584 kg i 4104 kg. (B) 3520 kg. (C) 880 kg/h. (D) 792, 944 i 1000 kg/h. (E) Sempre, perquè la derivada és sempre positiva. (F) En [0, 5]. (G) 1000 kg/h, a les 5 h.
37. 12600 €, sí. (B) $f(x) = -2x^2 + 80x + 12000$. (C) Fins a 20 persones més. (D) 12800 €. **38.** (A) 86250€. (B) 90000€. (C) f(x) = (15 + x)(5750 – 250x). (D) 19 comercials, 90250 €.. **39.** 15 arbres més; producció màxima 12 250 fruits. **40.** 100 unitats; 3900 €; 53 €/u.

41. (A) $I(p) = p(2000 - 1000p)$. (B) $p = 1$ €, $I(1) = 1000$ €. **42.** (A) 30 persones/dia. (B) 20 dies. (C) 42 dies.

43. (A) $A(x) = 10x - x^2$. (B) $D(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$. (C) x = 5 m, A = 25 m^2. (D) x = 5 m, D = $\sqrt{50}$ m.

44. El costat de la primera parcel·la 16 m i 24 m per a la segona. Cost mínim 1920 €. **45.** x = 3 m, y = 4 m.

46. 25 m × 40 m. Cost 4000 €. **47.** 20 m × 50 m; 8000 €. **48.** (A) Preu sense trencar-se: 2500 €, preu al trencar-se: 1700 €; pèrdues: 800 €. (B) $p(x) = -2x^2 + 100x \geq 0$ en [0, 50]. (C) Pes: 25 grams cadascun; pèrdues: 1250 €.

49. Sempre és creixent, no hi ha màxim absolut, però com que B(x) tendeix a 10 quan x tendeix a +∞, el benefici no supera els 10 milers de €. **50.** (A) Discontínua en x = 20. (B) Creixen les dues. (C) Sí, al passar de 20 h. (D) No s'assoleix, hi ha una asímptota horitzontal en y = 10. **51.** (A) 3000 rev/min, 5litres. (B) 5000 rev/min, 13 litres.

52. 6.875 m/s. (B) 11m/s. (C) 150 m, 12.375 m/s. **53.** (A) Als 60 dies, 40.72 litres. (B) Als 300 dies, 29.2 litres.

54. (A) $A(x) = \dfrac{10x - x^2}{2}$. (B) x = 3, y = 3.5, A = 10.5 m^2. (C) x = 5, y = 2.5, A = 12.5 m^2. **55.** (A) 5 milions. (B) El màxim s'assoleix en 10 milions que és l'extrem de l'interval. **56.** $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 0.5x + 5 + \dfrac{800}{x}$; 40 litres; 45 €/l. **57.** A 30 €; 20 unitats; 400 € de benefici. **58.** (A) 90 clients a les 11 de la nit. (B) Entre les 9 i les 10 de la nit i entre les 12 de la nit i la 1 de la matinada. **59.** (A) $I(x) = -150x^2 + 600x + 172800$. (B) 34 €; 173400 €; 5100 abonats. **60.** (A) No té màxim. (B) 20 tones. (C) 10 tones; 0.5 milers de euros per tona. **61.** (A) En la obertura, 2000 milers de euros. (B) A las 13/3 hores de l'obertura, 1493 milers d'euros. **62.** (A) És decreixent en l'interval. (B) a = –5, b = 20. **63.** (A) 46.6%. (B) El rendiment creix fins a les 1.5 hores, i decreix des de les 1.5 hores fins a les 6 h. El màxim rendiment és del 58.3%. **64.** (A) f és contínua en [0, +∞[. (B) Com que $f'(x) = -1.1$ si $0 < x < 5$, i $f'(x) = \dfrac{-35}{(x+2)^2}$ si x > 5, aleshores f és sempre decreixent i el nombre de fotografies decreix amb l'antiguitat de la màquina. (C) Sí, perquè f és sempre decreixent i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+45}{x+2} = 5$, per tant f(x) > 5 sempre. **65.** (A) f és contínua en [0, 8]~{3}. (B) Màxim: 18, quan x = 8; mínim: 10, quan x = 4. (C) Convé comprar a les 4 hores i vendre a les 8 hores; benefici: 18 – 10 = 8 €/acció. **66.** (A) f és contínua en [0, 13]. (B) t = 13, màxima valoració de 5.65 milions d'€. (C) t = 5, mínima valoració de 4.5 milions d'€. **67.** (A) $I(x) = 8000x$.

(B) $B(x) = -10x^2 + 6000x - 250000$. (C) 300 motos, benefici de 650 000 €. **68.** (A) $I(x) = 80x$.

(B) $B(x) = -0.1x^2 + 60x - 2500$. (C) 300 caixes, 6 500 €. **69.** (A) El benefici inicial és de l'1%, creix fins els 18 mesos i decreix des dels 18 mesos fins els 30 mesos, on el benefici seria del 1.88%. (B) La inversió s'ha de mantenir 18 mesos, i el benefici màxim seria del 2%. (C) El benefici s'aproxima a l'1% quan el temps tendeix a +∞.

70. (A) Perd 159 persones/h. (B) Perd 96 persones/h i guanya 9 persones/h respectivament. (C) Màxima audiència a les 12 del matí, mínima a les 7 de la vesprada. (D) 660 i 23 persones respectivament. (E) A les 9 de la vesprada amb 12 persones/h. **71.** (A) 5 milions d'euros amb la qual cosa assoliríem 237.5 milions d'euros de benefici. (B) El màxim absolut ja no estaria en x = 5 sinó en x = 10 i s'assoliria 250 milions d'euros de benefici. **72.** (A) 5000 kg. (B) –1000 kg/€, per cada euro que s'incrementa el preu la demanda cau en 1000 kg. (C) –1000 kg/€. (D) 9000 kg a 1 €. (E) Decreix en tot l'interval. (F) Ingrés: $I(p) = p \cdot D(p) = 10000p - 1000p^2$; p = 5 €, D(5) = 5000 kg.

73. (A) $P'(t) = -6t^2 + 48t - 72$. (B) 18, 22.5 i 18 peces/h. (C) A les 4 h, a 24 peces/h. Passa d'augmentar el ritme a disminuir-lo (s'anomena punt de rendiments decreixents, a partir d'eixe instant i encara que segueix fabricant peces, ho fa a menor ritme). **74.** (A) 4 tones; 17200 €. (B) C'(100) = 898.56 €, la tona 101 té este cost afegit a la tona 100.

75. (A) A partir del segon any. (B) No, la funció és creixent i té AH: y = 2, per la qual cosa mai assolirà el valor 3.

76. (A) El cost és mínim si no es produeix, 25000 €. (B) $B(x) = -0.125x^2 + 5x - 25$. (C) 20 unitats, 25000 €.

77. (A) x = 60 pòlisses, benefici de 208880 €. (B) df(51) = 599.4 €; df(57) = 210.6 €; df(59) = 71.4 €; df(60) = 0 €; df(62) = –146.4 €. Vendre una pòlissa més proporciona benefici fins a assolir les 60 pòlisses, a partir d'aquí no convé vendre més pòlisses.

2 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Càlcul de probabilitats i interferència estadística

educàlia editorial

BATXILLERAT 2

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Càlcul de probabilitats i interferència estadística

educàlia
editorial

Primera edició, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-10-7
Depòsit legal: V-3246-2018
Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 3

Variables aleatòries discretes

3.1 Variables aleatòries discretes

En qualsevol experiment aleatori, els successos d'interès solen estar relacionats amb quantitats numèriques, com per exemple el nombre de cares al llançar 3 monedes, el temps d'espera en una determinada cua, etc. Aquestes quantitats numèriques s'expressen per mitjà de variables, anomenades ***variables aleatòries***, en què podem definir conceptes tan coneguts com la ***mitjana*** i la ***variància***.

➢ Variables aleatòries

Considerem un experiment aleatori d'espai mostral Ω.

Anomenem ***variable aleatòria* X** a una correspondència $X: \Omega \to \mathbb{R}$ que a cada resultat possible ω de l'espai mostral Ω li associa un **únic** nombre real.

El conjunt de tots els nombres reals que pren la variable aleatòria X s'anomena ***rang,* R_X**:

$$\mathbf{R_X = \{X(\omega): \omega \in \Omega\}}$$

Classifiquem les variables aleatòries segons el nombre de valors del seu rang:

- Si el rang $\mathbf{R_X}$ és un conjunt finit o infinit numerable, la variable s'anomena ***discreta***.
- Si el rang $\mathbf{R_X}$ és un interval de nombres reals, la variable es diu que és ***contínua***.

Exemple 1

- Considerem l'experiment aleatori de llançar dos daus. L'espai mostral Ω conté 36 resultats:

(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (3,1) (2,2) (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) (1,5) (5,1)

(2,4) (4,2) (3,3) (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) (2,6) (6,2) (3,5)

(5,3) (4,4) (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) (4,6) (6,4) (5,5) (5,6) (6,5) (6,6)

Definim la variable aleatòria **X: "suma de punts obtinguts amb els 2 daus"**.

X associa a cada resultat de l'espai mostral un nombre, la suma dels punts de cada dau. Per exemple:

$$(1, 1) \to 1 + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad X(1, 1) = 2$$
$$(1, 2) \to 1 + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad X(1, 2) = 3$$
$$(6, 6) \to 6 + 6 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad X(6, 6) = 12$$

El ***rang de X***, o conjunt de tots els valors possibles, és:

$$\mathbf{R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$$

Com que R_X és un conjunt finit, la variable X és ***discreta***.

- Esperem una telefonada, que es produirà entre les 10 i les 11 hores, de forma que suposem aleatòria. L'espai mostral podem considerar-lo com:

$$\mathbf{\Omega = [10, 11]}$$

Definim la variable X: "temps que vam esperar fins a rebre la telefonada".

El **rang** de X és $\mathbf{R_X = [0, 1]}$, i per tant X és una variable **contínua**.

La variable X transforma cada resultat de Ω (instant de temps en què es produeix la telefonada) en un nombre entre 0 i 1 (temps que hem esperat) per mitjà de l'expressió:

$$\mathbf{X(\omega) = \omega - 10}, \text{ per a qualsevol } \omega \in \Omega$$

➤ Successos relacionats amb una variable aleatòria

Considerem la variable aleatòria X definida sobre Ω, i un valor x del seu rang R_X.

Representem per **{X = x}** al succés de Ω que conté els resultats per als quals la variable X pren el valor x, és a dir:

$$\{X = x\} = \{\omega\in\Omega \;/\; X(\omega) = x\}$$

Representem per **{X ≤ x}** al succés de Ω que conté els resultats per als quals X pren valors menors o iguals que x:

$$\{X \le x\} = \{\omega\in\Omega \;/\; X(\omega) \le x\}$$

Representem per **{a ≤ X ≤ b}** al succés que conté els resultats per als quals X pren tots els valors entre a i b:

$$\{a \le X \le b\} = \{\omega\in\Omega \;/\; a \le X(\omega) \le b\}$$

D'igual forma es defineixen els successos **{X < x}**, **{X ≥ x}**, **{a < X ≤ b}**, i altres semblants.

Exemple 2

Considerem de nou la variable aleatòria X: “nombre total de punts al llançar dos vegades un dau”.

- El succés {X = 2} es llegeix: “el nombre total de punts obtingut és de 2”, i conté tots els resultats per als quals la suma de punts és 2 (només un, en aquest cas):

  $$\{X = 2\} = \{(1, 1)\}$$

  Açò permet classificar tots els resultats de Ω en successos incompatibles:

  {X = 3} = {(1, 2), (2, 1)}
  {X = 4} = {(1, 3), (3, 1), (2, 2)}
  {X = 5} = {(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}
  {X = 6} = {(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)}
  {X = 7} = {(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}
  {X = 8} = {(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}
  {X = 9} = {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)}
  {X = 10} = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}
  {X = 11} = {(5, 6), (6, 5)}
  {X = 12} = {(6, 6)}

- El succés {X ≤ 5} es llegeix: “el nombre total de punts obtingut és menor o igual que 5”:

  $$\{X \le 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

  Aquest succés s’expressa també **{X ≤ 5} = {X = 2} ∪ {X = 3} ∪ {X = 4} ∪ {X = 5}**.

- El succés {3 < X ≤ 5} es llegeix: “el nombre total de punts obtingut és major que 3 i menor o igual que 5”:

  $$\{3 < X \le 5\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

  Aquest succés s’expressa també **{3 < X ≤ 5} = {X = 4} ∪ {X = 5}**.

1 Per a la variable aleatòria X de l’exemple 2, expressa els resultats que formen els successos:
(A) {X > 8} (B) {4 ≤ X ≤ 6} (C) {4 < X < 6} (D) {X < 3.5}
Expressa també els anteriors successos com a unió de successos de la forma {X = x}.

2 Troba les interseccions o unions dels successos següents per a la variable X de l’exemple 2:
(A) {X ≤ 5} ∩ {X ≥3} (B) {X ≤ 2} ∪ {X ≤ 3} (C) {X = 3} ∪ {X = 4} (D) {X = 2} ∩ {X = 4}

3 En l’experiment de llançar dues vegades una moneda expressa l’espai mostral, els valors de la variable aleatòria X: “nombre de cares al llançar dues vegades la moneda” i els successos de la forma {X = x}.

3.2 Distribució de probabilitat d'una v. a. discreta

La ***distribució de probabilitat*** d'una variable aleatòria discreta és qualsevol expressió que relaciona els valors de la variable i les probabilitats dels successos relacionats amb aquests valors.

La més utilitzada és l'anomenada ***funció de quantia*** d'una variable discreta. Coneguda aquesta funció, podem obtenir la probabilitat de qualsevol succés.

➢ Funció de quantia d'una variable discreta

Considerem una variable aleatòria discreta X definida sobre un espai mostral Ω, amb rang R_X; anomenem ***funció de quantia*** de la variable X a la funció f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x), \ \ per\ a\ tot\ x \in \mathbb{R}}$$

Exemple 3

Considerem de nou l'experiment aleatori de llançar dos daus de l'exemple 2. Obtenim la funció de quantia de la variable X: "nombre total de punts obtinguts amb els daus" i la seua representació gràfica.

L'espai mostral Ω de l'experiment aleatori conté 36 resultats:

(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (3,1) (2,2) (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) (1,5) (5,1)
(2,4) (4,2) (3,3) (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) (2,6) (6,2) (3,5)
(5,3) (4,4) (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) (4,6) (6,4) (5,5) (5,6) (6,5) (6,6)

Cadascun dels 36 resultats és igualment probable; per tant podem calcular les probabilitats amb la regla de Laplace:

$$\{X = 2\} = \{(1, 1)\} \quad \to \quad f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

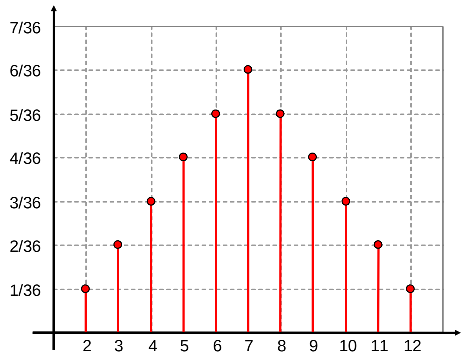
$$\{X = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad \to \quad f(3) = P(X = 3) = \frac{2}{36}$$

$$\{X = 4\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \quad \to \quad f(4) = P(X = 4) = \frac{3}{36}$$

$$\{X = 5\} = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\} \quad \to \quad f(5) = P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

D'aquesta forma omplim tots els valors de la següent taula. Observa que la suma de les probabilitats és 1. En la gràfica següent representem els valors de X a l'eix OX i les seues probabilitats a l'eix OY.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1



➢ Propietats

(A) $\mathbf{0 \le f(x) \le 1}$

(B) Només els valors del rang R_X tenen probabilitat no nul·la, o de forma equivalent:

$$\textbf{si } x \notin R_X \quad \textbf{aleshores} \quad f(x) = 0$$

(C) La suma de les probabilitats de tots els successos de la forma $\{X = x\}$ és igual a 1:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1$$

Exemple 4

Tenim un clauer amb 5 claus indistingibles, i 2 d'elles obrin una porta. Obtenim la funció de quantia de la variable:

X: "nombre d'intents fins a obrir la porta"

Suposem que cada vegada que no obrim amb una clau, la eliminem del clauer, aleshores el nombre màxim d'intents és de 4, en el cas d'elegir primer les 3 claus que no obrin. El rang de X és:

$$\mathbf{R_X = \{1, 2, 3, 4\}}$$

Per a calcular la probabilitat de cada valor del rang, definim els successos:

E_i : "tenim ***èxit*** (obrim) en l'elecció i-èsima",
F_i : "tenim ***fracàs*** (no obrim) en l'elecció i-èsima", $i = 1, 2, 3, 4$.

Deduïm:

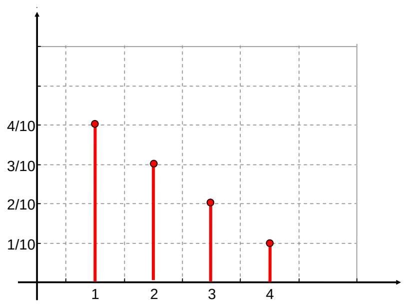
$f(1) = P(X = 1) = P(E_1) = \dfrac{2}{5}$ que correspon a elegir una de les 2 claus que obrin.

$$f(2) = P(X = 2) = P(F_1 \cap E_2) = P(F_1) \cdot P(E_2/F_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

que correspon a elegir primer una de les 3 claus que no obrin, i després una de les 2 claus que obrin, quan ja ens queden 4 claus. De la mateixa manera obtenim:

$$f(3) = P(X = 3) = P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

$$f(4) = P(X = 4) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap E_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$$



La funció de quantia de X és

x_i	1	2	3	4	Total
$f(x_i)$	4/10	3/10	2/10	1/10	1

4 Calcula el rang i la funció de quantia de la variable aleatòria de l'exemple anterior en el cas que tenim 4 claus, de les quals només una obri una porta, en els següents casos:
(A) Si després de cada intent fallit, eliminem la clau que no obri.
(B) Si després de cada intent fallit, no eliminem la clau que no obri.

5 La funció de quantia d'una variable aleatòria X es pot expressar com $f(x) = px$, per a $x = 1, 2, 3, 4, 5$.
(A) Calcula el valor de p perquè l'anterior funció siga de quantia.
(B) Calcula les següents probabilitats: $P(X \le 2)$, $P(X < 2)$, $P(X \ge 2)$, $P(X > 2)$, $P(1 \le X \le 3)$, $P(1 < X \le 3)$, $P(1 \le X < 3)$, $P(1 < X < 3)$, $P(0.5 < X \le 3.5)$.

3.3 Esperança d'una variable aleatòria discreta

Tots els conceptes que utilitzàvem per a resumir la informació continguda en la distribució de freqüències d'una variable estadística, com la mitjana, la variància, la mediana, etc., poden ser definits de forma anàloga per a resumir la informació que sobre una variable aleatòria a partir de la seua distribució de probabilitats. Ens anem a limitar a desenrotllar els conceptes d'***esperança** i **variància***, que són els més utilitzats per les seues moltes propietats matemàtiques.

➢ Definició d'esperança

Anomenem ***esperança*** de la variable aleatòria X, que representem per **E(X)**, a la suma de tots els valors de la variable multiplicats per les seues probabilitats:

$$\mathbf{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

sent $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ les respectives probabilitats dels valors $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Si utilitzem els sumatoris la definició d'esperança s'escriu de diferents formes:

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X = x) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f(x)}$$

L'esperança de X s'anomena també ***valor esperat***, ***valor mitjà*** o ***mitjana*** de X.

Com que la suma de les probabilitats de tots els valors del rang R_X és igual a 1:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

E(X) és una ***mitjana***, dels diferents valors de la variable X, ***ponderada*** per les seues probabilitats:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Exemple 5

En els seus inicis, el concepte d'esperança va aparèixer lligat als jocs d'atzar, perquè els jugadors volien conèixer el que “esperaven” guanyar en el joc. Considerem l'experiment aleatori de llançar dos daus i anotar el nombre de punts obtingut. Què esperem obtenir com a resultat?

L'espai mostral Ω de l'experiment aleatori conté 36 resultats:

(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (3,1) (2,2) (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) (1,5) (5,1)
(2,4) (4,2) (3,3) (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) (2,6) (6,2) (3,5)
(5,3) (4,4) (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) (4,6) (6,4) (5,5) (5,6) (6,5) (6,6)

Els possibles valors de la variable X: “nombre de punts al llançar dos daus” i les seues probabilitats estan en les dues primeres files de la taula següent. La tercera fila conté els càlculs inicials per a obtenir E(X):

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
$x_i \cdot p_i$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36	**7**

$$\mathbf{E(X)} = \sum x_i \cdot p_i = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \mathbf{7}$$

Exemple 6

Una loteria consta de 10 000 números (del 0000 al 9999) i reparteix els següents premis:

- 1000 €, si coincideix amb el número premiat.
- 100 €, si coincideix en les 3 últimes xifres.
- 10 €, si coincideix en les 2 últimes xifres.
- 1 €, si coincideix només en l'última xifra.

Si el preu de cada número és de 5 €, quina quantitat esperem guanyar?

Si anomenem X: "quantitat de diners rebut per número", el rang serà

$$\mathbf{R_X = \{0, 1, 10, 100, 1000\}}$$

Calculem la probabilitat de cada valor de la variable X.

Cadascuna de las xifres té probabilitat $\frac{1}{10}$ de coincidir amb la premiada, i $\frac{9}{10}$ de no coincidir; aleshores:

$P(X = 1000) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.0001$ (Encertar les 4 xifres.)

$P(X = 100) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.0009$ (Encertar les 3 últimes xifres i no la primera.)

$P(X = 10) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.009$ (Encertar les dues últimes xifres i no l'antepenúltima.)

$P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.09$ (Encertar l'última xifra i no la penúltima, les altres donen igual.)

$P(X = 0) = \frac{9}{10} = 0.9$ (No encertant l'última xifra no es rep cap premi.)

La taula de la funció de quantia és:

x	0	1	10	100	1000	Total
P(X = x)	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001	1

Observem que la suma de totes les probabilitats ha de ser igual a 1:

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.0001 = 1$$

L'esperança de la variable X és la suma de tots els valors de X multiplicats per les seues probabilitats:

$$\mathbf{E(X)} = 0 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.09 + 10 \cdot 0.009 + 100 \cdot 0.0009 + 1000 \cdot 0.0001 = \mathbf{0.37}$$

Esperem guanyar 0.37 €, i tenint en compte que ens gastem 5 € al comprar el nombre, en realitat esperem perdre 4.63 €.

6 Llancem un dau; si obtenim un nombre parell rebem tants euros com indica el nombre del dau però si obtenim un nombre imparell, paguem tants euros com indica el dau. Quants diners esperem guanyar?

7 Repeteix la pregunta de l'activitat anterior si llancem dos daus, observant la suma dels punts obtinguts.

8 Calcula el nombre mitjà de cares que esperem obtenir al llançar 4 vegades una moneda.

9 Calcula el nombre d'intents que esperem realitzar fins a obrir una porta amb les claus d'un clauer que té 5 claus, si sempre que elegim una clau que no obre la eliminem del clauer, en els següents casos:
(A El clauer conté una única clau que obre la porta.
(B) El clauer conté dos claus que obren la porta.

3.4 Variància d'una variable aleatòria discreta

En Estadística descriptiva la ***variància*** és un concepte utilitzat per a mesurar el grau de dispersió dels valors d'una variable respecte de la seua mitjana, i es defineix com la mitjana aritmètica de les diferències quadràtiques entre els valors de la variable i la seua mitjana. Per a les variables aleatòries tenim el mateix concepte, amb una definició semblant.

➢ Definició de variància i desviació típica

Anomenem ***variància*** de la variable aleatòria X, que representem per **Var(X)**, al valor esperat de les diferències quadràtiques entre els valors de X i la seua esperança E(X):

$$\mathbf{Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2}$$

Si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ són les respectives probabilitats dels valors $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\mathbf{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \cdots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n}$$

Anomenem ***desviació típica*** de X, **σ(X)**, a l'arrel quadrada positiva de la variància:

$$\mathbf{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

➢ Definició operativa de la variància

La fórmula que obtenim a continuació és molt més senzilla per a calcular la variància que la de la seua definició i és la utilitzada habitualment.

$$\mathbf{Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$$

on

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

i

$$\mathbf{E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n}$$

Per la fórmula del quadrat d'un binomi, expressem:

$$(x_i - E(X))^2 = x_i^2 - 2\,x_i \cdot E(X) + E(X)^2$$

Si substituïm aquesta expressió en $\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$ i separem en 3 sumands, obtenim:

$$\mathrm{Var(X)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i}_{\mathbf{E(X^2)}} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}_{\mathbf{E(X)}} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{\mathbf{1}}$$

Aleshores:

$$\mathrm{Var(X)} = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 \cdot 1 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Per tant $\mathbf{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$.

Exemple 7

Tenim una urna que conté 2 boles blanques i 3 boles negres. Calculem l'esperança de les variables:

X: "nombre de boles blanques en dues extraccions sense reemplaçament".

Y: "nombre de boles blanques en dues extraccions amb reemplaçament".

Calculem la funció de quantia de X. Si les extraccions són ***sense reemplaçament***:

$$P(X=0) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=1) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10} \text{ i } P(X=2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Calculem la funció de quantia de Y. Com que les extraccions són ***amb reemplaçament***:

$$P(Y=0) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

$$P(Y=1) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \text{ i } P(Y=2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Les dues variables tenen la mateixa esperança, però la distribució de probabilitat de X està més concentrada al voltant de la mitjana que la de Y, como veiem amb les seues funcions de quantia:

x	0	1	2	Total
P(X = x)	0.3	0.6	0.1	1

y	0	1	2	Total
P(Y = y)	0.36	0.48	0.16	1

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X=x) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$$

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot P(Y=y) = 0 \cdot 0.36 + 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.16 = 0.8$$

La major concentració de les probabilitats de la variable X es tradueix en el fet que la variància de X és menor que la de Y. Utilitzem la fórmula operativa de la variància per a comprovar aquest fet:

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot P(X=x) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot P(Y=y) = 0^2 \cdot \frac{9}{25} + 1^2 \cdot \frac{12}{25} + 2^2 \cdot \frac{4}{25} = 1.12$$

Les variàncies de X i Y són:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0.8^2 = 0.36 \qquad Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1.12 - 0.8^2 = 0.48$$

10 Calcula la funció de quantia, l'esperança i la variància de la variable X: "nombre de punts obtinguts al llançar un dau".

11 Repeteix les preguntes de l'activitat anterior, si el dau està fabricat de forma que tenim igual probabilitat d'obtenir l'1 que el 6, doble probabilitat d'obtenir el 2 o el 5, i quíntuple probabilitat d'obtenir el 3 o el 4.

12 Tenim dues urnes que contenen boles numerades de la següent forma:

- L'urna 1 conté 5 boles amb els nombres 1, 2, 3, 4, 5.
- L'urna 2 conté 10 boles amb els nombres 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Extraiem una bola de cada urna i definim les variables:

X: "nombre de la bola extreta de l'urna 1", i Y: "nombre de la bola extreta de l'urna 2".

Calcula les funcions de quantia de les dues variables, les seues esperances i variàncies.

3.5 La distribució binomial

És una de les distribucions de probabilitat més comuna en Estadística. Són molts els experiments aleatoris que presenten les condicions de la distribució binomial. Anem a expressar-les i a obtenir, de forma general, una fórmula per al càlcul de probabilitats en experiments aleatoris que les verifiquen.

D'un experiment aleatori considerem un succés que anomenem A.
Direm que tenim ***èxit*** si el succés A ocorre o es verifica, i ***fracàs*** si A no es verifica.

- La ***probabilitat d'èxit*** és **p** = P(A).
- La ***probabilitat de fracàs*** és **q** = 1 – P(A) = 1 – p.

De l'experiment fem **n proves independents**, anomenades experiències, i definim la variable aleatòria:

X: "nombre d'èxits en les n experiències"

Amb aquestes circumstàncies direm que la variable aleatòria X segueix una distribució de probabilitat anomenada ***binomial de paràmetres*** **n** i **p**, que representem per $\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

Un examen tipus test consta de 5 preguntes amb 4 alternatives per pregunta de les quals només una és correcta. Un estudiant decideix respondre totes les preguntes a l'atzar. Definim la variable aleatòria:

X: "nombre de preguntes encertades en el test de 5 preguntes".

Ens trobem en les condicions de la variable binomial:

- L'experiment consta de **5 experiències**, que són las 5 preguntes del test.
- **Les experiències són independents**, perquè les preguntes són contestades a l'atzar.
- En cada experiència anomenem **èxit** a encertar la resposta, i **fracàs** a no encertar-la; com que en cada pregunta hi ha 4 alternatives i només una correcta, les probabilitats d'èxit i fracàs són: $\mathbf{p} = \frac{1}{4}$ i $\mathbf{q} = \frac{3}{4}$.

Diem que la variable X segueix una distribució **binomial amb paràmetres n = 5** i $\mathbf{p} = \frac{1}{4}$: $\mathbf{X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)}$.

Característiques de la variable binomial

Si X segueix una distribució binomial, $\mathbf{X \sim B(n, p)}$:

- La **funció de quantia** és:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}, \text{ per a } \mathbf{x = 0, 1, 2, ..., n}$$

- **L'esperança** és el nombre d'experiències per la probabilitat d'èxit:

$$\mathbf{E(X) = n \cdot p}$$

- **La variància** és el nombre d'experiències per les probabilitats d'èxit i de fracàs:

$$\mathbf{Var(X) = n \cdot p \cdot q}$$

No anem a veure la demostració general dels anteriors resultats, però ho farem en el cas particular del següent exemple.

Exemple 8

Considerem de nou la variable aleatòria **X: "nombre de preguntes encertades en el test de 5 preguntes"** que segueix una distribució binomial, $\mathbf{X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)}$. Obtenim la seua funció de quantia, esperança i variància.

Com a exemple, deduïm la probabilitat del succés:

{X = 2}: "el nombre de preguntes encertades és de 2".

Anomenem: E_i: "en l'experiència i-èsima tenim èxit" $\rightarrow$ $P(E_i) = \mathbf{p = 1/4}$, per a i = 1, 2, 3, 4, 5.

F_i: "en l'experiència i-èsima tenim fracàs" $\rightarrow$ $P(F_i) = \mathbf{q = 3/4}$, per a i = 1, 2, 3, 4, 5.

Podem obtenir 2 èxits en les 5 proves aconseguint-los en les primeres 2 proves i fracàs en les 3 restants:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) \cdot P(F_5) = p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2 \cdot q^3 \qquad \mathbf{(1)}$$

Però hi ha 10 formes d'obtenir 2 èxits i 3 fracassos:

EEFFF EFEFF EFFEF EFFFE FEEFF FEFEF FEFFE FFEEF FFEFE FFFEE

Aquest nombre de formes és el de les ***permutacions amb repetició*** de 5 elements, dels quals 2 són iguals entre sí i els 3 restants també són iguals entre sí:

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2} = 10 \qquad \mathbf{(2)}$$

Com que qualsevol de les distintes formes té probabilitat $p^2 \cdot q^3$, aleshores la probabilitat d'obtenir 2 èxits en 5 proves és la probabilitat calculada en (1) multiplicada pel nombre de formes distintes de reordenar-los (2):

$$\mathbf{f(2) = P(X = 2) = \binom{5}{2}\, p^2 \cdot q^3} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = 0.2636$$

En general es demostra que:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}}, \quad \mathbf{per\ a\ x = 0, 1, 2, 3, 4\ i\ 5}.$$

Els valors d'aquestes probabilitats les expressem en la següent taula:

x	0	1	2	3	4	5	Total
P(X = x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	1

$$E(X) = \sum x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{243}{1024} + 1 \cdot \frac{405}{1024} + 2 \cdot \frac{270}{1024} + \cdots + 5 \cdot \frac{1}{1024} = \mathbf{\frac{5}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1.25}$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot \frac{243}{1024} + 1^2 \cdot \frac{405}{1024} + 2^2 \cdot \frac{270}{1024} + \cdots + 5^2 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{5}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}}$$

13 Calcula la probabilitat d'obtenir 5 cares en 8 llançaments d'una moneda, el nombre de cares que esperem obtenir en els 8 llançaments, i la variància.

14 Una màquina fabrica peces de forma independent. Aquestes peces poden ser defectuoses amb una probabilitat del 5%. Calcula la probabilitat que un lot de 10 peces continga:
(A) Dues defectuoses. (B) Alguna peça defectuosa. (C) Més d'una peça defectuosa.

15 En la situació de l'exemple 8, calcula la probabilitat d'aprovar l'examen tipus test contestant a l'atzar, si s'aprova encertant almenys la meitat de les preguntes.

Exemple 9

Efectuem 10 llançaments amb un dau de travesses que té tres cares amb el nombre 1, dues cares amb la X i una amb el 2. Com que cada llançament és **independent** dels altres i les probabilitats d'obtenir, respectivament, un 1, una X o un 2 són sempre **les mateixes** en cada llançament:

$$P(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(X) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(2) = \frac{1}{6}$$

Aleshores les següents variables aleatòries són **binomials**:

X: "nombre d'uns en els 10 llançaments" $\rightarrow \quad X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

Y: "nombre d'ics en els 10 llançaments" $\rightarrow \quad Y \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$

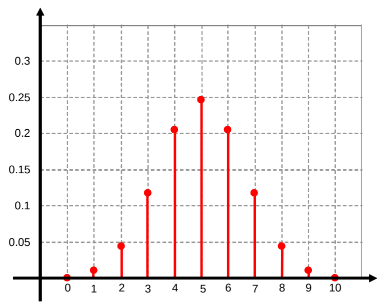
Z: "nombre de dosos en els 10 llançaments" $\rightarrow \quad Z \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

Les funcions de quantia i les gràfiques de les 3 variables són:

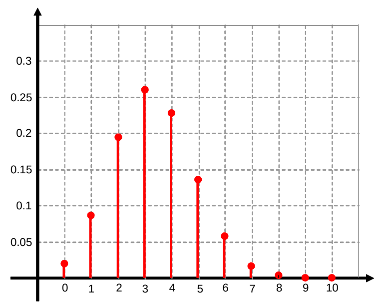
$$P(X = x) = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \text{ per a } x = 0, 1, 2, ..., 10$$

$$P(Y = y) = \binom{10}{y} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-y}, \text{ per a } y = 0, 1, 2, ..., 10$$

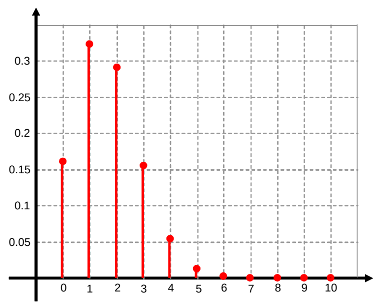
$$P(Z = z) = \binom{10}{z} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{z} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-z}, \text{ per a } z = 0, 1, 2, ..., 10$$



$X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$



$Y \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$



$Z \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

- La probabilitat d'obtenir 4 uns en els 10 llançaments és:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cong 0.2051$$

- La probabilitat d'obtenir 4 ics en els 10 llançaments és:

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \cong 0.2276$$

- La probabilitat d'obtenir 2 dosos en els 10 llançaments és:

$$P(Z = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \cong 0.2907$$

Exemple 10

Un jugador de bàsquet té una efectivitat del 75% en els llançaments a cistella. Efectua 5 llançaments, i suposem que el resultat de cada llançament que realitza és independent dels anteriors llançaments. Calculem les probabilitats que el jugador aconseguisca en 5 llançaments:
(A) Dues cistelles. (B) Alguna cistella. (C) Més de dues cistelles.

Ens trobem davant d'un experiment aleatori on la probabilitat d'èxit (aconseguir cistella) i de fracàs (no aconseguir-la) són:

$$p = P(E) = 0.75 \qquad q = P(F) = 0.25$$

Com que efectua 5 llançaments, l'experiment es realitza 5 vegades sent **independent** cada experiència. Definim la variable:

$$X: \text{“nombre d'èxits en 5 experiències”} \quad \rightarrow \quad X \sim B(5, 0.75)$$

(A) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^3 \cong 0.0879$

(B) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^5 = 1 - 0.25^5 \cong 0.999$

(C) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.75^4 \cdot 0.25 + \binom{5}{5} \cdot 0.75^5 \cong$

$\cong 0.2637 + 0.3955 + 0.2373 = 0.8965$

Exemple 11

En un autobús viatgen 10 persones que no es coneixen. Hi ha 5 parades fins la fi del trajecte i suposem igualment probable que qualsevol persona baixe en qualsevol parada. Calculem la probabilitat que en la pròxima parada baixen 2 persones.

Es tracta d'un experiment aleatori amb **10 experiències independents** (cada persona). Per a cada experiència anomenem èxit a baixar en la pròxima parada, i fracàs a no baixar. Com que hi ha 5 parades, aquestes probabilitats són, per a cada persona:

$$p = \frac{1}{5} \qquad q = \frac{4}{5}$$

Definim la variable aleatòria X: “nombre d'èxits en 10 experiències” $\rightarrow$ $X \sim B\left(10, \frac{1}{5}\right)$

La probabilitat que 2 persones baixen en la pròxima parada és la probabilitat d'obtenir 2 èxits:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cong 0.3020$$

16 Un motorista es troba en el seu trajecte un total de 10 semàfors no sincronitzats. Cada semàfor està en verd 3 minuts i en roig 2 minuts. Calculem les probabilitats que el motorista es trobe:
(A) Tots els semàfors en verd. (B) Dos dels 10 semàfors en verd.
(C) Algun dels 10 semàfors en verd. (D) Més de 2 semàfors en verd.

17 En l'exemple 10, siga p entre 0 i 1 el valor de la probabilitat d'aconseguir una cistella en un intent. Calcula el valor de p perquè la probabilitat d'aconseguir alguna cistella en 10 intents siga de 0.9.

18 En l'exemple 11, calcula les probabilitats que en la pròxima parada:
(A) No baixe cap persona. (B) Baixen 3 persones.
(C) Baixe alguna persona. (D) Baixen menys de 8 persones.

3.6 La distribució hipergeomètrica

Considerem una ***població finita*** de **N** elements ***distingibles*** entre si, i suposem que:

- **M** d'ells, anomenats ***èxits***, tenen una característica d'interès A,
- la resta, **N – M**, no tenen aquesta característica, i els anomenem ***fracassos***.

Elegim a l'atzar i ***sense reemplaçament*** **n** elements de la població; interessa conèixer el nombre d'èxits obtinguts. Per a això, definim la següent variable aleatòria:

X: "*nombre d'èxits obtinguts en la mostra de n elements*"

Amb aquestes condicions, la variable X diem que segueix una distribució de probabilitat ***hipergeomètrica*** amb paràmetres **N**, **M** i **n**, representada per $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$, on:

N és el ***nombre d'elements de la població***,
M és el ***nombre d'èxits*** existents en la població i
n és el ***nombre d'elements de la mostra***.

➢ Característiques de la variable hipergeomètrica

Si X segueix una distribució hipergeomètrica $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$:

- La **funció de quantia** de X, per a $\mathbf{x = 0, 1, 2, ..., n}$, $\mathbf{x \le M}$ i $\mathbf{n - x \le N - M}$, és:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

- Anomenem $\mathbf{p = M/N}$ a la probabilitat d'èxit en una extracció, i $\mathbf{q = 1 - p}$

$$\mathbf{E(X) = n \cdot p = n \cdot \frac{M}{N}} \qquad \mathbf{Var(X) = n \cdot p \cdot q \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

La variable $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$ també es defineix **X: "nombre d'èxits en n extraccions sense reemplaçament"**.

Calculem la probabilitat P(X = x) amb la regla de Laplace. L'espai mostral de l'experiment aleatori és el conjunt de tots els grups que contenen n elements dels N de la població; per tant:

$$\textbf{casos possibles} = \binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}$$

Com que tenim $\binom{M}{x}$ formes d'elegir x èxits entre els M existents en la població i $\binom{N-M}{n-x}$ formes d'elegir n – x fracassos entre els N – M existents, aleshores els casos favorables són

$$\textbf{casos favorables} = \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{x}} \cdot \binom{\mathbf{N-M}}{\mathbf{n-x}}$$

i la probabilitat d'obtenir x èxits és:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \mathbf{\frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

Exemple 12

- Tenim una baralla espanyola amb 40 cartes i considerem la variable hipergeomètrica:

X: "nombre de copes obtingudes al repartir 5 cartes **sense reemplaçament**"

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Nombre d'elements de la població (cartes):} & N = 40 \\ \text{Nombre total d'èxits (copes en la baralla):} & M = 10 \\ \text{Nombre d'elements extrets (cartes repartides):} & n = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{X \sim H(40, 10, 5)}$$

La probabilitat d'obtenir 3 copes al repartir 5 cartes és:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{5}} \simeq 0.0793$$

L'esperança i variància són:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{10}{40} = 1.25 \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot q \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 10 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{40} \cdot \frac{40-5}{40-1} = 1.6827$$

- Considerem la variable Y: "nombre de copes obtingudes al repartir 5 cartes **amb reemplaçament**".

Esta variable no és hipergeomètrica, sino **binomial**: Cada extracció pot ser interpretada como una experiència **independent** de les demás, perquè les extraccions són **amb reemplaçament**, i les probabilitats d'èxit i fracàs són, per a qualsevol extracció, **les mateixes**, ja que sempre hi ha 10 copes i 40 cartes en total:

$$p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad q = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

Deduïm que Y segueix una distribució **binomial**: $\mathbf{Y \sim B\left(5\,,\,\frac{1}{4}\right)}$.

La probabilitat d'obtenir 3 copes al repartir 5 cartes amb reemplaçament és:

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \simeq 0.0879$$

L'esperança i variància són:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1.25 \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0.9375$$

19 Efectuem 10 extraccions sense reemplaçament d'una urna que conté 5 boles blanques, 12 negres i 8 roges. Calcula les probabilitats de:
(A) Obtenir 2 boles blanques. (B) Obtenir 2 boles negres. (C) Obtenir 2 boles roges.

20 En una classe hi ha 10 xics i 15 xiques. Volem formar a l'atzar un grup de 5 persones de la classe per a realitzar un treball. Calcula la probabilitat que el grup:
(A) Estiga formats només per xics. (B) Estiga format només per xiques.
(C) Continga més xics que xiques. (D) Continga més xiques que xics.

21 Si realitzem una aposta senzilla de la loteria primitiva (elegim a l'atzar 6 nombres entre l'1 i el 49), calcula la probabilitat d'obtenir premi (s'obté premi al encertar 3 o més nombres).

22 La primera prova d'un examen d'oposicions consisteix a triar a l'atzar 3 temes d'una col·lecció de 100 i respondre bé un dels tres per a superar la prova. Un estudiant es prepara 30 temes dels 100 de la col·lecció. Calcula les probabilitats de:
(A) Elegir un dels temes que s'ha preparat. (B) Elegir 2 dels temes que s'ha preparat.
(C) Quina probabilitat té de superar la prova?

Problemes del capítol 3

1 Una variable aleatòria té una distribució de probabilitat donada per la taula següent:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.18	0.25	0.3	0.12	m

(A) Obtén el valor de m para que la anterior tabla represente una distribució de probabilitat.
(B) Representa gràficament la funció de quantia: $f(x) = P(X = x)$.
(C) Calcula E(X) i Var(X).
(D) Calcula $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, …, $P(X \leq 5)$.
(E) La funció definida per $F(x) = P(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ s'anomena ***funció de distribució*** de la variable X. Representa-la gràficament.

2 La probabilitat que un tirador faça blanc en una diana és $p = 0.4$, i suposem que cada llançament és independent dels anteriors. Calcula la probabilitat de:
(A) Fer 2 blancs en 5 tirs.
(B) Fer algun blanc en 5 tirs.
(C) Fer almenys 3 blancs en 5 tirs.
(D) Necessitar 5 tirs per a fer blanc per primera vegada.

3 Suposant que cada fill té una probabilitat 0.51 de ser xiquet, i que l'elecció a l'atzar del sexe és independent, calcula la probabilitat que:
(A) Una família amb 5 fills tinga 3 xiquets.
(B) Una família amb 5 fills tinga 3 xiquetes.

4 Un aparell elèctric consta de 5 peces diferents connectades de tal forma que l'aparell funciona si totes i cadascuna de les 5 peces actuen amb èxit. La probabilitat que cada peça actue amb èxit és 0.9, i cada peça funciona de forma independent.
(A) Calcula la probabilitat que l'aparell funcione.
(B) I si l'aparell funcionara sempre que actuen amb èxit almenys 4 de les seues 5 peces?
(C) I si l'aparell funcionara sempre que actúe amb èxit alguna de les seues peces?

5 Un fabricant de circuits electrònics afirma que la proporció d'unitats defectuoses de cert component que produeix és del 5%. Un comprador d'aquests components revisa 20 unitats seleccionades a l'atzar i troba 4 defectuoses.
(A) Si l'afirmació del fabricant fora certa, i podem suposar independència en la fabricació dels components, quina és la probabilitat del que li ocorre al comprador?
(B) A la vista del resultat anterior, creus que el fabricant haurà dit la veritat?

6 Suposant que és igualment probable nàixer en qualsevol mes de l'any i els naixements són independents, calcula la probabilitat que l'aniversari de 5 persones siga:
(A) En el mes de gener.
(B) En el mateix mes.
(C) Entre gener i març.
(D) En el mateix trimestre.
(E) Al gener o al febrer o al març.
(F) Entre gener i febrer, però de forma que queden lliures exactament 10 mesos.

7 En una reunió hi ha 10 homes i 15 dones. Elegim a l'atzar a 5 persones de la reunió. Calcula la probabilitat que:
(A) Hi haja 2 homes entre les persones elegides.
(B) Hi haja almenys 3 homes entre les persones elegides.
(C) Hi haja algun home entre les persones elegides.
(D) Calcula també el nombre mitjà d'homes entre les 5 persones elegides.

8 Suposem que la probabilitat que una persona contracte una pòlissa d'assegurances després de la visita d'un agent és constant i igual a 0.05.
(A) Calcula la probabilitat que després de visitar a 10 persones distintes, que no es coneixen, l'agent haja contractat almenys una pòlissa d'assegurances.
(B) Quantes visites haurà de realitzar l'agent perquè la probabilitat de contractar almenys una pòlissa siga 0.9?

9 Extraiem sense reemplaçament (fes-ho també amb reemplaçament) 3 cartes d'una baralla espanyola. Calcula les probabilitats de:

(A) Obtenir dues copes. (B) Obtenir alguna copa.
(C) Obtenir un or. (D) Obtenir dues copes i un or.
(E) Obtenir més d'un or. (F) Obtenir un or, una copa i un bast.

10 Un joc d'atzar consisteix a llançar 3 monedes, si ixen 3 cares o 3 creus es guanyen 18 euros, i si s'obté qualsevol altre resultat es paguen 6 euros. És equitatiu el joc? (Un joc és equitatiu si la mitjana és nul·la).

11 Una pista esportiva està il·luminada per 20 focus lluminosos, que funcionen de forma independent. Cada focus té una probabilitat $p = 0.01$ de fondre's en una jornada. Calcula la probabilitat que durant una jornada:
(A) No es fonga cap focus. (B) Es fonga algun focus. (C) Es fonguen més de 2 focus.

12 Extraiem sense reemplaçament 3 cartes d'una baralla espanyola. Calcula la funció de quantia i l'esperança de les variables aleatòries següents:
(A) X: "nombre de copes obtingut". (B) Y: "nombre de sotes obtingut".

13 Una màquina produeix un tipus d'articles de forma independent. Se sap per llarga experiència que la qualitat de fabricació (proporció d'articles defectuosos fabricats) d'un determinat producte és $p = 0.1$. Per a controlar la qualitat, s'interromprà el procés de fabricació si al inspeccionar 10 articles agafats a l'atzar es troben almenys 2 defectuosos.
(A) Calcula la probabilitat de trobar 3 articles defectuosos en els 10 inspeccionats.
(B) Calcula la probabilitat que la producció es detinga.
(C) Si la qualitat canvia a $p = 0.3$, i s'inspeccionen 10 articles després del canvi, quina és la probabilitat que la producció es detinga?

14 Una màquina fabrica articles de forma independent. La probabilitat que un article resulte defectuós és $p = 0.01$.
(A) Calcula la probabilitat de trobar algun article defectuós al inspeccionar 10 articles de la producció.
(B) Calcula el nombre d'articles que cal inspeccionar perquè la probabilitat de trobar algun defectuós siga almenys de 0.95.

15 Un examen versa sobre 10 temes. Consisteix a triar 2 temes a l'atzar i contestar-los. Un tema ben contestat val 10 punts, un regularment contestat en val 5 i un mal contestat val 0 punts. Un estudiant es prepara perfectament 5 temes, regularment 3 i els altres 2 no se'ls prepara. Definim la variable aleatòria X: "puntuació obtinguda en l'examen". Calcula els possibles valors de X, les seues probabilitats i la nota que espera obtenir l'estudiant.

16 Una caixa conté 9 boles blanques i una bola roja. Calcula el nombre mitjà d'extraccions (sense reemplaçament) fins a obtenir la bola roja.

17 Dues persones juguen a cara i creu, i han convingut a continuar la partida fins que tant la cara com la creu hagen aparegut almenys 3 vegades. Calcula la probabilitat que el joc no s'acabe quan han realitzat 10 tirades.

18 Suposem que per a persones d'una determinada edat, la probabilitat que es moriguen per una malaltia contagiosa és 0.001. Quantes persones d'aquest grup poden exposar-se a la malaltia de manera que la probabilitat que cap persona moriga siga d'almenys 0.95?.

19 Un lot de 30 peretes en conté 2 defectuoses. S'obté una mostra aleatòria sense reemplaçament de grandària 5.
(A) Calcula la probabilitat que la mostra continga almenys una pereta defectuosa.
(B) Calcula el nombre n de peretes que caldrà inspeccionar perquè la probabilitat de trobar almenys una pereta defectuosa siga de 0.8.

20 Un pare té en la seua cartera 5 bitllets de 10 €, 4 de 20 € i un de 500 €. Agafa un bitllet a l'atzar i li'l dona al seu fill. Calcula la quantitat que espera rebre el seu fill.

21 Repeteix la pregunta anterior si el pare dona dos bitllets a l'atzar al seu fill.

22 Un examen tipus test consta de 10 preguntes amb 4 alternatives per pregunta, de les quals només una és correcta. Un estudiant decideix respondre totes les preguntes a l'atzar.
(A) Calcula el nombre de preguntes que espera encertar i el de preguntes que espera fallar, i la variància del nombre d'encerts i del nombre d'errades.
(B) Si la puntuació de l'examen és igual al nombre d'encerts menys un terç del nombre d'errades, calcula la probabilitat d'obtenir almenys 5 punts, i el nombre de punts que esperem obtenir en l'examen.

Solucions de les activitats del capítol 3

1. (A) $\{X > 8\} = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} = \{X = 9\} \cup \{X = 10\} \cup \{X = 11\} \cup \{X = 12\}$. (B) $\{4 \leq X \leq 6\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} = \{X = 4\} \cup \{X = 5\} \cup \{X = 6\}$. (C) $\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\} = \{4 < X < 6\} = \{X = 5\}$.
(D) $\{X < 3.5\} = \{X \leq 3\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$. **2.** (A) $\{3 \leq X \leq 5\}$. (B) $\{X \leq 3\}$. (C) $\{3 \leq X \leq 4\}$. (D) $\emptyset$.

3. $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$; $R_X = \{0, 1, 2\}$; $\{X = 0\} = \{KK\}$, $\{X = 1) = \{CK, KC\}$, $\{X = 2\} = \{CC\}$.

4. (A) $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(X = n) = \frac{1}{4}$, $n = 1, 2, 3, 4$. (B) $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $P(X = n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. (A) p = 15. (B) $\frac{3}{15}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{14}{15}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{6}{15}$. **6.** 0.5 €. **7.** 0 €. **8.** 2. **9.** (A) 3. (B) 2.

10. $P(X = n) = 1/6$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $E(X) = 7/2$; $Var(X) = 35/12$.

11.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/16	2/16	5/16	5/16	2/16	1/16

$E(X) = 7/2$. $Var(X) = 3/2$.

12.

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

y	1	2	3	4	5
P(Y = y)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$E(X) = E(Y) = 3$, $Var(X) = 2$, $Var(Y) = 6/5$. **13.** $P(X = 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0.21875$, $E(X) = 4$, $Var(X) = 2$.

14. (A) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^8 = 0.0746$. (B) $P(X \geq 1) = 1 - 0.95^{10} = 0.401263$. (C) $P(X > 1) = 0.0861$.

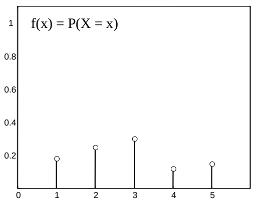
15. $\frac{106}{1024}$. **16.** (A) $0.6^{10} = 0.006$. (B) $\binom{10}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^8 = 0.0106$. (C) $1 - 0.4^{10} = 0.9999$. (D) 0.9877.

17. $P = 1 - \sqrt[10]{0.1}$. **18.** (A) $0.8^{10} = 0.1074$. (B) $\binom{10}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^7 = 0.2013$. (C) 0.8926. (D) 0.9999.

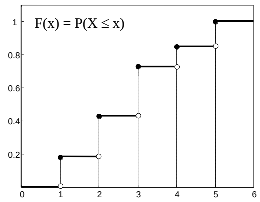
19. (A) 0.3853. (B) 0.026. (C) 0.2082. **20.** (A) 0.0047. (B) 0.0565. (C) 0.3012. (D) 0.6989. **21.** 0.0186.
22. (A) 0.4481. (B) 0.1883. (C) 0.6615.

Solucions dels problemes del capítol 3

1. (A) m = 0.15. (B) E(X) = 2.81; Var/X) = 1.6539. (B) $P(X \le 1) = 0.18$; $P(X \le 2) = 0.43$; $P(X \le 3) = 0.73$; $P(X \le 4) = 0.85$; $P(X \le 1) = 1$.



$$\text{(E)}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.18 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0.43 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0.73 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0.85 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$



2. (A) 0.3456. (B) 0.9222. (C) 0.3174. (D) 0.0518. **3.** (A) 0.3185. (B) 0.306. **4.** (A) 0.59049. (B) 0.91854. (C) 0.99999. **5.** (A) 0.0133. (B) No. **6.** (A) $\left(\frac{1}{12}\right)^5$. (B) $\left(\frac{1}{12}\right)^4$. (C) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$. (D) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$. (E) $3\left(\frac{1}{12}\right)^5$. (F) $\left(\frac{1}{6}\right)^5 - 2\left(\frac{1}{12}\right)^5$ **7.** (A) 0.3854. (B) 0.3012. (C) 0.9435. (D) 2. **8.** (A) 0.4013. (B) 45. **9.** (A) 0.1366 (0.1406). (B) 0.5891 (0.5781). (C) 0.4403 (0.4219). (D) 0.0455 (0.0469). (E) 0.1488 (0.1562). (F) 0.1012 (0.0937). **10.** Sí. **11.** (A) 0.8179. (B) 0.1821. (C) 0.001.

12. (A)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.4109	0.4403	0.1366	0.0121

E(X) = 3/4.

(B)

y_i	1	2	3	4
$f(y_i)$	0.7227	0.2551	0.0219	0.0004

E(Y) = 3/10.

13. (A) 0.0574. (B) 0.2639. (C) 0.8507. **14.** (A) 0.0956. (B) 299.

15.

y_i	20	15	10	5	0
$f(y_i)$	10/45	15/45	13/45	6/45	1/45

E(X) = 13.

16. 5.5. **17.** $\frac{7}{64}$. **18.** 51. **19.** (A) 0.3103. (B) Almenys 17. **20.** 63 €. **21.** 126 €. **22.** (A) E(A) = 2.5, E(F) = = 7.5; Var(A) = Var(F) = 1.875. (B) $P(P \ge 5) = 0.0035$; E(P) = 0.