Matemáticas para bachillerato

Matemáticas para bachillerato es el resultado de mucha ilusión, trabajo, tiempo y gran experiencia docente. Contiene todos los conocimientos matemáticos necesarios para comenzar los estudios de Grado de cualquier Universidad.

Este proyecto conforma los libros de matemáticas de primero y segundo de bachillerato de las modalidades de Ciencias y Tecnología y de Ciencias Sociales, según el currículum que actualmente se estudia en el estado español, y están distribuidos en 3 volúmenes por curso:

	Primer curo	Segundo curo
Modalidad de Ciencias y Tecnología	Álgebra y Geometría	Álgebra lineal y Geometría
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Estadística	Cálculo de probabilidades
Modalidad de Ciencias Sociales	Álgebra	Álgebra lineal
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Cálculo de probabilidades y Estadística	Cálculo de probabilidades e Inferencia estadística

Contenido de Matemáticas para bachillerato

- **Todo el currículum** de los bachilleratos del estado español.
- Más de 1500 **ejemplos resueltos** de los epígrafes importantes.
- Más de 8000 problemas entre **actividades y ejercicios** propuestos.
- Totas las actividades y ejercicios propuestos tienen la **solución** al final del capítulo correspondiente.

Estructura y concepción del libro Matemáticas para bachillerato

Cada pareja de páginas consecutivas (8 y 9, 10 y 11…) **se conciben como una porción cerrada** del capítulo; ningún concepto quedará tratado a medias en ellas, y contiene ejemplos resueltos y actividades para resolver.

Nunca hay texto vertical paralelo. Siempre se lee de arriba hacia abajo, sin distracciones.

Para facilitar el estudio distinguimos con formas y colores:

- **Definiciones**: Siempre con recuadros de color verde, sin relleno.
- **Propiedades y teoremas**: Siempre con recuadros rellenos de color verde. Cuando hemos considerado conveniente incluir la demostración de una propiedad lo hacemos fuera del recuadro, resaltada por la izquierda con una barra vertical de color verde.
- **Ejemplos resueltos**: Lo más abundante en el libro; resueltos con detalle, para que el alumno aprenda de ellos. Muchos son aplicaciones a otras ciencias, como la Física, Biología, Economía, Topografía, por citar las más aplicadas. Están resaltados por la izquierda con una barra amarilla y numerados por capítulo.
- **Actividades propuestas**: Al menos al finalizar cada pareja de páginas (10 y 11, 12 y 13…) incluimos un recuadro, relleno de color naranja, con actividades numeradas por capítulo y relacionadas con la teoría explicada en esas páginas y con los ejemplos resueltos en ellas.
- **Problemas de recapitulación**: Además, al finalizar cada capítulo incluimos una amplia colección de problemas propuestos para acabar de reafirmar los conceptos del capítulo.
- **Soluciones**: Cada capítulo termina con las soluciones de totas las actividades y problemas propuestos en él.

Es un proceso de asimilación de los elementos conceptuales necesarios para interpretar, enunciar y resolver los problemas que plantea el estudio de los fenómenos propios de las diversas ciencias. El conocimiento matemático se organiza en forma de sistema deductivo, de modo que definiciones, postulados, propiedades, teoremas y métodos se articulan lógicamente para dar validez a las intuiciones y técnicas matemáticas. Todo este proceso culmina en ejemplos y problemas.

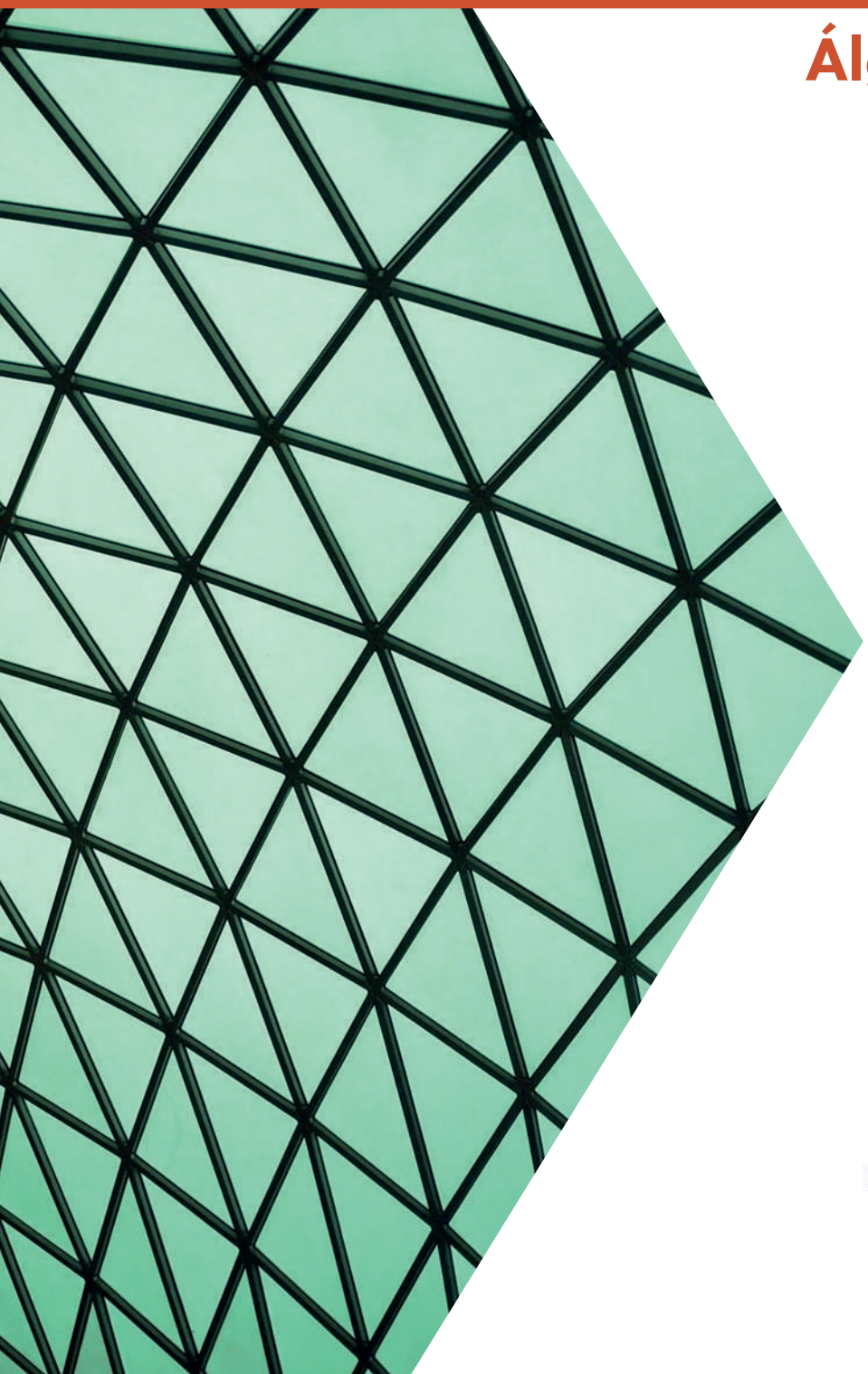
El lenguaje formal se introduce lentamente, pero resulta imprescindible para no perder la línea conductora de la solución del problema. Incluimos demostraciones de algunas propiedades siempre que sean adecuadas al nivel aunque no sean necesarias para el desarrollo del texto.

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Álgebra lineal



educàlia editorial

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Álgebra lineal

educàlia
editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-06-0

Depósito legal: V-3242-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Todos los derechos reservados. No está permitida la reimpresión de ninguna parte de este libro, ni de imágenes ni de texto, ni tampoco su reproducción, ni utilización, en cualquier forma o por cualquier medio, bien sea electrónico, mecánico o de otro modo, tanto conocida como los que puedan inventarse, incluyendo el fotocopiado o grabación, ni está permitido almacenarlo en un sistema de información y recuperación, sin el permiso anticipado y por escrito del editor.

Alguna de las imágenes que incluye este libro son reproducciones que se han realizado acogiéndose al derecho de cita que aparece en el artículo 32 de la Ley 22/18987, del 11 de noviembre, de la Propiedad intelectual. Educàlia Editorial agradece a todas las instituciones, tanto públicas como privadas, citadas en estas páginas, su colaboración y pide disculpas por la posible omisión involuntaria de algunas de ellas.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 4

Programación lineal

4.1 Ecuación lineal con 2 incógnitas: solución gráfica
- Ecuación punto-pendiente de una recta
- Recta que pasa por dos puntos
- Interpretación geométrica de los sistemas lineales 2×2

4.2 Inecuación lineal con 2 incógnitas: solución gráfica
- Soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas

4.3 Sistemas de inecuaciones lineales: solución gráfica

4.4 Un problema de programación lineal

4.5 El óptimo de un problema de programación lineal
- Las rectas de nivel
- Conclusiones generales

4.6 Programación lineal entera

4.7 Problemas de transporte

4.1 Ecuación lineal con 2 incógnitas: solución gráfica

En el capítulo 1 vimos que una ecuación lineal con dos incógnitas del tipo **ax + by = c**, siendo a, b y c números reales cualesquiera con a y b no nulos a la vez, tiene siempre infinitas soluciones. La representación gráfica de las soluciones es una línea recta. Recordamos conceptos estudiados en el curso anterior.

- La ecuación **ax + by = c** se llama ***ecuación implícita*** o ***ecuación general*** de una recta.

  Si a = 0, b ≠ 0, se trata de una recta horizontal: **0x + by = c** ⇔ **y = c/b**
  Si a ≠ 0, b = 0, se trata de una recta vertical: **ax + 0y = c** ⇔ **x = c/a**

- La ecuación **y = mx + n** es la ***ecuación explícita*** de una recta no vertical de ***pendiente*** **m** y ***ordenada en el origen*** **n**.

  Si m = 0, la recta es horizontal: **y = 0x + n**.

  Las rectas verticales no tienen pendiente.

Ejemplo 1

Representamos gráficamente la recta de **ecuación implícita**:

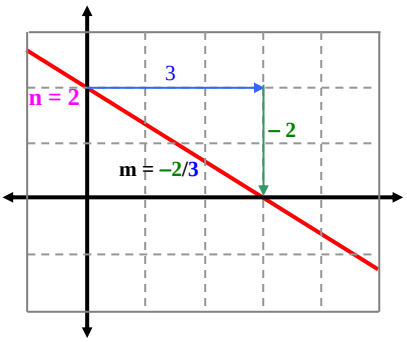
$$2x + 3y = 6$$

Si despejamos y obtenemos su **ecuación explícita**:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Su pendiente y ordenada en el origen son respectivamente:

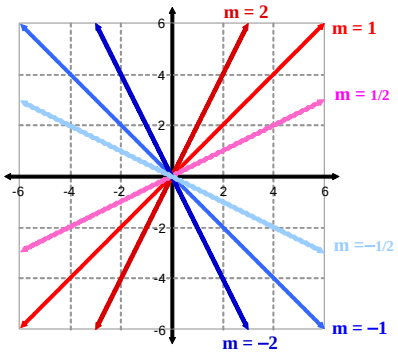
$$m = -\frac{2}{3} \qquad n = 2$$

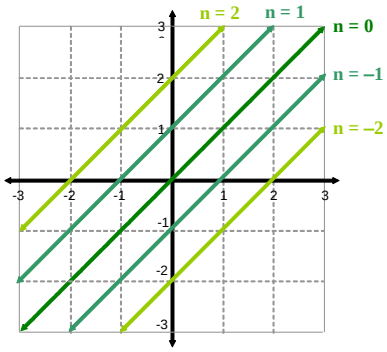


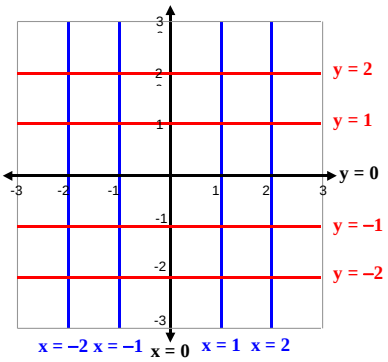
- En la primera figura de abajo representamos gráficas de rectas de ecuación explícita **y = mx**, para m = 0, ±1/2, ± 1, ±2. Observa que las rectas pasan todas por el origen debido al valor **n = 0** fijo en todas ellas.
- En la segunda figura tenemos representadas rectas de ecuación explícita **y = x + n** para n = 0, ±1, ±2. Manteniendo el mismo valor de la pendiente m (**m = 1**) las rectas son todas paralelas.
- En la tercera figura tenemos representadas en azul 5 rectas verticales y en rojo 5 rectas horizontales de ecuaciones respectivas

  x = k, para k = 0, ±1, ±2 **y = k**, para k = 0, ±1, ±2.

  Las rectas horizontales tienen pendiente m = 0 mientras que las verticales no tienen pendiente.







➢ Obtención de las ecuaciones de una recta

Para tener definida una recta es suficiente conocer un punto de la misma y su pendiente. Veamos cómo queda determinada en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,6) y tiene como pendiente m = –4.

Puesto que tiene pendiente se trata de una recta que no es vertical. Su ecuación explícita será:

$$y = mx + n \quad \Rightarrow \quad y = -4x + n$$

Puesto que el punto P(3, 6) pertenece a la recta verifica su ecuación:

$$x = 3,\ y = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = -4 \cdot 3 + n \quad \Rightarrow \quad 18 = n$$

La ecuación es **y = –4x + 18**.

Otra forma de hallarla es escribiendo la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - \mathbf{y_0} = \mathbf{m}\,(x - \mathbf{x_0}) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = -4(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = -4x + 12 \quad \Rightarrow \quad y = -4x + 18$$

Por dos puntos del plano siempre pasa una única recta. Excepto en el caso de una recta vertical, en la que todos sus puntos tendrían la misma coordenada x, podemos obtener la ecuación explícita de dicha recta resolviendo un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 3

Calculamos la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos P(2, 7) y Q(4, 11).

Llamamos r: y = mx + n a la ecuación explícita de la recta que pasa por P y Q.

- Si $P(2, 7) \in r \rightarrow$ verifica su ecuación: $7 = 2m + n$
- Si $Q(4, 11) \in r \rightarrow$ verifica su ecuación: $11 = 4m + n$

$$\left.\begin{array}{l} 7 = 2m + n \\ 11 = 4m + n \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 7 - 2m \\ n = 11 - 4m \end{array}\right.$$

Por igualación: $7 - 2m = 11 - 4m \rightarrow$ **m = 2** y **n = 3**

La ecuación explícita es **r: y = 2x + 3** y la ecuación implícita es **r: –2x + y = 3**.

1 Comprueba si el punto P(–2, 5) pertenece a la recta r: 2x – 3y = 3 o a la recta s: y = 3x + 11.

2 Comprueba si las siguientes parejas de rectas son paralelas o se cortan en un punto de dos formas distintas, comparando sus pendientes y estudiando la compatibilidad del sistema de ecuaciones que constituyen:
(A) r: 3x + 2y = 5, s: y = 2x –1 (B) r: 4x – y = 2, s: y = 4x (C) r: 2x – 5y = 1, s: 4x – 10y = 2

3 Obtén la ecuación explícita, la ecuación implícita y la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:
(A) P(2, –3) y Q(3, 4) (B) P(3, 2) y Q(6, 4) (C) P(1, 3) y Q(5, 3) (D) P(1, 3) y Q(1, 5)

4 Obtén la ecuación de la recta horizontal y de la recta vertical que pasa por el punto:
(A) A(2, 5) (B) B(0, 0) (C) C(0, –3) (D) D(–1, 0) (E) E(a, b)

5 Obtén la ecuación de las rectas paralelas a r: 2x – 3y = 5 que pasan por los puntos A(2, 3) y O(0, 0).

4.2 Inecuación lineal con 2 incógnitas: solución gráfica

Sabemos que una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión del tipo **ax + by = c**, siendo a, b y c números reales cualesquiera, y dicha ecuación tiene siempre infinitas soluciones que se representan gráficamente en una recta.

Una ***inecuación lineal con dos incógnitas*** es cualquiera de las siguientes expresiones:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by \geq c$$

➢ Soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas

Una solución de una inecuación lineal con dos incógnitas es **cualquier pareja de números reales**, uno para cada incógnita, **que verifiquen dicha inecuación**.

Ejemplo 4

Consideramos la inecuación lineal $2x + 4y < 8$.

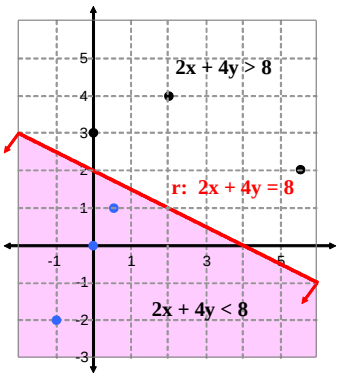
Comprobamos que las parejas de números reales (0, 0), (0.5, 0) y (–1, –2) verifican la inecuación anterior y, por tanto, son soluciones de ella; en cambio las parejas (0, 3), (2.5, 4) y (6, 2) no la verifican y no son solución de la misma:

- **(0, 0)** → $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 8$
- **(0.5, 1)** → $2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 1 < 8$
- **(–1, –2)** → $2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) < 8$
- **(0, 3)** → $2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 > 8$
- **(2, 4)** → $2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 > 8$
- **(5.5, 2)** → $2 \cdot 5.5 + 4 \cdot 2 > 8$

Si representamos estas soluciones en el plano observamos que todas ellas se sitúan en el mismo semiplano determinado por la ecuación **2x + 4y = 8** que constituye los puntos de una recta. En cambio, las parejas que no son solución de la inecuación se sitúan en el otro semiplano, no coloreado en el dibujo:

r: 2x + 4y = 8

x	y
–2	3
0	2
4	0



Los puntos del plano (x, y) que verifican la ecuación lineal con dos incógnitas

$$ax + by = c$$

constituyen una recta que divide al plano en dos semiplanos, llamados ***semiplanos abiertos,*** correspondientes a los puntos (x, y) que verifican respectivamente una de las inecuaciones

$$ax + by > c \qquad ax + by < c$$

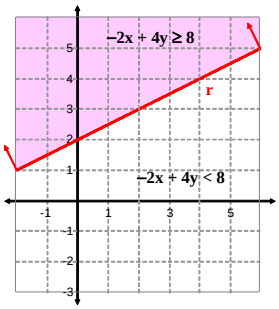
Los símbolos ≥ y ≤ en la inecuación indican que **la solución incluye a los puntos de la recta**, en cuyo caso decimos que la solución de la inecuación constituye un ***semiplano cerrado***.

Ejemplo 5

- Representamos gráficamente el conjunto de soluciones de la inecuación lineal $-2x + 4y \geq 8$.
  Las soluciones de la inecuación $-2x + 4y \geq 8$ son las soluciones de la inecuación $-2x + 4y > 8$ junto con las soluciones de la ecuación $-2x + 4y = 8$. Representamos, en primer lugar, la ecuación (recta):

r: $-2x + 4y = 8$

x	y
–2	1
0	2
4	4



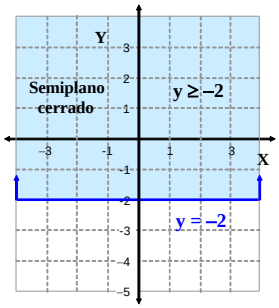
Para obtener las soluciones de la inecuación $-2x + 4y \geq 8$ es suficiente comprobar si un punto del plano, no perteneciente a la recta r, verifica o no la inecuación. Por ejemplo, tomamos el punto (0, 0):

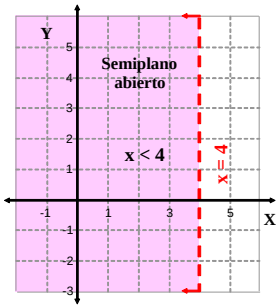
Como $-2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 8$, o equivalentemente $0 \geq 8$, no es verdadero, afirmamos que (0, 0) no es solución.

De este modo, los puntos del plano situados en el mismo semiplano que (0, 0) no son solución.

Gráficamente las soluciones son los puntos del semiplano coloreado, junto con los de la recta r.

- **Representamos gráficamente las inecuaciones lineales $y \geq -2$** y **$x < 4$**.
  Para ello representamos, en primer lugar, las rectas **$y = -2$** y **$x = 4$**.





Veamos si el punto (0, 0), que no pertenece a las rectas, verifica las inecuaciones. Si verificara la inecuación, la solución contendría al semiplano que contiene a (0, 0). En caso contrario, sería el otro semiplano.

- Como $0 \geq -2$ es cierto → (0, 0) es solución de $y \geq -2$
- Como $0 < 4$ no es cierto → (0, 0) no es solución de $x < 4$

6 Comprueba si las siguientes parejas son soluciones de la inecuación $2x + 3y > 5$:
(A) (1, 0) (B) (1, 1) (C) (1, 2) (D) (2, 1) (E) (0, 0) (F) (0, 2) (G) (100, –50) (H) (100, –70)

7 Escribe 2 parejas solución y 2 que no lo sean de las inecuaciones:
(A) $x + y \leq 2$ (B) $x + y \geq 2$ (C) $3x - y < 5$ (D) $x \leq y$ (E) $x \geq 0$ (F) $y < 5$

8 Representa gráficamente el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones:
(A) $-x + y < 8$ (B) $4x - 2y \leq 6$ (C) $2x + 3y > 6$ (D) $-3x - 4y \geq 12$ (E) $x \leq 5$ (F) $2y > -5$

4.3 Sistemas de inecuaciones lineales: solución gráfica

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas está formada por los puntos del plano (x, y) que verifican, al mismo tiempo, todas las inecuaciones, es decir, **los puntos del plano que pertenecen a la intersección de los semiplanos correspondientes**.

Ejemplo 6

El punto (0, 0) es una solución del siguiente sistema de inecuaciones lineales porque verifica todas las inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y \geq -2 \\ x + y \geq -1 \\ x - 2y \leq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 0 - 0 \geq -2 \\ 0 + 0 \geq -1 \\ 0 - 2\cdot 0 \leq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 0 \geq -2 \\ 0 \geq -1 \\ 0 \leq 1 \end{array}\right\}$$

El conjunto de soluciones del sistema se obtiene como intersección de los semiplanos correspondientes a las soluciones de cada inecuación. Para ello representamos las rectas que definen cada semiplano. Como (0, 0) es una solución de las tres inecuaciones, los semiplanos que las representan lo contienen; la intersección de ellos es la región sombreada de la figura:

2x – y = –2

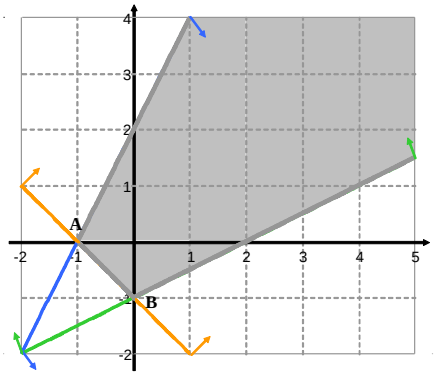
x	y
–1	0
0	2
1	4

x + y = –1

x	y
–1	0
0	–1
1	–2

x – 2y = 1

x	y
0	–1
2	0
4	1



- Llamamos ***politopo*** a todo conjunto de puntos del plano obtenido en la **intersección de un número finito de semiplanos cerrados**.
- Llamamos ***aristas*** a los segmentos o semirrectas que lo limitan y ***vértices*** a cada punto intersección de dos segmentos o semirrectas.
- Llamamos ***polígono*** a todo politopo limitado por un número finito de segmentos. Constituye un conjunto cerrado y acotado de puntos del plano.

Así, en el ejemplo 6, el conjunto de soluciones es un politopo, que contiene tres aristas y dos vértices.
El vértice A se obtiene como intersección de las rectas x + y = –1 y 2x – y = –2.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -1 \\ 2x - y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = -1 \\ -3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = -1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{A(-1, 0)}$$

El politopo anterior no es un polígono, pues no está limitado solo por segmentos. Sus límites son el segmento de extremos A y B, y dos semirrectas, de colores azul y verde.

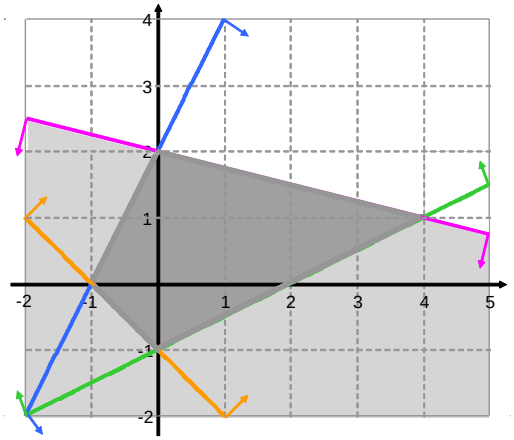
Ejemplo 7

Añadimos al sistema del ejemplo 6 la inecuación **x + 4y ≤ 8** y calculamos el nuevo conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y \geq -2 \\ x + y \geq -1 \\ x - 2y \leq 1 \\ x + 4y \leq 8 \end{array}\right\}$$

Dicho conjunto de soluciones debe ser la intersección del politopo del ejemplo 6 con el semiplano que representa las soluciones de la inecuación añadida **x + 4y ≤ 8**.

Dibujamos la recta **x + 4y = 8** y el semiplano que representa las soluciones de **x + 4y ≤ 8** (en gris claro), que añadimos al dibujo del ejemplo 6. La intersección de este semiplano con el politopo anterior proporciona como nuevo conjunto de soluciones un **polígono**, limitado por 4 segmentos y 4 vértices.



➢ Tipos de soluciones

No todos los sistemas de inecuaciones tienen por conjunto de soluciones un politopo. Según la intersección de los semiplanos el conjunto de soluciones puede ser **vacío**, o bien puede contener un **único punto**, un **segmento**, una **recta** o una **semirrecta**.

Si alguna inecuación es estricta los segmentos carecen de extremos y los politopos de aristas y vértices.

Además el sistema puede contener alguna ecuación.

9 Halla las coordenadas de los vértices del polígono del ejemplo 7.

10 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(A) $\left.\begin{array}{l} -x + y \geq 1 \\ -x + y \leq -1 \end{array}\right\}$ (B) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ 2x + y \geq 3 \end{array}\right\}$ (C) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ 2x + y > 3 \end{array}\right\}$ (D) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ -x + y \geq 6 \end{array}\right\}$

(E) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 1 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ (F) $\left.\begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \geq -4 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 4 \end{array}\right\}$ (G) $\left.\begin{array}{l} -2x + y \leq 0 \\ -x + 2y \geq 0 \\ -x + y \geq 0 \\ -x + y \leq 0 \end{array}\right\}$ (H) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 3 \\ -x + y \geq 6 \\ 9x + y \leq 45 \end{array}\right\}$

11 Representa el polígono de vértices A(1, 1), B(1, –1), C(–1, –1) y D(–1, 1), y obtén un sistema de inecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea precisamente dicho polígono.

4.4 Un problema de programación lineal

Ejemplo 8

Arroceras del Este S.A. produce arroz de dos calidades A y B. En el arroz del tipo A obtiene un beneficio de 50 € por cada tonelada métrica producida mientras que en el de tipo B obtiene 100 €.

Si llamamos respectivamente **x** e **y** al número de toneladas producidas de cada tipo el beneficio total de la empresa viene dado por la función

$$\mathbf{B = f(x, y) = 50x + 100y}$$

De este modo si produce 100 t del tipo A y 200 t del tipo B el beneficio de la empresa es:

$$f(100, 200) = 50 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 5\,000 + 20\,000 = \mathbf{25\,000}\ €$$

En principio, a mayor producción mayores beneficios, aunque le conviene producir más de la calidad B pues si produce 300 t de la calidad B gana más que con idéntica producción total anterior:

$$f(0, 300) = 50 \cdot 0 + 100 \cdot 300 = 0 + 30\,000 = \mathbf{30\,000}\ €$$

Supongamos que existen restricciones que limitan la producción:

(A) La tierra no permite una producción superior a 600 t.

(B) Siempre se produce una cantidad de la calidad A al menos el doble que de la calidad B.

Estas restricciones se expresan:

(A) $\mathbf{x + y \le 600}$

(B) $\mathbf{x \ge 2y}$

Además, las cantidades a producir nunca serán negativas:

$$\mathbf{x \ge 0 \qquad y \ge 0}$$

En resumen, el conjunto S de **producciones posibles** es el de soluciones del sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x + y \le 600} \\ \mathbf{x - 2y \ge 0} \\ \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{y \ge 0} \end{array}\right\} \quad \mathbf{(S)}$$

De todas las producciones posibles, a la empresa le interesa aquélla que proporcione mayores beneficios. Por tanto desea obtener **el máximo** de la función beneficio, elegido como es natural entre sus posibilidades de producción:

$$\mathbf{f(x, y) = 50x + 100y \qquad con\ (x, y) \in S}$$

Un problema de programación lineal consiste en obtener el mayor valor (máximo) o el menor valor (mínimo) de una función del tipo:

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by} \quad \text{con } \mathbf{(x, y) \in S}$$

- donde **f** es una función lineal ($a, b \in \mathbb{R}$) llamada ***función objetivo***,
- y **S** es el ***conjunto factible***, constituido por las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales, las llamadas ***restricciones,*** que representan las parejas (x, y) del plano susceptibles de ser seleccionadas. Entre ellas elegiremos la pareja ***óptima*** que proporciona el máximo o mínimo de f.

Ejemplo 9

Obtenemos la producción que maximiza beneficios en la empresa del ejemplo 8:

$$\mathbf{f(x, y) = 50x + 100y}$$

sujeta a las **restricciones**:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \le 600 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Éstas proporcionan el **conjunto factible**, o conjunto de producciones posibles, entre las que se elige la producción óptima. Para ello utilizamos la representación gráfica del conjunto factible (gráfica siguiente).
El problema es resuelto al plantear algunas cuestiones:

- ¿Con qué producción obtenemos un beneficio de 15 000 €?

  $$f(x, y) = 15\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{50x + 100y = 15\,000}$$

  La anterior ecuación es la de una recta que, al intersectar con el conjunto factible S, proporciona todas las producciones posibles (x, y) con beneficio de 15 000 €. Es el segmento AB de la segunda figura.

- ¿Con qué producciones obtenemos un beneficio de 30 000 €?

  $$f(x, y) = 30\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{50x + 100y = 30\,000}$$

  Tenemos la ecuación de otra recta, paralela a la anterior, cuyos puntos comunes con el conjunto factible S proporcionan las diferentes producciones con beneficio de 30 000 €. Es el segmento CD de la segunda figura.

- ¿Con qué producción obtendremos el mayor beneficio posible?

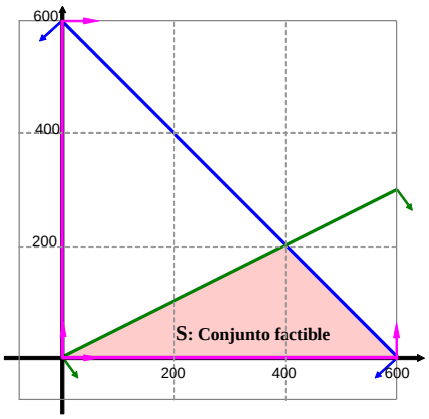
  Las rectas de la forma **50x + 100y = k** proporcionan los puntos con beneficio k. Todas las rectas de esta forma son paralelas. Proporcionará el mayor beneficio la que tenga mayor valor de k y al mismo tiempo tenga algún punto común con el conjunto factible, pues de otro modo la solución (x, y) no sería alcanzable.

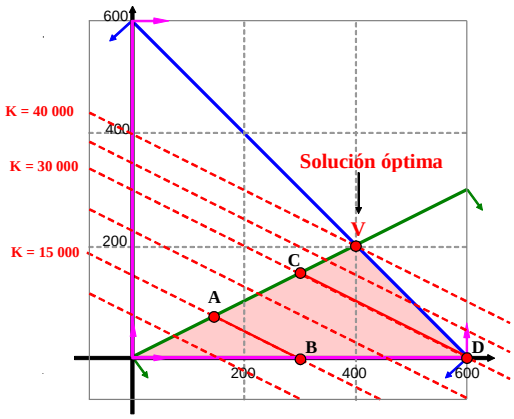
  Gráficamente es la que pasa por el vértice **V**, intersección de las aristas de colores azul y verde cuyas ecuaciones son las del siguiente sistema:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y = 600 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 400,\ \ y = 200}$$

En este punto se obtiene la **solución óptima, 400 toneladas de tipo A y 200 de tipo B**, que produce el **beneficio máximo, 40 000 euros**:

$$f(400, 200) = 50 \cdot 400 + 100 \cdot 200 = \mathbf{40\,000\ €}$$





12 Calcula la producción óptima en el ejemplo anterior si la función beneficio es f(x) = 100x + 50y.

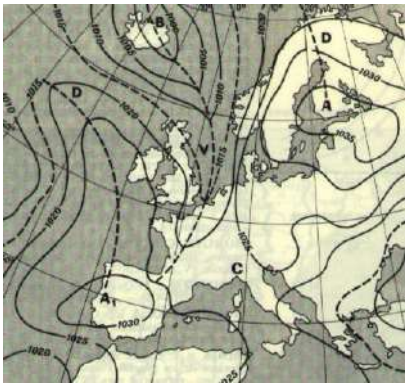
4.5 El óptimo de un problema de programación lineal

En el apartado 4.4 hemos visto en qué consiste un problema de programación lineal de dos variables: se trata de obtener el mayor valor (o el menor valor) que alcanza una función lineal de dos variables x e y, llamada ***función objetivo***, entre todos los pares de valores posibles (x, y) que forman el ***conjunto factible*** **S** dado por el conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones lineales.

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by \quad con\ (x, y) \in S}$$

El problema puede tener solución o no, y si la tiene puede que no sea única. En el ejemplo 9 hemos resuelto el problema de forma gráfica, viendo que hay muchos valores en el conjunto factible en los que la función objetivo toma el mismo valor; dichos valores se pueden expresar gráficamente como conjuntos de rectas paralelas, que se llaman ***rectas de nivel***. Este método gráfico permite también discriminar entre los problemas que tienen óptimo y los que no lo tienen.

El concepto de **recta de nivel** y, más general, el de **curva de nivel**, es utilizado en muchas disciplinas, como conjunto de puntos donde una determinada magnitud toma el mismo valor. Por ejemplo, las ***curvas de nivel*** en **Topografía** unen los puntos de un plano topográfico que tienen **la misma altitud** (dibujo 1); en **Meteorología**, las ***isóbaras*** son las curvas que unen los puntos del plano que tienen **la misma presión atmosférica** (dibujo 2), las ***isotermas*** son las curvas que unen los puntos del plano con **la misma temperatura**, etc.



En un problema de programación lineal, las curvas que unen los puntos del plano con el mismo valor para la función lineal f (que representa una magnitud como puede ser un beneficio o un coste) son rectas, llamadas ***rectas de nivel***.

➢ Las rectas de nivel

Consideramos **f(x, y) = ax + by** una función lineal, y **k** un número cualquiera.

Llamamos ***recta de nivel*** **k** de la función f al conjunto de puntos (x, y) del plano para los que la función f toma el valor k:

$$\mathbf{r(k)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \mathbf{ax + by = k}\}$$

- El nombre de recta de nivel está perfectamente justificado, pues la ecuación **ax + by = k** es la de una recta y todos los puntos de ella proporcionan a f el mismo valor k:

  $$\mathbf{si \quad (x, y) \in r(k) \quad \rightarrow \quad f(x, y) = k}$$

  Además, las rectas de nivel de una función f, para diferentes niveles o valores de k, proporcionan rectas paralelas. Recuerda el paralelismo de rectas de la sección 4.1.

Ejemplo 10

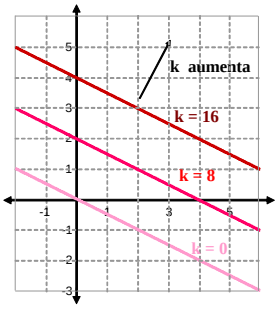
Expresamos las ecuaciones que representan distintas rectas de nivel de diferentes funciones lineales y observamos en qué direcciones aumenta el valor de f según el signo de los coeficientes a y b:

Rectas de nivel de f(x, y) = 2x + 4y

Nivel **k = 0: r(0): 2x + 4y = 0**

Nivel **k = 8: r(8): 2x + 4y = 8**

Nivel **k = 16: r(16): 2x + 4y = 16**

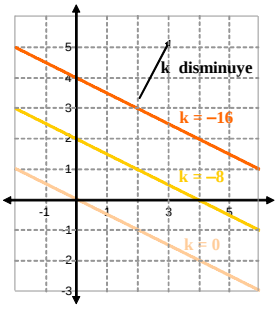


Rectas de nivel de g(x, y) = –2x – 4y

Nivel **k = 0: s(0): –2x – 4y = 0**

Nivel **k = –8: s(–8): –2x – 4y = –8**

Nivel **k = –16: s(–16): –2x – 4y = –16**



Vemos que la representación gráfica de las anteriores rectas de nivel es la misma, pero proporcionan diferentes valores a las funciones f y g. Por ejemplo:

$P(0, 2) \in r(8)$ pues $2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$ y $f(0, 2) = 8$.

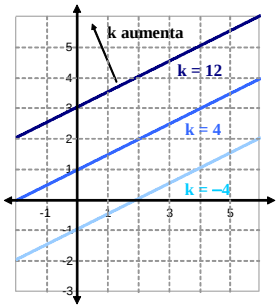
$P(0, 2) \in s(-8)$ pues $-2 \cdot 0 + -4 \cdot 2 = -8$ y $g(0, 2) = -8$.

Rectas de nivel de f(x, y) = –2x + 4y

Nivel **k = –4: r(–4): –2x + 4y = –4**

Nivel **k = 4: r(4): –2x + 4y = 4**

Nivel **k = 12: r(12): –2x + 4y = 12**

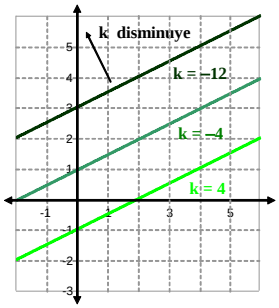


Rectas de nivel de g(x, y) = 2x – 4y

Nivel **k = 4: s(4): 2x – 4y = 4**

Nivel **k = –4: s(–4): 2x – 4y = –4**

Nivel **k = –12: s(–12): –2x – 4y = –12**



Rectas de mayor (menor) nivel k se obtienen desplazando las rectas dadas paralelamente en diferentes sentidos, dependiendo de los signos de los coeficientes a y b de las mismas.

13 La función B(x, y) = 100x + 200y para x ≥ 0, y ≥ 0, expresa el beneficio obtenido por una empresa al producir x maquinillas de afeitar del tipo 1 e y maquinillas del tipo 2.
(A) ¿Qué representan las soluciones de la ecuación 100x + 200y = 20 000?
(B) ¿Y las de la ecuación 100x + 200y = 40 000? Haz la representación gráfica de ambas ecuaciones.

14 Expresa y representa las rectas de nivel que pasan por los puntos A(0, 0), B(1, 2) y C(5, 3) de las funciones:
(A) f(x, y) = 3x – y (B) f(x, y) = 3x + y (C) f(x, y) = x + y (D) f(x, y) = 2x + 3y

➢ Conclusiones generales

Consideramos el problema de programación lineal, del que queremos determinar si existe óptimo (máximo o mínimo):

$$\mathbf{f(x, y) = ax + by \qquad para\ (x, y) \in S}$$

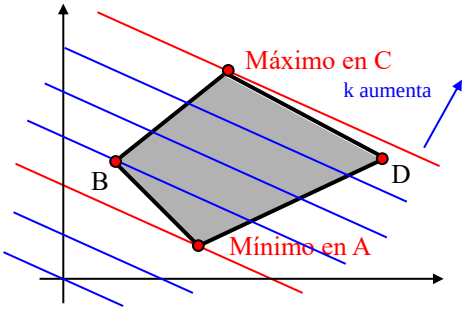
(1) Si **S es** un **polígono**, entonces **f alcanza el óptimo en alguno de sus vértices**.

- Si las rectas de nivel de f no son paralelas a ninguna de las aristas del polígono, entonces el óptimo se alcanza en un único vértice.
- Si las rectas de nivel de f son paralelas a alguna de las aristas, el máximo o el mínimo puede alcanzarse en todos los puntos de esa arista.

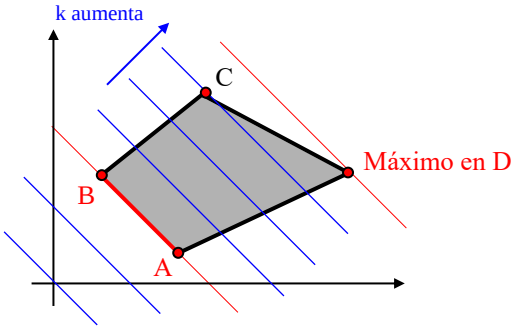
(2) Si **S no es** un **polígono** (no es cerrado o no es acotado) **puede no haber óptimo**.

La comprobación de las anteriores afirmaciones se realiza con ayuda de las rectas de nivel de la función objetivo f y de la representación gráfica del conjunto factible S. En las dos primeras figuras, el conjunto factible es un polígono, en la tercera es un politopo no acotado y en la cuarta no contiene a los vértices ni a las aristas.

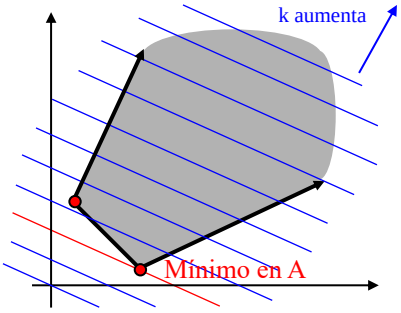
- En la primera figura las rectas de nivel no son paralelas a ninguna arista del conjunto factible. Las rectas que solo cortan a un vértice del conjunto factible proporcionan el mínimo (la que tiene menor valor de k) y el máximo (la que tiene mayor valor de k). En la primera figura ocurre en los vértices A y C.
- En la segunda figura, en la que las rectas de nivel son paralelas a la arista AB, la recta con menor valor de k es paralela a la arista AB, con lo que todos los puntos de dicha arista proporcionan el mínimo de f. La que proporciona el mayor valor de k pasa por el vértice D, donde se alcanza el máximo de f.
- En la tercera figura, la recta de nivel con menor valor de k nos proporciona el mínimo de f en el vértice A. No hay máximo de f pues no hay una "última recta de nivel" que corte al conjunto factible, no acotado.
- En la cuarta figura no hay máximo ni mínimo porque los vértices no pertenecen al conjunto factible: los semiplanos que lo constituyen son abiertos. Tampoco existe esa "última recta de nivel".



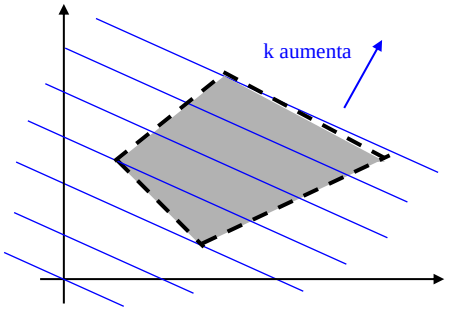
Rectas de nivel no paralelas a ninguna arista
Máximo y mínimo únicos



Rectas de nivel paralelas a la arista AB
Máximo único, pero mínimo no único



Politopo no acotado
Hay mínimo único, pero no hay máximo



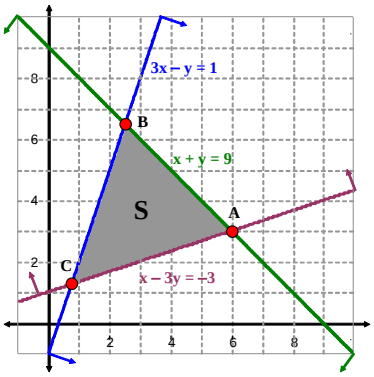
Conjunto factible no cerrado
No hay ni mínimo ni máximo

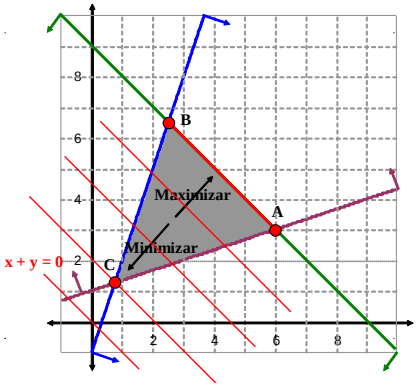
Ejemplo 11

Obtenemos, si existen, el mayor y el menor valor de la función objetivo **f(x, y) = x + y** bajo las condiciones:

$$\mathbf{x + y \le 9} \qquad \mathbf{3x - y \ge 1} \qquad \mathbf{x - 3y \le -3}$$

Comenzamos por representar en la primera figura el conjunto factible S. Se trata de un polígono, cerrado y acotado, con 3 aristas y 3 vértices. Por ello es **seguro que hay máximo y mínimo para la función objetivo y tiene que alcanzarse en uno de los vértices**.





Aunque podemos hallar la solución utilizando las rectas de nivel, **la hallamos simplemente por comparación de la función objetivo en los vértices,** especialmente útil cuando hay pocos vértices o cuando las pendientes de las rectas de nivel y alguna arista son similares:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x - 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = 6,\ y = 3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A(6, 3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{5}{2} = 2.5,\ y = \frac{13}{2} = 6.5 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B(2.5, 6.5)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{5}{4} = 1.25,\ y = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \rightarrow \quad \mathbf{C(1.25, 0.75)}$$

Vértices	Valor de f	
A(6, 3)	f(6, 3) = **9**	Mayor valor
B(2.5, 6.5)	f(2.5, 6.5) = **9**	Mayor valor
C(1.25, 0.75)	f(1.25, 0.75) = **2**	Menor valor

El menor valor de f en el conjunto factible S se obtiene en C: **f(1.25, 0.75)** = 1.25 + 0.75 = **2**.

El mayor valor de f en el conjunto factible S se obtiene en ambos vértices A y B:

f(6, 3) = 6 + 3 = **9** **f(2.5, 6.5)** = 2.5 + 6.5 = **9**

Por tanto **el máximo de la función f se obtiene en cualquier punto de la arista AB**.

Observa que gráficamente las pendientes de las rectas de nivel coinciden con la de la arista AB.

15 Obtén el máximo y el mínimo de la función objetivo f(x, y) = mx + y sujeta a las restricciones

$$4 \le x + y \le 8, \qquad \frac{x}{3} \le y \le 3x,$$

en los siguientes casos:

(A) $m = 2$ (B) $m = \frac{1}{2}$ (C) $m = 1$ (D) $m = -1$ (E) $m = -\frac{1}{3}$ (F) $m = -3$

Ejemplo 12

AGUARDEX S.L. es una empresa dedicada a la fabricación de licores. Sus productos estrella son los aguardientes A_1 y A_2, de los que obtiene unos beneficios, por cada litro vendido, de 1 € y 3 € respectivamente.
La composición, en gramos por litro, de ambos productos viene dada en la tabla siguiente:

	MC	BE	EA	PA
A_1	0	1	5	1
A_2	2	0	2	4

MC: Mezcla de cereales
BE: Bayas de enebro
EA: Esencia de anís
PA: Plantas aromáticas

La empresa dispone para cada día de las siguientes cantidades de los anteriores componentes:

12 kg de MC, 8kg de BE, 45kg de EA y 27 kg de PA.

¿Cuáles serán las cantidades de cada tipo de licor que le conviene a la empresa producir, sin sobrepasar las disponibilidades diarias, para obtener el mayor beneficio posible?

Llamamos **x** e **y** a la cantidad, en litros, de A_1 y de A_2 fabricados diariamente, respectivamente.

El beneficio en función de **x** e **y** es:

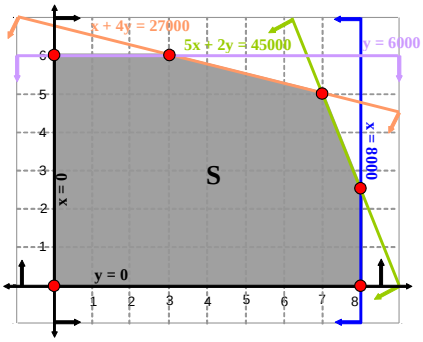
$$\mathbf{f(x, y) = x + 3y}$$

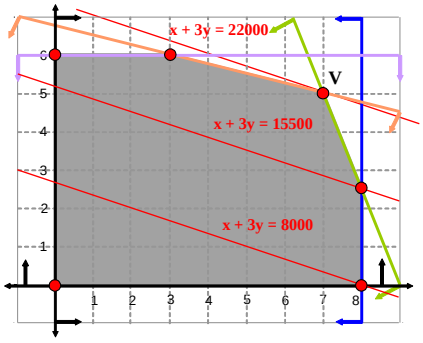
Las restricciones provienen de que en la producción de los licores no podemos utilizar más de las cantidades que tenemos de cada componente diariamente. Todas las restricciones deben verificar la condición:

cantidad utilizada en A_1 + cantidad utilizada en A_2 ≤ cantidad total disponible

- Disponibilidad diaria de MC: $\mathbf{0x + 2y \le 12\,000}$
- Disponibilidad diaria de BE: $\mathbf{1x + 0y \le 8\,000}$
- Disponibilidad diaria de EA: $\mathbf{5x + 2y \le 45\,000}$
- Disponibilidad diaria de PA: $\mathbf{1x + 4y \le 27\,000}$
- Además debe ser, claro está: $\mathbf{x \ge 0}$ $\mathbf{y \ge 0}$

Representamos gráficamente el conjunto factible, y algunas rectas de nivel de la función objetivo:





Puesto que **a = 1, b = 3** (mayores que cero), la recta de mayor nivel que tiene puntos comunes con S pasa por el vértice **V(7000, 5000),** punto de corte de las aristas **5x + 2y = 45 000** y **1x + 4y = 27 000**.

La empresa debe producir **7000** litros de A_1 y **5000** litros de A_2 para obtener el mayor beneficio posible:

$$\mathbf{f(7000, 5000)} = 7000 + 3 \cdot 5000 = \mathbf{22000\ €}$$

16 Obtén la producción que maximiza el beneficio para la empresa del ejemplo anterior, en los siguientes casos:
(A) El beneficio por litro del aguardiente A_1 es de 1 €, y el del A_2 es de 5 €.
(B) El beneficio por litro del aguardiente A_1 es de 3 €, y el del A_2 es de 1 €.

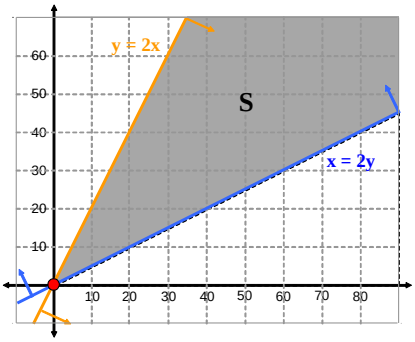
Ejemplo 13

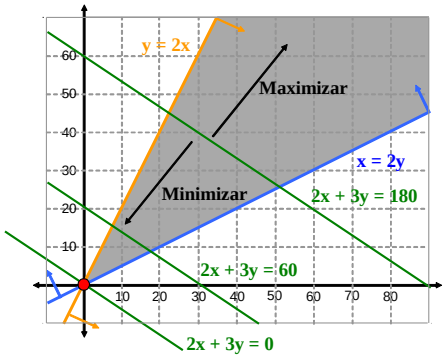
Obtenemos el mayor y el menor valor, si existen, de la función objetivo **f(x, y) = 2x + 3y** bajo las restricciones:

$$\mathbf{y \le 2x} \quad \text{y} \quad \mathbf{x \le 2y}$$

El conjunto factible S es el **politopo no acotado** de la siguiente figura obtenido al resolver el sistema formado por las dos inecuaciones anteriores. Sólo tiene dos aristas y un vértice, el (0, 0).

Representamos la recta de nivel 0, de ecuación 2x + 3y = 0, y otras paralelas a ella, de niveles mayores. El nivel de las rectas coincide con el valor de la función objetivo en los puntos de dichas rectas.





- No es posible alcanzar el máximo beneficio pues cualquier recta con nivel k ≥ 0 contiene puntos comunes con el conjunto factible. En la gráfica tenemos dibujadas las rectas:

  r(0): 2x + 3y = 0 r(60): 2x + 3y = 60 r(180): 2x + 3y = 180

  Podemos trazar rectas paralelas de mayor nivel k, con puntos contenidos en S y que, por tanto, proporcionan mayor valor a la función objetivo.

- El mínimo de la función se obtiene en el punto (0, 0), vértice por el que pasa la recta con menor nivel de f. Dicho valor mínimo es:

  $$\mathbf{f(0, 0)} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = \mathbf{0}$$

  Este valor mínimo coincide, claro está, con el valor del término independiente de la recta de nivel de f que pasa por el punto (0, 0):

  $$\mathbf{r(0): 2x + 3y = 0}$$

17 Una persona quiere hacer un régimen para adelgazar. En una farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes recomendaciones:

- No debe tomar más de 150 gramos de la mezcla, ni menos de 50.
- No debe tomar más cantidad de B que de A.
- No debe incluir más de 100 gramos de A.

Si sabemos que 100 gramos de A contienen 30 mg de vitaminas y 450 calorías, y que 100 gramos de B contienen 20 mg de vitaminas y 150 calorías:

(A) ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener el preparado más vitamínico?
(B) ¿Y para obtener el preparado con menos calorías?

18 Un industrial fabrica 2 productos, A y B. Por cada kg de A necesita 4 horas de trabajo y 100 € de material, y obtiene un beneficio de 75 €. Por cada kg de B necesita 7 horas de trabajo y 80 € de material, obteniendo un beneficio de 50 €. Cada semana, el industrial puede contar con un total de 200 horas de trabajo. Además está obligado a producir un mínimo de 15 kg de A y 10 kg de B, y no puede gastar más de 3 200 € en material.

(A) Expresa este problema como un problema de programación lineal, y representa gráficamente su conjunto factible.
(B) Calcula la cantidad semanal de cada tipo de producto que conviene fabricar para obtener el mayor beneficio posible.
(C) Calcula la cantidad semanal que maximice el beneficio si el de cada tipo de producto es el mismo.

4.6 Programación lineal entera

Ejemplo 14

ORDENATIC se dedica a la fabricación de teclados para ordenadores personales y portátiles, obteniendo un beneficio de 6 € y 8 € por cada teclado vendido de cada tipo respectivamente.
Cada teclado de ordenador personal necesita 4 unidades de PVC y 2 de material eléctrico, mientras que cada teclado de ordenador portátil necesita 2 unidades de PVC y 3 de material eléctrico.
Su proveedor suministra, cada semana, un total de 20 unidades de PVC y 15 de material eléctrico.
Calcula la cantidad de teclados de cada tipo que deberá vender cada semana para maximizar su beneficio.

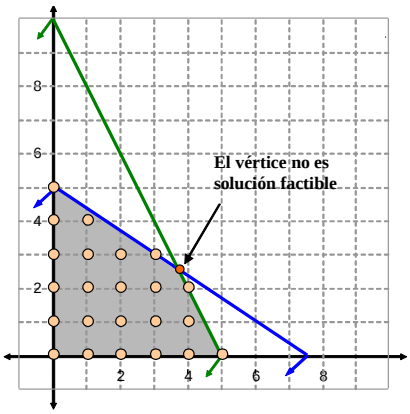
Llamamos **x** al número de teclados para ordenador personal e **y** al de teclados para portátil producidos.

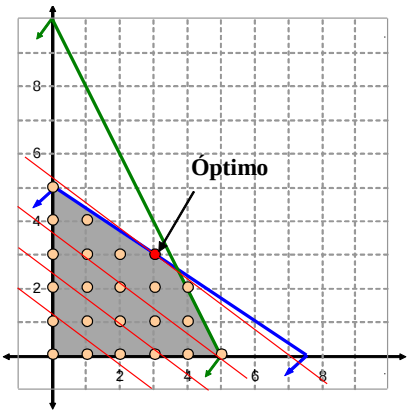
La función a maximizar es $\mathbf{B(x, y) = 6x + 8y}$

Las restricciones son:

- Disponibilidad de PVC: $\mathbf{4x + 2y \leq 20}$
- Disponibilidad de material eléctrico: $\mathbf{2x + 3y \leq 15}$
- No negatividad: $\mathbf{x \geq 0 \quad y \geq 0}$
- Los valores deben ser enteros: $\mathbf{x \in \mathbb{Z} \quad y \in \mathbb{Z}}$

Esta última restricción impone que en el conjunto factible consideremos solo las **parejas de números enteros** (no vamos a producir medio teclado). Son los puntos de color marrón de la figura.





Representamos varias rectas de nivel y observamos que, si las soluciones no tuvieran que ser enteras, el máximo se alcanzaría en el vértice V(15/4, 5/2) intersección de las aristas azul y verde.

Pero en nuestro ejemplo hemos constatado la necesidad de que la solución sea en coordenadas enteras. El máximo se alcanza en el punto marrón por el que pasa la recta con mayor nivel posible. Es el punto P(3, 3), con valor:

$$\mathbf{f(3, 3)} = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = \mathbf{42}$$

La producción óptima es de 3 teclados de cada tipo, con un beneficio máximo de 42 €.

19 Una empresa de reparto recibe el encargo de distribuir dos productos diferentes, A y B. La empresa cobra 1.5 euros por cada unidad del producto A que llega a su destino y 1 euro por cada uno del producto B, pero ha de distribuir al menos 50 unidades del producto A y 100 del B. Además, el número de unidades del producto B no ha de ser inferior al doble de unidades repartidas del producto A, y el total de unidades repartidas no puede ser superior a 300.
(A) Expresa la función lineal que ha de ser optimizada para obtener el máximo beneficio.
(B) Representa gráficamente el conjunto factible.
(C) Obtén las cantidades de cada producto que hay que repartir para obtener el máximo beneficio, y su

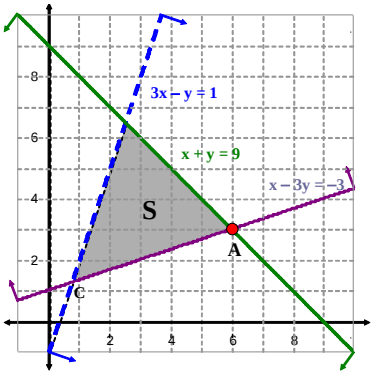
Ejemplo 15

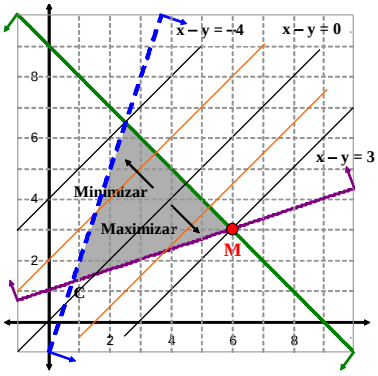
Consideramos el problema de optimizar la función objetivo **f(x, y) = x – y** bajo las condiciones:

(A) $\mathbf{x + y \le 9}$ $\quad$ $\mathbf{3x - y > 1}$ $\quad$ $\mathbf{x - 3y \ge -3}$ $\quad$ (programación lineal "normal")

(B) $\mathbf{x + y \le 9}$ $\quad$ $\mathbf{3x - y > 1}$ $\quad$ $\mathbf{x - 3y \ge -3}$ $\quad$ $\mathbf{x \in \mathbb{Z}}$ $\quad$ $\mathbf{y \in \mathbb{Z}}$ $\quad$ (programación lineal entera)

(A) Representamos en la primera figura el conjunto factible S, que no es cerrado, pues no contiene a la arista **3x – y = 1**, y en la segunda figura algunas curvas de nivel de f, para observar hacia donde aumenta el nivel.



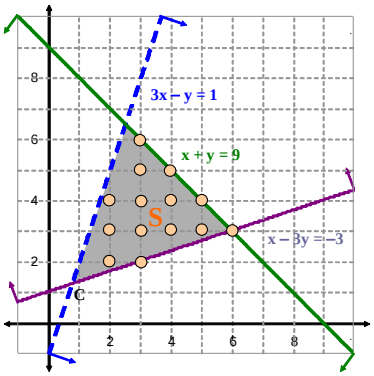


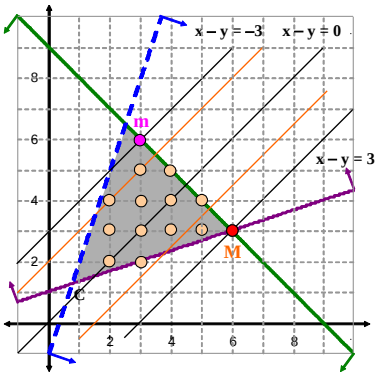
- La recta de mayor nivel que corta al conjunto factible lo hace en el vértice M(6, 3) que es el punto de corte de las aristas **x + y = 9** y **x –3y = –3**. El valor máximo es

$$\mathbf{f(6, 3)} = 6 - 3 = \mathbf{3}$$

- La recta de menor nivel que proporcionaría el mínimo sería la que pasa por el punto P(2.5, 6.5), intersección de las aristas $\mathbf{x + y \le 9}$ y $\mathbf{3x - y > 1}$. Pero como esta arista no pertenece a S, el punto P tampoco y por ello la función f no alcanza el mínimo en S.

(B) Ahora requerimos valores enteros, el mínimo y el máximo se eligen entre los puntos del conjunto factible con coordenadas enteras por los que pasa la recta de menor y mayor nivel, respectivamente.





- El mínimo se alcanza en **m(3, 6)**, con valor: **f(3, 6)** = 3 – 6 = **–3**.
- El máximo se alcanza en **M(6, 3)**, con valor: **f(6, 3)** = 6 – 3 = **3**.

Observa que, en programación lineal entera, en un "polígono sin aristas" puede haber solución.

20 Los 400 alumnos de un colegio van de excursión. Contratan el viaje en una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas cada uno y 10 autobuses de 50 plazas pero solo dispone de 9 conductores para ese día. El alquiler de un autobús grande cuesta 800 euros y 600 euros uno pequeño.

(A) Representa gráficamente el conjunto factible.

(B) Obtén el número de autobuses de cada tipo que sería necesario alquilar para que el viaje sea lo más económico posible y el coste de dicho viaje.

4.7 Problemas de transporte

Ejemplo 16

La empresa FERIAL S.L., dedicada a la fabricación de atracciones de feria, recibe tres pedidos urgentes de otros tantos feriantes situados en **A**licante, **B**adajoz y **C**ádiz, de 10, 15 y 20 unidades de autos de choque respectivamente. Posee dos almacenes de abastecimiento instantáneo situados en **M**adrid y **S**alamanca, con un stock de 30 y 15 unidades respectivamente.
El coste del transporte, por unidad, de cada almacén al punto de destino viene dado en la siguiente tabla, estando el valor expresado en euros.

	A	**B**	**C**
M	500	600	800
S	700	300	900

¿Cuántas unidades debe transportar FERIAL desde cada almacén a los lugares de destino de modo que le resulte lo más económico posible?

Utilizamos las siguientes variables para indicar el número de unidades enviadas desde los 2 centros de distribución a los 3 centros de recepción:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	**x**	**y**	**z**	30
S	**u**	**v**	**w**	15
Total	10	15	20	

El objetivo es minimizar los costes de transporte totales que expresados en función de las 6 variables son:

$$\mathbf{C = 500x + 600y + 800z + 700u + 300v + 900w}$$

Pero las anteriores variables están relacionadas por las siguientes ecuaciones, deducidas de la tabla anterior

$$\mathbf{x + u = 10 \qquad y + v = 15 \qquad z + w = 20 \qquad x + y + z = 30 \qquad u + v + w = 15}$$

que permite expresar la anterior tabla solo con las variables x e y:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	**x**	**y**	**30 – x – y**	30
S	**10 – x**	**15 – y**	**x + y – 10**	15
Total	10	15	20	

El coste de transporte se expresa en función de las variables x e y:

$$C = C(x, y) = 500x + 600y + 800(30 - x - y) + 700(10 - x) + 300(15 - y) + 900(x + y - 10)$$

Obtenemos la siguiente **función objetivo**:

$$\mathbf{C(x, y) = -100x + 400y + 26\,500}$$

Queremos obtener los valores de x e y que proporcionan el menor coste de transporte, sujeto a las restricciones

$$\mathbf{x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 30 - x - y \geq 0}$$

$$\mathbf{10 - x \geq 0 \quad 15 - y \geq 0 \quad x + y - 10 \geq 0}$$

con las que exigimos que el número de unidades llevadas de cada centro de almacenamiento a cada centro de destino sea una cantidad no negativa. Se trata de un problema de **programación lineal en dos variables**.

Un ***problema de transporte*** consiste en distribuir productos desde unos centros de distribución a otros centros de destino con el menor coste posible. Se puede resolver como un problema de **programación lineal en dos variables** cuando hay **2** centros de distribución y **3** de recepción, o a la inversa, y siempre que la **oferta total** coincida con la **demanda total**.

Ejemplo 17

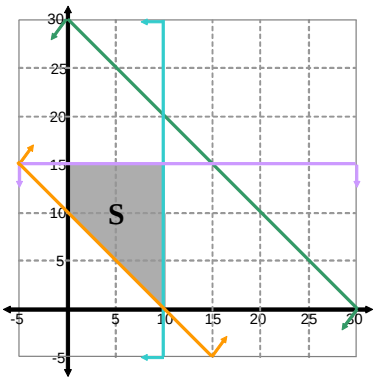
Resolvemos el problema de transporte anterior expresado como problema de programación lineal:

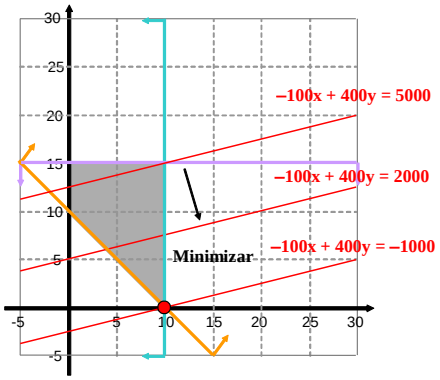
Minimizar: $\mathbf{C(x, y) = -100x + 400y + 26\,500}$

sujeto a: $\mathbf{x \geq 0}$ $\mathbf{y \geq 0}$ $\mathbf{30 - x - y \geq 0}$

$\mathbf{10 - x \geq 0}$ $\mathbf{15 - y \geq 0}$ $\mathbf{x + y - 10 \geq 0}$

Representamos el conjunto factible y algunas rectas de nivel de la función objetivo:





La recta de menor nivel que corta el conjunto factible lo hace en el punto **P(10, 0)** que proporciona el menor coste:

$$\mathbf{C(10, 0) = -100 \cdot 10 + 400 \cdot 0 + 26\,500 = 25\,500\ €}$$

La distribución de las mercancías con mínimo coste es la siguiente:

	A	B	C	Total
M	**10**	**0**	**20**	30
S	**0**	**15**	**0**	15
Total	10	15	20	

21 Obtén la distribución con mínimo coste en el ejemplo 17, si añadimos las condiciones de que desde los dos centros de almacenamiento hay que enviar necesariamente alguna mercancía a cada uno de los centros de recepción.

22 Una compañía aérea quiere establecer una red de vuelos entre las ciudades A y B de un país, y las ciudades C, D y E de otro. De las ciudades A y B desea que salgan un total de 10 y 20 vuelos hacia el otro país, respectivamente. A las ciudades C, D y E desea que lleguen 15, 10 y 5 vuelos, respectivamente.
El número de km (en miles) entre las distintas ciudades se da en la tabla siguiente.
Encuentra el número de vuelos diarios que deben salir por cada línea para que el número total de kilómetros sea mínimo, con la condición de que por todas las líneas debe viajar diariamente algún avión.

	C	D	E
A	2	3	4
B	4	3	2

Problemas del capítulo 4

1 Obtén gráficamente el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

(A) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \end{array}\right\}$ (B) $\left.\begin{array}{l} 5 \leq x + y \leq 10 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ (C) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ x \geq 1, \quad y \geq 2 \end{array}\right\}$

2 Obtén el máximo y el mínimo, si existen, de las siguientes funciones lineales cuando el conjunto factible es cada uno de los conjuntos de soluciones del problema anterior:

(A) $f_1(x) = 2x + y$ (B) $f_2(x, y) = x + 2y$ (C) $f(x) = 2x - y$ (D) $f_4(x, y) = x$

3 Expresa el sistema de inecuaciones para el cual el conjunto de soluciones es:

(A) El triángulo de vértices A(0, 0), B(3, 0) y C(0, 3).
(B) El triángulo de vértices A(1, 1), B(2, 5) y C(4, 2).
(C) El cuadrado de vértices A(0, 1), B(0, –1), C(1, 0) y D(–1, 0).
(D) El pentágono de vértices A(1, 2), B(1, 4), C(3, 1), D(5, 1) y E(5, 4).
(E) El pentágono de vértices A(0, 0), B(3, 1), C(5, 2), D(0, 4) y E(1, 8).

4 Dado el sistema de inecuaciones $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + 2y \leq 13 \\ 0 \leq y \leq x \end{array}\right\}$:

(A) Representa gráficamente dicho conjunto.
(B) Obtén el máximo y el mínimo de las siguientes funciones lineales cuando el conjunto factible es el conjunto de soluciones anterior:

(1) $f(x, y) = x + y$ (2) $f(x, y) = x - y$ (3) $f(x, y) = 2x + 3y$ (4) $f(x, y) = 3x + 4y$
(5) $f(x, y) = 2x + 4y$ (6) $f(x, y) = y - 2x$ (7) $f(x, y) = x$ (8) $f(x, y) = y$

5 Optimiza el siguiente problema de programación lineal según los valores de $m > 0$:

Función objetivo: $f(x,y) = x + my$ Restricciones: $\left.\begin{array}{r} 10 \leq x + y \leq 40 \\ 0 \leq x \leq y \end{array}\right\}$

6 Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

(A) Máx $f(x, y) = 2x + 3y$

s.a.: $\left.\begin{array}{ll} x + y \geq 1; & x + y \leq 4 \\ y \leq 3x; & x \leq 3y \end{array}\right\}$

(B) Máx $f(x, y) = 2x + 5y$

s.a.: $\left.\begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ y - x \leq 3 \\ x \geq 0, \quad y \geq 1 \end{array}\right\}$

7 Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 85 \\ 2x + 3y \leq 200 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$.

(A) Optimiza (máximo y mínimo) la función $f(x, y) = 26x + 27y$.
(B) Si las desigualdades del sistema de inecuaciones fueran todas estrictas, ¿qué sucedería?
(C) ¿Y si añadiéramos al caso (B) la condición de que x e y fueran enteros?

8 Considera la región factible determinada por los vértices A(1, 1), B(0, 3), C(3, 5), D(5, 2) y E(3, 0). Optimiza (máximo y mínimo) las funciones:

(A) $f(x, y) = x + 3y$ (B) $f(x, y) = x - 3y$ (C) $f(x, y) = -x + 3y$ (D) $f(x, y) = -x - 3y$

9 Dadas las restricciones $x + y < 4$, $x \geq 1$, $y \geq 1$:

(A) Maximiza la función $B(x, y) = 3x + 3y$.
(B) Minimiza la función $C(x, y) = 2x - y$.
(C) Si x e y representan el número de mesas y sillas respectivamente, maximiza $F(x, y) = 5x + 5y$.

10 Considera la región factible dada por el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y \geq 4 \\ x + 5y \geq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\}$. Optimiza las funciones:

(A) $f(x, y) = 3x + 2y$ (B) $f(x, y) = 3x - 2y$ (C) $f(x, y) = 2x + y$ (D) $f(x, y) = -x + 3y$

11 Una fábrica produce dos tipos de artículos A y B. Las máquinas utilizadas condicionan la producción de forma que cada día no se puede producir menos de 200 unidades del tipo A, ni más de 900 en total. Un estudio de mercado indica que es conveniente producir al menos el doble de unidades de tipo B que de tipo A. Obtén la producción diaria que maximiza el beneficio si por cada unidad A obtenemos el doble de beneficio que por la de B.

12 Una empresa de construcción decide construir dos tipos de chalet, A y B. Dispone de 48 millones de euros y el precio de coste de cada tipo de chalet es de 600 000 € y 400 000 € respectivamente, vendiéndolos a 800 000 y 500 000 €. Según una normativa de la urbanización, los del tipo A no pueden ocupar más del 40 % del total construido y los del tipo B deben ocupar por lo menos el 50 %. ¿Cuántos chalets de cada tipo conviene construir para obtener el mayor beneficio posible?

13 Un fabricante de coches construye dos tipos de coches: pequeños y grandes. La factoría está dividida en las secciones de montaje y acabado. Los requerimientos de trabajo, en las distintas secciones por coche, así como las horas necesarias y disponibles, se dan en la siguiente tabla:

Tiempo (horas)	Montaje	Acabado
Coche pequeño	3	3
Coche grande	5	3
Horas disponibles	150	120

Si la ganancia es de 500 euros por cada coche pequeño y de 650 euros por cada coche grande, ¿cuántos coches de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios?

14 Un inversor dispone de 20 000 €. Puede invertir en bonos del tipo A que proporcionan un rendimiento del 10 %, o en bonos del tipo B, con un rendimiento del 15 %. Hay límites legales que imposibilitan invertir más de 8 000 euros en bonos del tipo B, pero en los del tipo A la inversión mínima es de 5 000 €. Por otra parte, el inversor quiere colocar en bonos del tipo A al menos tanto dinero como en bonos del tipo B. ¿Qué inversión tiene que hacer en bonos de cada tipo para que el rendimiento sea máximo? ¿Cuál será el valor de dicho rendimiento?

15 Una compañía dispone de dos clases de inspectores para realizar el trabajo de control de calidad. Cada jornada, de 8 horas de duración, la empresa debe inspeccionar 1 800 piezas. Los inspectores de la clase A revisan piezas a un ritmo de 25 por hora, con un grado de precisión del 98 % (2 errores por cada 100 piezas examinadas). Los inspectores de la clase B revisan 15 piezas por hora, con un grado de precisión del 95 %. Cada inspector de la clase A cobra 40 euros/h y cada inspector de la clase B 30 euros/h. Cada vez que un inspector comete un error al examinar una pieza se produce una repercusión económica para la empresa de 20 euros. Determina cuántos inspectores de cada clase debe utilizar de forma que los costes totales sean mínimos y establece dicho coste.

16 Un pastelero fabrica dos tipos de pasteles P1 y P2, para los cuales usa 3 ingredientes: A, B y C. Dispone de 160 kg de A, 90 kg de B y 50 kg de C. Para fabricar un pastel P1 ha de mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer un pastel T2 ha de mezclar 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C. Si vende los pasteles T1 a 10 € la unidad, y los pasteles T2 a 25 €, ¿qué cantidad tiene que fabricar de cada tipo para maximizar su ingreso?

17 Una fábrica de muebles produce sillas y mesas utilizando madera y acero. Cada silla requiere 2 tableros de madera y 6 piezas de acero mientras que la mesa requiere 8 tableros y 14 piezas de acero. Además se necesitan 5 horas de trabajo para fabricar una silla y 6 para una mesa. Semanalmente la fábrica recibe de sus proveedores 32 tableros y 61 piezas de acero y dispone de 48 horas de trabajo. Si la venta de la silla reporta un beneficio de 9 € y la de la mesa 35 €, optimiza el beneficio semanal de la empresa.

18 Una empresa de construcción dispone de 60 000 m^2 para urbanizar. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: unas, en parcelas de 200 m^2, que albergarán a familias con una media de 3 miembros, tiene un precio de 140000 €; las otras, en parcelas de 300 m^2, albergarán a familias de una media de 6 miembros y costarán 200000 €. Las autoridades del municipio imponen dos condiciones:

- El número de casas no puede superar 262.
- El número esperado de habitantes no puede superar los 1050.

¿Cuántas viviendas de cada tipo conviene producir para maximizar ingresos?

19 Una empresa de reparto recibe el encargo de distribuir dos productos diferentes, A y B. La empresa cobra 1.5 euros por cada unidad del producto A que llega a su destino y un euro por cada unidad del producto B, pero ha de distribuir por lo menos 50 unidades del tipo A y 100 del tipo B. El número de unidades repartidas del tipo B no ha de ser inferior al doble de unidades del tipo A repartidas y además el total de unidades no puede superar las 300.

(A) Expresa la función lineal que ha de ser optimizada para obtener el mayor ingreso posible.

(B) Expresa las restricciones del problema y representa el conjunto factible.

(C) Obtén las cantidades de cada tipo de producto que conviene producir para obtener el mayor ingreso posible y el valor de éste.

20 Un fabricante de zapatos produce tres modelos distintos, A, B y C. Tiene que servir un pedido de 6 000 pares del modelo A, 4 000 de B y 6 000 de C. Tiene dos fábricas que pueden producir, la primera de ellas, 3 000, 1 000 y 1 000 pares diarios de cada modelo, y la segunda, 1 000, 1 000 y 3 000 cada día. El coste diario de mano de obra es de 50 000 euros en la primera fábrica y de 40 000 euros en la segunda. ¿Cuántos días tendrá que trabajar cada fábrica para servir el pedido con el menor coste posible de mano de obra?

21 Una empresa fabrica televisores y cadenas de música obteniendo un beneficio neto idéntico, por cada televisor o cadena de 200 euros. La empresa divide la producción en 3 secciones; en la sección A se construyen las componentes de cada aparato y se sabe que las de un televisor requieren 6 horas de trabajo y 3 horas en la cadena. En la sección B se construye la caja mueble, requiriendo una hora de trabajo la del televisor y 2 la de la cadena. En la sección C se acopla y empaqueta, requiriendo 2 horas por televisor y 3 por la cadena de música. La limitación de horas de trabajo por semana es de 12 000 horas en la sección A, 5 000 en la B y 8 000 en la C.

(A) Obtén la producción semanal que maximiza beneficios.

(B) Si el beneficio por televisor es de 250 euros y de 100 euros por cadena de música, ¿qué cantidades de cada producto debe producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste?

22 Para fabricar un determinado compuesto químico se utiliza, por lo menos, 8 gramos de sodio y 12 de potasio. Disponemos de un producto A que contiene 1 gramo de sodio y 3 de potasio por cada 10 gramos de producto y se vende a 0.3 euros/g. También hay otro producto B que contiene, por cada 10 gramos, un total de 2 de sodio y 2 de potasio y se vende a 0.4 euros/g. ¿Qué cantidad de cada producto habrá que adquirir para cumplir las exigencias del compuesto químico y al mismo tiempo tener el menor gasto posible?

23 El veterinario ha recomendado que durante un mes, el perro de un cliente tome diariamente 4 unidades de hidratos de carbono (H), 23 de proteínas (P) y 6 de grasas (G). En el mercado hay 2 marcas de comida que las contienen con las siguientes características (por bote):

Marca	H	P	G	Precio
A	4	6	1	10
B	1	10	6	16

Halla la combinación de las dos marcas para que el perro tome al día las cantidades requeridas al menor gasto.

24 Una empresa fabrica dos tipos de fertilizantes F1 y F2 a partir de cuatro elementos, nitrógeno, ácido fosfórico, potasio y guano. La siguiente tabla expresa la composición en litros por bidón de estos fertilizantes:

	Nitrógeno	Á. fosfórico	Potasio	Guano
F1	20	30	30	20
F2	10	10	60	20

La semana próxima se dispone de 900 litros de nitrógeno y 1 400 litros de guano pero la gran cantidad de stock que posee de los otros dos componentes requiere utilizar al menos 600 litros de ácido fosfórico y 1800 litros de potasio. Si cada bidón del fertilizante F1 proporciona un beneficio de 6 € y cada uno de F2 proporciona un beneficio de 5 €, optimiza el beneficio de la semana próxima.

25 La mezcla de 3 elementos químicos A, B y C, permite elaborar dos compuestos H y K. Las cantidades, en gramos, requeridas por cada litro de compuesto viene dado en la tabla:

	A	**B**	**C**
H	3	6	37
K	33	11	2

Una empresa dispone a lo sumo de 7 755 litros de A y 3 300 de B, sin embargo necesita desprenderse de al menos 370 litros de C (que posee cantidad ilimitada). Si el beneficio de un litro de H es 8 € y 3 € para K, resuelve la estrategia óptima de fabricación.

26 Una empresa fabrica dos modelos de cazadoras A y B. Utiliza tres tipos de tejidos, lana, algodón y seda. El modelo A requiere 0.25 m^2 de lana, 0.5 m^2 de algodón y 0.75 m^2 de seda; el modelo B requiere 0.75 m^2, 0.5 m^2 y 0.5 m^2 respectivamente. Dispone de 50 m^2 de lana, 60 m^2 de algodón y 80 m^2 de seda. Si la chaqueta del modelo A se vende a 1 250 € y la de B a 1 750 €, ¿cuántas cazadoras de cada tipo fabricará para optimizar ingreso?

27 Una alimentación adecuada para un determinado animal requiere 120 unidades de vitamina A, 240 de vitamina B y 80 de vitamina C. Un ganadero utiliza dos productos P y Q que contienen dichas vitaminas, P proporciona 60 unidades de A, 40 de B y 20 de C, y Q proporciona 20 de A, 120 de B y 20 de C, siendo todas las cantidades por litro. Si solo dispone de 7 litros de P y 7 de Q a 40 € y 32 € respectivamente, ¿cuánto debe utilizar de cada producto para alimentar correctamente a sus animales con el menor gasto posible?

28 Se dispone de 200 hectáreas de terreno donde cultivar patatas y zanahorias. Cada hectárea dedicada al cultivo de patatas necesita 12.5 litros de agua de riego mensual mientras que la de zanahorias necesita 40 litros, disponiéndose mensualmente de un total de 5000 litros de agua para el riego. Por otra parte, las necesidades por hectárea de abono nitrogenado son de 20 kg para las patatas y de 30 kg para las zanahorias, disponiéndose de un total de 4500 kg de abono nitrogenado. Si la ganancia por hectárea sembrada de patatas es de 300 € y de 400 € la de zanahorias, ¿cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para maximizar la ganancia? ¿Cuál sería ésta?

29 Una empresa fabrica dos productos diferentes, P1 y P2, que vende a 300 y 350 € por tonelada (t) respectivamente. Para ello utiliza dos tipos de materias primas (A y B) y mano de obra. Las disponibilidades semanales de las materias primas son 30 t de A y 36 t de B y las horas de mano de obra disponibles a la semana son 160. En la tabla siguiente se resumen los requerimientos (en t) de las materias primas y las horas de trabajo necesarias para la producción de una tonelada de cada producto:

	A	B	Mano de obra
P1	2	3	4
P2	3	1	20

Determina la producción semanal que maximiza el ingreso de la empresa sabiendo que un estudio de mercado indica que la demanda del producto P2 nunca supera a la del producto P1. ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?

30 Un estudiante reparte propaganda publicitaria para conseguir ingresos. Le pagan 8 cents de euro por cada impreso colocado en el parabrisas de un coche y 12 cents por cada uno depositado en un buzón. Ha calculado que cada día puede repartir como máximo 150 impresos y la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coches y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades. Además tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente. ¿Cuántos impresos debe colocar en coches y en buzones para maximizar su ingreso diario? ¿Cuál es este ingreso máximo?

31 Un comerciante quiere invertir hasta 1000 euros en la compra de dos tipos de aparatos A y B pudiendo almacenar en total hasta 80 aparatos. Cada aparato de tipo A le cuesta 15 € y lo vende a 22, cada uno del tipo B le cuesta 11 € y lo vende a 17. ¿Cuántos aparatos debe comprar de cada tipo para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio?

32 Un tren de mercancías puede tirar a lo sumo de 103 vagones. En un viaje, lleva coches y motos. Para los coches debe utilizar más de 53 vagones y para las motos no menos de la mitad de los dedicados a coches y no menos de 23 vagones. El ingreso de la compañía es de 550 € por cada vagón de coche y 360 € por cada vagón de motos. ¿Cómo debe distribuir los vagones para ingresar la mayor cantidad de dinero?

33 Una empresa tiene dos piscifactorías A y B que producen 8 000 kg y 15 000 kg respectivamente de doradas. Toda la producción es vendida en tres tiendas, P, Q y R, que necesitan 10 000, 7 000 y 6 000 kg respectivamente. El coste de transporte desde las piscifactorías hasta los puntos de venta, en euros por kg vienen en la tabla siguiente. ¿Cómo debe organizar el transporte para que el coste del mismo resulte más barato?

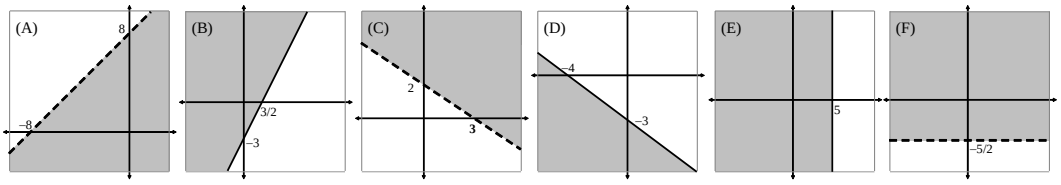
	P	Q	R
A	0.06	0.13	0.02
B	0.04	0.04	0.12

34 Una empresa tiene dos plantas manufactureras A y B que producen 11 000 kg y 13 000 kg de un cierto producto respectivamente cada año. Envía la producción a sus plantas empaquetadoras, P, Q y R, que procesan 6 000, 8 000 y 10 000 kg respectivamente. Si el coste de transporte viene dado en la tabla siguiente en euros por kg, ¿cómo debe organizarlo para que el coste del mismo resulte más barato?

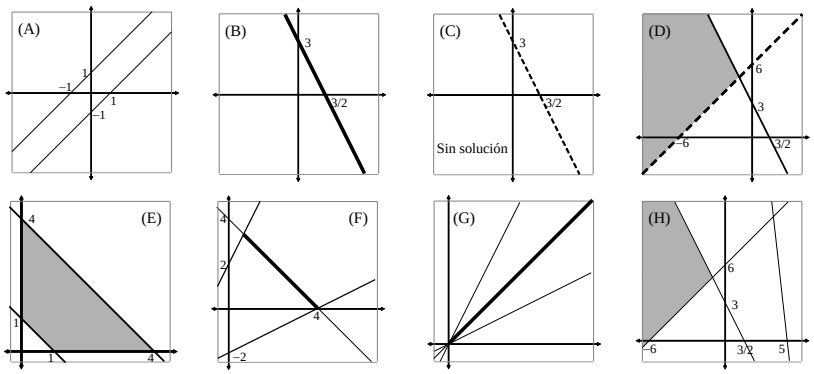
	P	Q	R
A	0.03	0.05	0.02
B	0.04	0.03	0.04

Soluciones de las actividades del capítulo 4

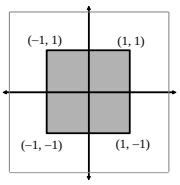
1. No, sí. **2.** (A) m = –3/2 y m' = 2, se cortan, SCD. (B) m = 4 y m' = 4, n = 5/2 y n' = –1, paralelas, SI. (C) m = 2/5 y m' = 2/5, n = –1/5 y n' = –1/5, coincidentes, SCI. **3.** (A) y = 7x – 17, 7x – y –17 = 0, m = 7. (B) y = 2x/3, 2x – 3y =0, m = 2/3. (C) y = 3, y – 3 = 0, m = 0. (D) x = 1, x – 1 = 0, m no existe. **4.** (A) y = 5, x = 2. (B) y = 0, x = 0. (C) y = –3, x = 0. (D) y = 0, x = –1. (E) y = b, x = a. **5.** 2x – 3y = –5, 2x – 3y = 0. **6.** (A) No, (B) no, (C) sí, (D) sí, (E) no, (F) sí, (G) sí, (H) no. **7.** (A) (0, 0), (1, 0); (5, 0), (0, 3). (B) (5, 0), (0, 3); (0, 0), (1, 0). (C) (0, 0), (1, 1); (0, –6), (1, –10). (D) (0, 0), (1, 1); (7, 2), (8, 3). (E) (5, 0), (3, 2); (–3, 2), (–1, 5). (F) (2, 0), (2, –2); (0, 7), (–2, 8). **8.**



9. (2, 0), (4, 1), (0, –1), (–1, 0). **10.**

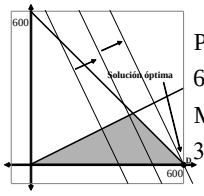


11.



$$\left.\begin{array}{l} y \le 1 \\ y \ge -1 \\ x \le 1 \\ x \ge -1 \end{array}\right\}$$

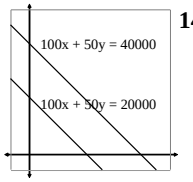
12.

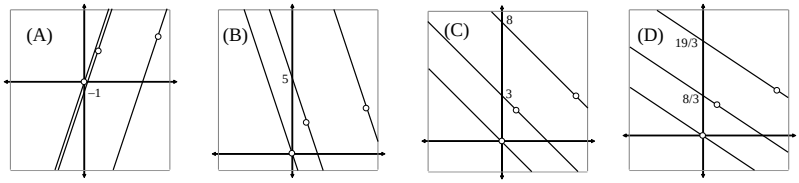


Producción óptima:
600 t del tipo A, 0 t del tipo B
Máximo beneficio:
30000 €

13. (A) Las parejas (x,y) de maquinillas de los tipos 1 y 2 que de producirlas darían un beneficio de 20000 u.m.
(B) Lo mismo, pero con beneficio de 40000 u.m.

14.





$3x - y = 0$	$3x + y = 0$	$x + y = 0$	$2x + 3y = 0$
$3x - y = 1$	$3x + y = 5$	$x + y = 3$	$2x + 3y = 8$
$3x - y = 12$	$3x + y = 18$	$x + y = 8$	$2x + 3y = 19$

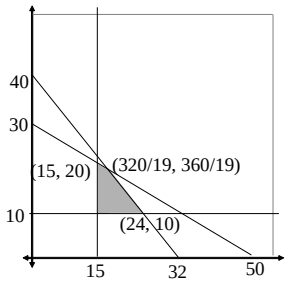
15. (A) 14 y 5. (B) 7 y 5/2. (C) 8 y 4. (D) 4 y –4. (E) $\frac{16}{3}$ y 0. (F) 0 y –16. **16.** (A) 3000 litros de A_1 y 6000 litros de A_2 (beneficio de 33000 €). (B) 8000 litros de A_1 y 3000 litros de A_2 (beneficio de 27000 €).
17. (A) 150 gramos de A y 50 gramos de B. (B) 25 gramos de A y 25 gramos de B.

18. (A) $f(x, y) = 75x + 50y$

$$\text{s. a.}\quad \left.\begin{array}{l} 4x + 7y \le 200 \\ 100x + 80y \le 3200 \\ x \ge 15,\quad y \ge 10 \end{array}\right\}$$

(B) 24 kg de A y 10 kg de B. Beneficio 23000 €.

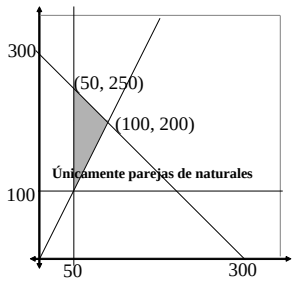
(C) 320/19 kg de A y 360/19 kg de B.



19. (A) $f(x, y) = 1.5x + y$

$$\text{(B)}\quad \left.\begin{array}{l} x \ge 50 \\ y \ge 100 \\ y \ge 2x \\ x + y \le 300 \end{array}\right\}$$

(C) 100 unidades de A y 200 de B. Beneficio 350 €.

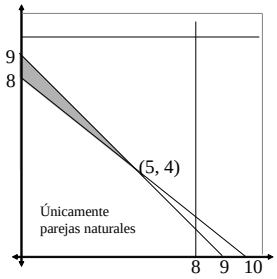


20. (A) $f(x, y) = 600x + 800y$

$$\left.\begin{array}{l} x \le 8,\ \ y \le 10 \\ x + y \le 9 \\ 40x + 50y \ge 400 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

(B) 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas.

El coste del viaje es 6200 €.



21. Coste: 26400 €.

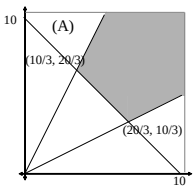
	A	B	C
M	9	2	19
S	1	13	1

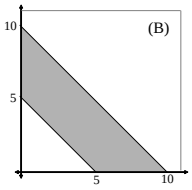
22. 86000 km.

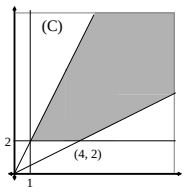
	C	D	E
A	8	1	1
B	7	9	4

Soluciones de los problemas del capítulo 4

1.



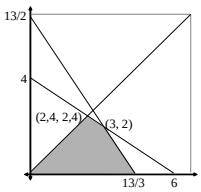




2.

	A		B		C	
	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.
A	No	40/3	20	5	No	4
B	No	40/3	20	5	No	5
C	No	0	20	–10	No	0
D	No	10/3	10	0	No	1

3. (A) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$. (B) $3x + 2y \le 16$, $x - 3y \le -2$, $4x - y \ge 3$. (C) $x + y \le 1$, $x + y \ge -1$, $-x + y \le 1$, $-x + y \ge -1$. (D) $y \le 4$, $y \ge 1$, $x \le 5$, $x \ge 1$, $x + 2y \ge 5$. (E) $x \ge 0$, $-x + 3y \ge 0$, $x - 2y \le 1$, $4x - y \ge -4$, $3x + 2y \le 19$.

4. (A) 

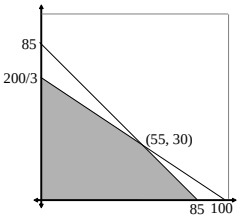
(B)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Máx	5	$\frac{13}{3}$	12	17	14.4	0	$\frac{13}{3}$	2.4
Mín	0	0	0	0	0	$-\frac{26}{3}$	0	0

5.

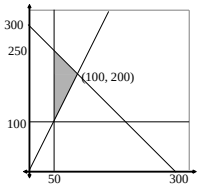
	Máx	Mín
m>1	40m	5+5m
m=1	40	10
m<1	20+20m	10m

6. (A) 11. (B) 22. **7.** (A) Máximo: 2240, para x = 55, y = 30; mínimo: 0, para x = y = 0. (B) No tendría ni máximo ni mínimo. (C) El problema pasa a ser de programación lineal entera, y con desigualdades estrictas, los óptimos están en el interior del conjunto factible. Máximo: 2214, para x = 54, y = 30;y el mínimo 53, para x = y = 1.



8. (A) 18 y 3. (B) 3 y −12. (C) 12 y −3. (D) −3 y −18. **9.** (A) No se alcanza el máximo. (B) No se alcanza el mínimo. (C) Se alcnza en (1, 2) y en (2, 1) y su valor es 15. **10.** A) Mínimo: 19/30, no hay máximo. (B) No hay máximo ni mínimo. (C) El mínimo es 4, no hay máximo. (D) No hay máximo ni mínimo. **11.** 300 unidades de A y 600 de B. **12.** 40 chalets del tipo A y 60 del B (beneficio 14000000 €). **13.** 25 coches pequeños y 15 grandes (beneficio 22250 €). **14.** 12000 € en bonos del tipo A y 8000 € en bonos del tipo B, con beneficio de 2400 €.
15. 9 inspectores de la clase A y 0 de la B. Costes 3600 €. **16.** 10 pasteles P_1 y 30 de P_2 (beneficio de 850 €).
17. 0 sillas, 4 mesas, un beneficio de 140 €. **18.** 186 viviendas de 200 m^2 y 76 de 300 m^2 (ingreso de 41240000 €).

19. (A) f(x, y) = 1.5x + y. (B) $\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 100 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 300 \end{array}\right\}$



(C) 100 unidades de A; 200 unidades de B; ingreso máximo: 350 €.

20. La 1.ª fábrica 3 días y la 2.ª fábrica 1 día; coste: 190000 €. **21.** (A) 1000 televisores y 2000 cadenas de música. (B) 2000 televisores y ninguna cadena de música. **22.** 20 g de A y 30 de B (coste de 18 €). **23.** 0.5 botes de A y 2 de B. **24.** 20 litros de F_1 y 50 de F_2; beneficio: 370 €. **25.** 550 litros de H y ninguno de K; beneficio de 4400 €.
26. 80 del tipo A y 40 del B; ingreso: 170000 €. **27.** Un litro de P y 3 de Q; coste: 136 €. **28.** 150 ha de patatas y 50 ha de zanahorias; 65000 €. **29.** 6 toneladas de cada producto; 3900 €. **30.** 110 impresos en coches y 40 en buzones; 13.60 €. **31.** 30 del tipo A y 50 del tipo B; 510 €. **32.** El máximo beneficio se alcanza para 68 vagones de coches y 35 de motos. El ingreso máximo es 50 000 euros.

33. Coste 840 €.

	P	Q	R
A	2000	0	6000
B	8000	7000	0

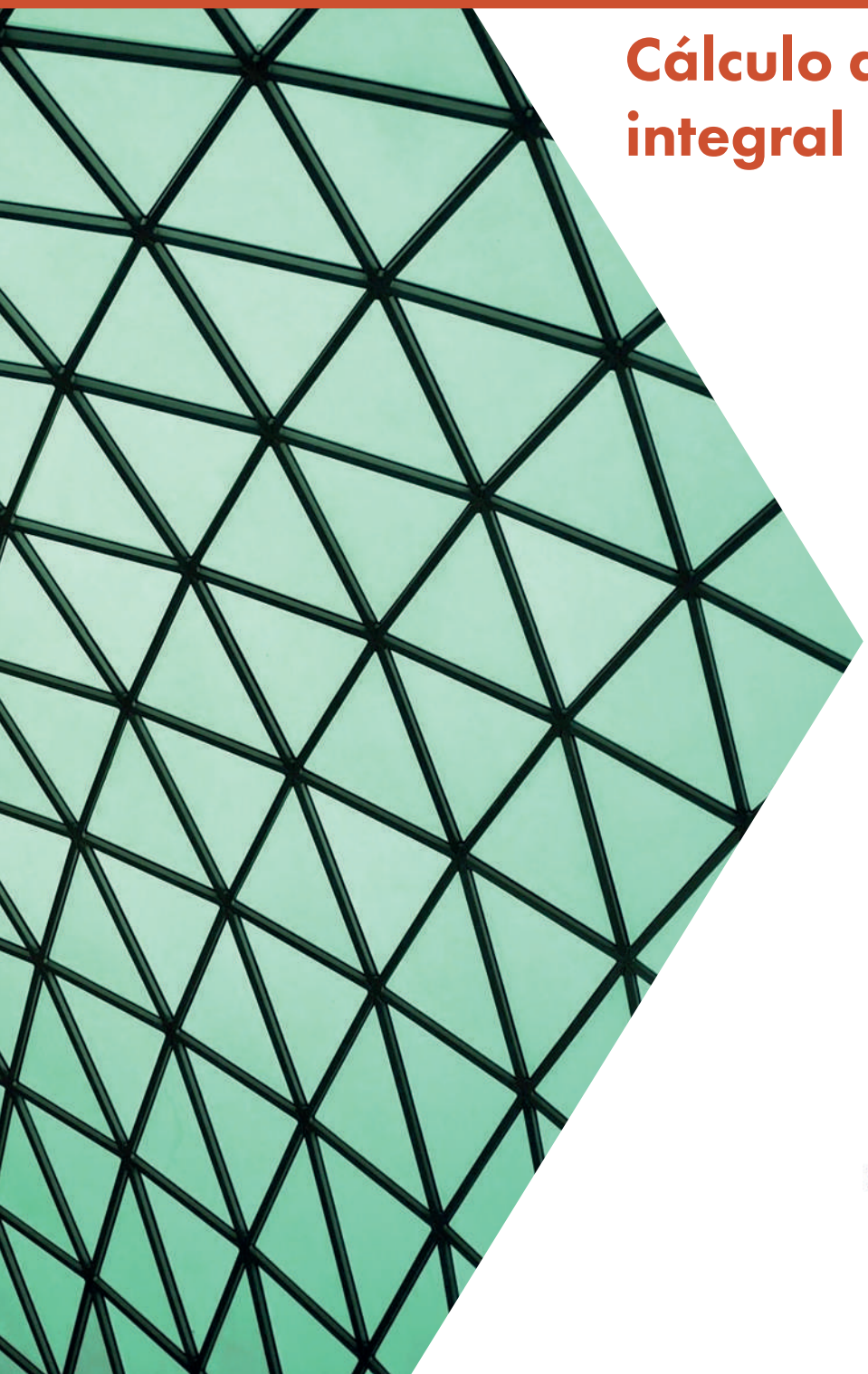
34. Coste 470 €.

	P	Q	R
A	1000	0	10000
B	5000	8000	0

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales



Cálculo diferencial e integral

educàlia editorial

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Cálculo diferencial e integral

educàlia
editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-06-0

Depósito legal: V-3242-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Todos los derechos reservados. No está permitida la reimpresión de ninguna parte de este libro, ni de imágenes ni de texto, ni tampoco su reproducción, ni utilización, en cualquier forma o por cualquier medio, bien sea electrónico, mecánico o de otro modo, tanto conocida como los que puedan inventarse, incluyendo el fotocopiado o grabación, ni está permitido almacenarlo en un sistema de información y recuperación, sin el permiso anticipado y por escrito del editor.

Alguna de las imágenes que incluye este libro son reproducciones que se han realizado acogiéndose al derecho de cita que aparece en el artículo 32 de la Ley 22/18987, del 11 de noviembre, de la Propiedad intelectual. Educàlia Editorial agradece a todas las instituciones, tanto públicas como privadas, citadas en estas páginas, su colaboración y pide disculpas por la posible omisión involuntaria de algunas de ellas.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 4

Aplicaciones de las derivadas

4.1 Crecimiento de una función
- Crecimiento y decrecimiento local
- Propiedad 1: Condiciones suficientes de crecimiento en un punto
- Intervalos de crecimiento de una función

4.2 Extremos relativos de una función
- Propiedad 2: Condición necesaria de extremo relativo

4.3 Métodos para clasificar los extremos relativos
- Criterio del cambio de signo de la derivada
- Criterio del signo de la segunda derivada

4.4 Extremos absolutos de una función
- Cálculo de los extremos absolutos

4.5 Problemas de optimización

4.6 Curvatura
- Propiedad 3: Condiciones suficientes de curvatura
- Intervalos de concavidad y convexidad de una función
- Condición necesaria de punto de inflexión
- Criterio de la tercera derivada
- Punto de rendimientos decrecientes: Máxima eficiencia

4.7 Representación gráfica de funciones

4.1 Crecimiento de una función

Uno de los objetivos de este capítulo es representar perfectamente las funciones que no conocemos previamente. Se efectúa a partir de las relaciones entre la propia función y sus funciones derivadas. Otro de los objetivos, muy aplicado en otras ciencias, es la optimización.

En primer lugar veamos la relación existente entre el crecimiento de las funciones y la función derivada, de donde extraeremos las primeras conclusiones.

➢ Crecimiento y decrecimiento local

Consideramos una función f definida en un dominio D_f y un punto $x_0 \in D_f$

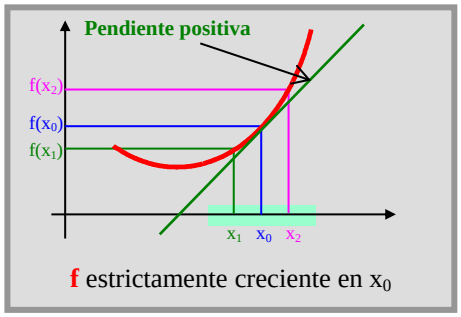
- Decimos que f es ***estrictamente creciente en*** $\mathbf{x_0}$ si existe un entorno de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tal que para cualquier $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ se tiene que:

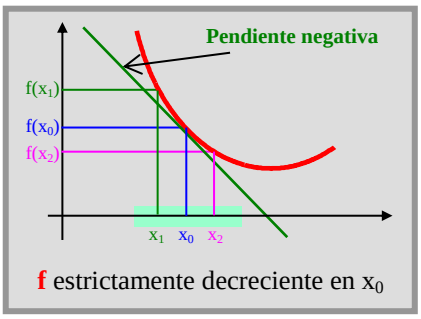
$$\text{si } \mathbf{x < x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_0)}$$
$$\text{si } \mathbf{x > x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_0)}$$

- Decimos que f es ***estrictamente decreciente en*** $\mathbf{x_0}$ si existe un entorno de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tal que para cualquier $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ se tiene que:

$$\text{si } \mathbf{x < x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_0)}$$
$$\text{si } \mathbf{x > x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_0)}$$

Observa que la definición de crecimiento en un punto x_0 requiere el crecimiento en un entorno de x_0.





Observa que la pendiente de la recta tangente en x_0 es positiva en el primer dibujo, donde f es creciente en x_0, y negativa en el segundo, donde f es decreciente; así tenemos la siguiente propiedad:

➢ Propiedad 1: condiciones suficientes de crecimiento en un punto

Consideramos una función f derivable en x_0:

- Si $\mathbf{f'(x_0) > 0}$ (pendiente positiva) $\rightarrow$ **f es estrictamente creciente en $\mathbf{x_0}$**
- Si $\mathbf{f'(x_0) < 0}$ (pendiente negativa) $\rightarrow$ **f es estrictamente decreciente en $\mathbf{x_0}$**

Por tanto, al hallar la derivada en un punto concreto x_0:

- Si $f'(x_0) \neq 0$, la función es estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente.
- **Si $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ o f no es derivable en $\mathbf{x_0}$**, nada podemos asegurar sobre la función.

Llamamos ***puntos singulares*** de una función f a aquellos en los que f no es derivable o f' se anula.

Ejemplo 1

Estudiamos el crecimiento de las siguientes funciones en los puntos $x_0 = -2, -1, 1$ y 2:

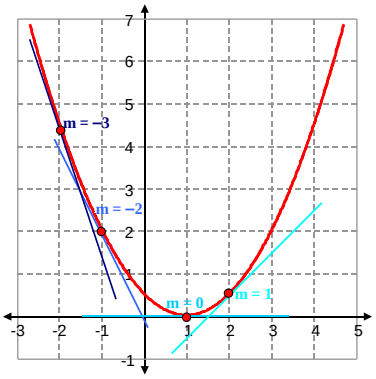
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \qquad g(x) = \frac{1}{9}(x+1)^3 \qquad h(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^3 \qquad t(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

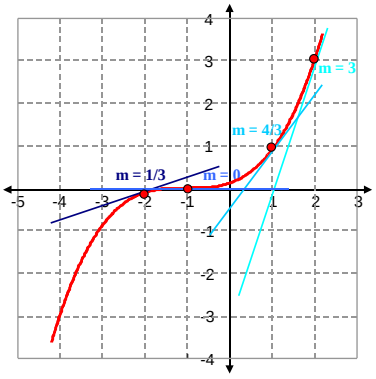
Sus funciones derivadas son:

$$f'(x) = (x-1) \qquad g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^2 \qquad h'(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 \qquad t'(x) = -\frac{8}{(x-1)^3}$$

$f'(-2) = -3$	$\rightarrow$	f es decreciente en $x = -2$
$f'(-1) = -2$	$\rightarrow$	f es decreciente en $x = -1$
$f'(1) = 0$	$\rightarrow$	$x = 1$ es un punto singular de f
$f'(2) = 1$	$\rightarrow$	f es creciente en $x = 2$

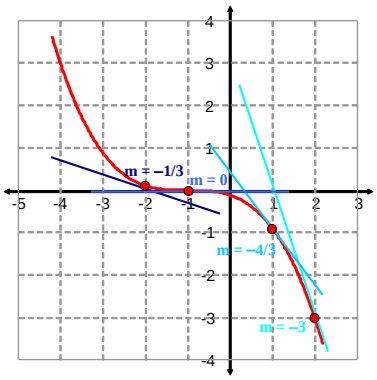
$g'(-2) = 1/3$	$\rightarrow$	g es creciente en $x = -2$
$g'(-1) = 0$	$\rightarrow$	$x = -1$ es un punto singular de g
$g'(1) = 4/3$	$\rightarrow$	g es creciente en $x = 1$
$g'(2) = 3$	$\rightarrow$	g es creciente en $x = 2$

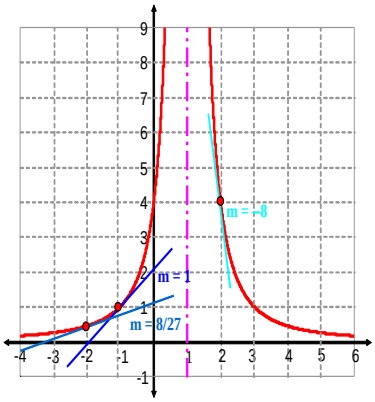




$h'(-2) = -1/3$	$\rightarrow$	h es decreciente en $x = -2$
$h'(-1) = 0$	$\rightarrow$	$x = -1$ es un punto singular de h
$h'(1) = -4/3$	$\rightarrow$	h es decreciente en $x = 1$
$h'(2) = -3$	$\rightarrow$	h es decreciente en $x = 2$

$t'(-2) = 8/27$	$\rightarrow$	t es creciente en $x = -2$
$t'(-1) = 1$	$\rightarrow$	t es creciente en $x = -1$
no existe $t'(1)$	$\rightarrow$	$x = 1$ es un punto singular de t
$t'(2) = -8$	$\rightarrow$	t es decreciente en $x = 2$





- Observa que el signo positivo o negativo de la derivada en cada punto (que es el signo de la pendiente) indica el crecimiento o decrecimiento de las funciones en dichos puntos.
- En cambio cuando la derivada es nula o no existe (puntos singulares) hay incertidumbre; significa que cada función, y en cada caso, tendrá resultados diferentes. Así vemos que **f no crece ni decrece en x = 1, g es creciente en x = –1, h es decreciente en x = –1** y **t no está definida en x = 1**.

1 Estudia si las siguientes funciones crecen o decrecen en los puntos $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$ y 5:

(A) $f(x) = 1/x$ (B) $f(x) = x^2 - 4x$ (C) $f(x) = \ln x$ (D) $f(x) = e^x$ (E) $f(x) = 1/x^2$

➢ Intervalos de crecimiento de una función

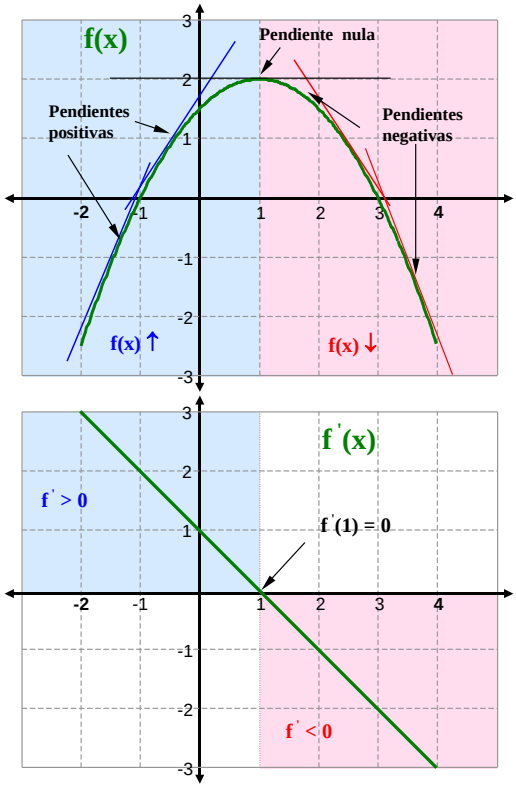
Decimos que una función f es ***estrictamente creciente*** (***decreciente***) ***en un intervalo*** **I** si es estrictamente creciente (decreciente) en cada uno de los puntos de dicho intervalo I.

Ejemplo 2

Consideramos la parábola $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ con dominio $\mathbb{R}$.

Su función derivada es $f'(x) = -x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Es una función afín (una recta).

Con la representación gráfica de ambas observamos algunas características que expresamos junto a sus gráficas.



- La gráfica de f es una parábola creciente hasta su vértice V(1, 2) y decreciente a partir de él:

  f crece en]–∞, 1[y decrece en]1, +∞[

- $\forall x \in]-\infty, 1[$, la derivada es positiva.

  $$f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-\infty, 1[$$

  (Observa que las rectas tangentes tienen pendiente positiva).

- $\forall x \in]1, +\infty[$, la derivada es negativa.

  $$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

  (Observa que las rectas tangentes tienen pendiente negativa).

- El punto donde f pasa de crecer a decrecer es un punto singular:

  $$f'(1) = 0$$

Deducimos que **los puntos relevantes para determinar el crecimiento de una función son los puntos singulares** (x = 1, en el ejemplo). Obtenemos el siguiente método para su estudio:

Consideramos una función f definida en su dominio D:

1 Hallamos los puntos singulares de f en D y los ordenamos: $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

2 La recta real queda dividida por los puntos singulares en los intervalos:

$$]a, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ ]x_2, x_3[,\ ..,\ ]x_n, b[,$$ donde a puede ser –∞ y b puede ser +∞.

En el interior de los intervalos anteriores no hay puntos singulares, luego f' tiene signo constante en cada intervalo. Son llamados ***intervalos de crecimiento*** de la función.

3 Elegimos un punto x del interior de cada intervalo. Si $f'(x) > 0$, la función f es creciente en dicho intervalo. Si $f'(x) < 0$, f es decreciente en dicho intervalo.

Ejemplo 3

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ con dominio $\mathbb{R}$.

Aplicamos el método anterior siguiendo los pasos indicados.

1 Hallamos los puntos singulares.

La función derivada es $f'(x) = x^2 - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$, y se anula en

$$\mathbf{f'(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -2,\ x_2 = 2}$$

El conjunto de puntos singulares ordenados son **{–2, 2}**.

2 A partir de ellos consideramos los intervalos **]–∞, –2[,]–2, 2[** y **]2, +∞[** dentro de los cuales, por construcción, no existe ningún otro punto singular.

3 Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo, eligiendo un punto cualquiera de cada uno.

En **]–∞, –2[** el signo de la derivada no puede cambiar, por tanto, el signo que posea en x = –3 será el mismo para todos los puntos del intervalo:

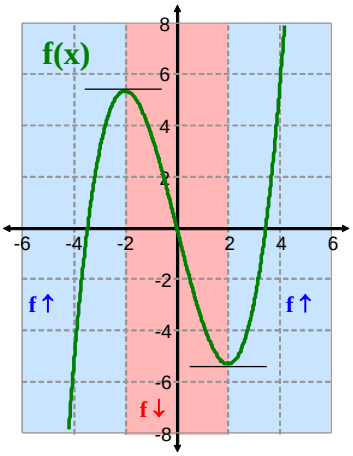
En **]–∞, –2[** consideramos el punto x = –3: $\mathbf{f'(-3) = 5 > 0}$ ⇒ **f estrictamente creciente en]–∞, –2[**

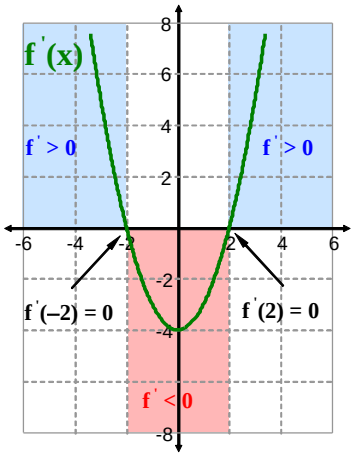
Análogamente en los otros intervalos:

En **]–2, 2[** consideramos el punto x = 0: $\mathbf{f'(0) = -4 < 0}$ ⇒ **f estrictamente decreciente en]–2, 2[**

En **]2, +∞[** consideramos el punto x = 3: $\mathbf{f'(3) = 5 > 0}$ ⇒ **f estrictamente creciente en]–2, +∞[**

Intervalos	]–∞, –2[	]–2, 2[	]2, +∞[
Signo f '	+	–	+
f	↑	↓	↑





2 Halla los intervalos de crecimiento de las funciones:

(A) $f(x) = -x^2 + 1$ (B) $f(x) = x^5 - 80x$ (C) $f(x) = e^{x-1}$ (D) $f(x) = \ln(x + 1)$ (E) $f(x) = -x^5$

(F) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ (G) $f(x) = -x + 1$ (H) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (I) $f(x) = 1/e^x$

(J) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (K) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (L) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (M) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

4.2 Extremos relativos de una función

Consideramos una función f y un punto $x_0 \in D_f$. Decimos que:

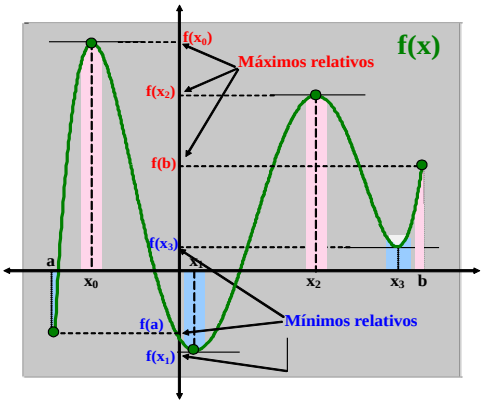
- **f *tiene un máximo relativo en* x_0** si las imágenes de los puntos de un entorno de x_0 cumplen:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

- **f *tiene un mínimo relativo en* x_0** si las imágenes de los puntos de un entorno de x_0 verifican:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

El ***extremo relativo*** (máximo o mínimo) es **$f(x_0)$**, que diremos es **alcanzado en** el punto **x_0**.



Las imágenes de los puntos x situados en el entorno (en rosa) de x_0 son menores que $f(x_0)$:

$f(x_0)$ es un máximo relativo

También lo son $f(x_2)$ y $f(b)$.

Las imágenes de los puntos x situados en el entorno (en azul) de x_1 son mayores que $f(x_1)$:

$f(x_1)$ es un mínimo relativo

También lo son $f(a)$ y $f(x_3)$.

En los puntos del interior del dominio de una función derivable en los que se alcanzan extremos relativos cambia el crecimiento de las funciones, y las rectas tangentes en ellos son horizontales.

➢ Propiedad 2: condición necesaria de extremo relativo

Consideramos que f es derivable en $x_0 \in D_f$.

Si f tiene un extremo relativo en x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

La condición necesaria anterior dice que **cuando en un punto x_0 la derivada no es nula es imposible alcanzar en él un extremo relativo** (recuerda que en ese caso la función será estrictamente creciente o estrictamente decreciente en él).

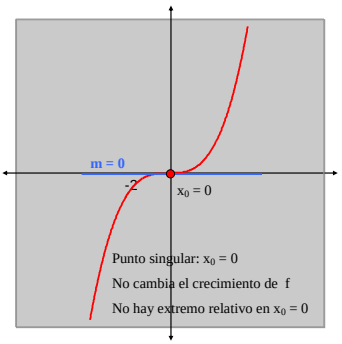
Por ello deducimos que **los únicos puntos del interior del dominio de una función f en los que *se puede alcanzar* un extremo relativo son los puntos singulares**. Sin embargo:

La gráfica de la función $f(x) = x^3$ con dominio $\mathbb{R}$, demuestra que **no es obligatorio que en los puntos singulares haya un extremo relativo:**

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

El único punto singular de f es x = 0. Sin embargo f es estrictamente creciente en cualquier entorno de x = 0, pues la derivada es no negativa:

$$f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \text{si } x \neq 0$$



3 Obtén el punto donde alcanza un extremo relativo la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.3 Métodos para clasificar los extremos relativos

Los siguientes métodos establecen si en un punto singular se alcanza extremo relativo. El primer método, **criterio del cambio de signo de la primera derivada**, se aplica para puntos singulares en los que la función sea continua, aunque no sea derivable. El segundo, **criterio del signo de la segunda derivada,** solo es aplicable a los puntos singulares en los que la función sea derivable al menos dos veces.

➢ Criterio del cambio de signo de la derivada

Supongamos f continua en [a, b] y derivable en]a, b[excepto a lo sumo en $x_0 \in$]a, b[:

- Si $\mathbf{f' < 0}$ en $]a, x_0[$ i $\mathbf{f' > 0}$ en $]x_0, b[$ → **f pasa de decrecer a crecer y, por tanto , tiene un mínimo relativo en x_0**
- Si $\mathbf{f' > 0}$ en $]a, x_0[$ i $\mathbf{f' < 0}$ en $]x_0, b[$ → **f pasa de crecer a decrecer y, por tanto , tiene un máximo relativo en x_0**

Ejemplo 4

Hallamos los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ con dominio ℝ.

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. La función es derivable en ℝ, y sus únicos puntos singulares son las soluciones de:

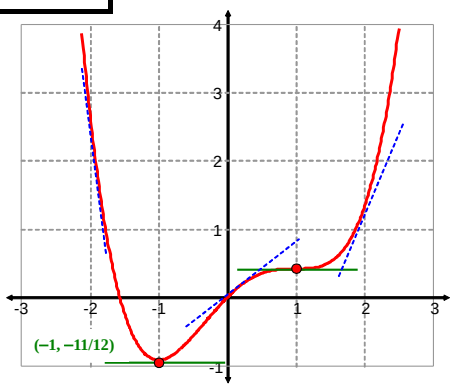
$$\mathbf{f'(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$$

Consideramos los intervalos **]–∞, –1[,]–1, 1[** y **]1, +∞[**.

En **]–∞, –1[** consideramos x = –2: $\mathbf{f'(-2) = -9 < 0}$ ⇒ **f estrictamente decreciente en]–∞, –1[**
En **]–1, 1[** consideramos x = 0: $\mathbf{f'(0) = 1 > 0}$ ⇒ **f estrictamente creciente en]–1, 1[**
En **]1, +∞[** consideramos x = 2: $\mathbf{f'(2) = 3 > 0}$ ⇒ **f estrictamente creciente en]1, +∞[**

Intervalos	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signo f '	–	+	+
f	↓	↑	↑

Cambio de signo de f ': **Sí** **No**



En los cambios de signo de f ' habrá extremo relativo:

En x = –1 se alcanza un mínimo relativo, pues f pasa de ser decreciente a ser creciente. **El valor mínimo es** $\mathbf{f(-1) = -\frac{11}{12}}$.

En x = 1 no se alcanza extremo relativo (f es creciente).

Aunque no podemos mostrar todavía cómo realizamos la representación gráfica, su exposición apoya los resultados.

4 Halla los extremos relativos de la función del ejemplo 4 si está definida en:
(A) [–1, 1] (B)]–1, 1[(C) [0, 3]

5 Halla los extremos relativos de las siguientes funciones definidas en ℝ y en [–2, 2.5]:
(A) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (B) $f(x) = x^3 - x$ (C) $f(x) = x^3 + x$ (D) $f(x) = x^3 - 6x^2$

➢ Criterio del signo de la segunda derivada

El signo de la segunda derivada, evaluada en los puntos con primera derivada nula, permite conocer los máximos y mínimos relativos de la función. Veamos en un ejemplo el porqué.

Ejemplo 5

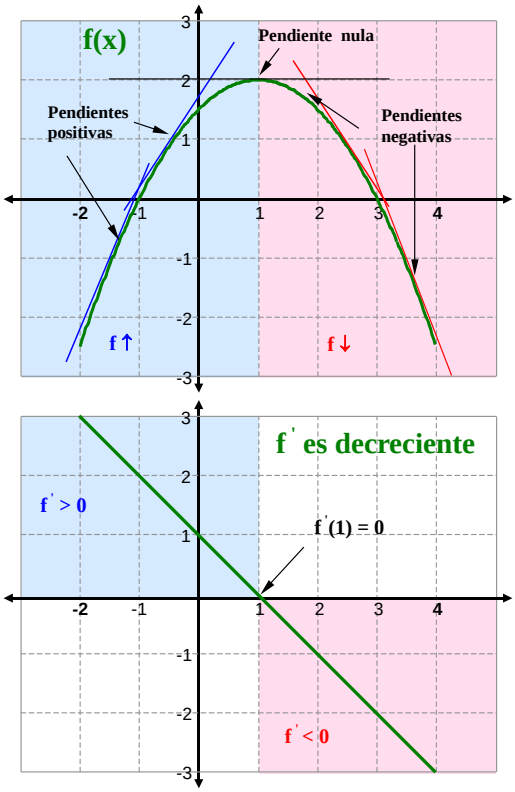
Consideramos de nuevo la parábola del ejemplo 2, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ con dominio $\mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x) = -x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Es una función afín (una recta).

Su derivada segunda es $f''(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Es una función constante y siempre negativa.

Veamos el significado de la segunda derivada en el punto singular de esta función (que sabemos que es el vértice de la parábola, en este caso un máximo relativo):

$$\mathbf{f'(x) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad -x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 1}$$



- Como $\mathbf{f''(1) = -1 < 0}$, y f'' es la derivada de f', por la propiedad 1:

  f' es estrictamente decreciente en x = 1

  Luego en un entorno de x = 1, la pendiente de la curva va disminuyendo.

- Como $\mathbf{f'(1) = 0}$, en ese entorno:

  $$\mathbf{f'(x) > 0 \quad si \quad x < 1}$$
  $$\mathbf{f'(x) < 0 \quad si \quad x > 1}$$

  La pendiente f' pasa de signo positivo a negativo en x = 1.

- Según el criterio del cambio de signo de la derivada

  f tiene un máximo relativo en x = 1

  pues f pasa de ser creciente a ser decreciente en dicho punto.

- Si en este ejemplo hubiera ocurrido que en el punto singular se tuviera $\mathbf{f''(1)} > 0$ entonces f' sería creciente en x = 1, que junto a $f'(1) = 0$, se tendría que f' pasaría de ser negativa a ser positiva en x = 1, indicativo de la existencia de un mínimo relativo en x = 1.
- ¿Qué ocurre en un punto que no sea singular? Que no es candidato a máximo o mínimo relativo.

Consideramos una función f dos veces derivable en x_0, tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$:

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ → **f tiene un mínimo relativo en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ → **f tiene un máximo relativo en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ → **no podemos asegurar nada**

Ejemplo 6

La función del ejemplo 4, $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ con dominio $\mathbb{R}$, tiene los siguientes puntos singulares:

$$\mathbf{f'(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$$

Aplicamos el criterio del signo de la segunda derivada para establecer los extremos relativos:

Hallamos la derivada segunda de f: $\mathbf{f''(x) = 3x^2 - 2x - 1}$.

- Como $\mathbf{f''(-1)} = 4 > \mathbf{0}$, la función alcanza un mínimo relativo en el punto $x = -1$.
- Como $\mathbf{f''(1) = 0}$, el criterio no es concluyente. Debemos recurrir al criterio anterior (ejemplo 4).

Ejemplo 7

Hallamos los extremos relativos de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = e^x$.

(A) $f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x$

Puntos singulares: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = 1}$

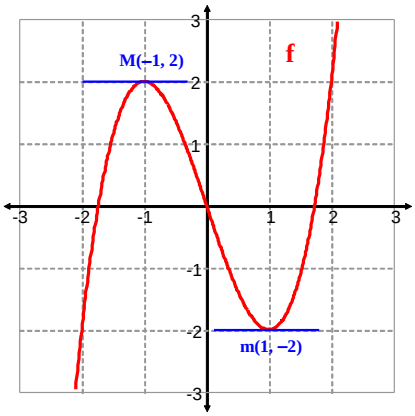
Criterio de la segunda derivada:

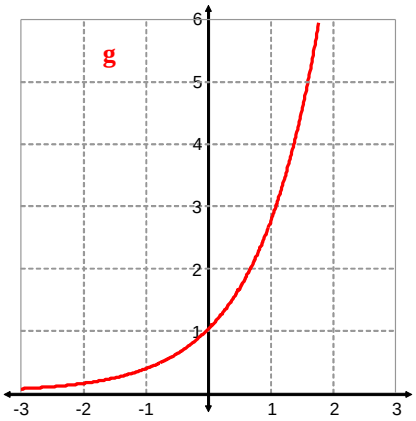
- $\mathbf{f''(-1)} = -6 < \mathbf{0} \quad \Rightarrow$ en $x = -1$ la función alcanza un máximo relativo. Punto de la gráfica $(-1, 2)$.
- $\mathbf{f''(1)} = 6 > \mathbf{0} \quad \Rightarrow$ en $x = 1$ la función alcanza un mínimo relativo. Punto de la gráfica $(1, -2)$.

(B) $g(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad g''(x) = e^x$

Puntos críticos: $g'(x) = e^x = 0 \quad \Rightarrow$ no hay ninguno pues $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Luego no hay extremos relativos, la función es siempre creciente ($g'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$).





6 Halla los extremos relativos de las funciones siguientes definidas en $\mathbb{R}$, y también en $[0, 5]$:

(A) $f(x) = 2x + 3$ (B) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ (C) $f(x) = (x-2)^4 + 1$ (D) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

7 Halla el valor de los parámetros m y n de la función $f(x) = x^2 + mx + n$ para que tenga un extremo relativo en el punto $(4, -4)$.

4.4 Extremos absolutos de una función

Los extremos relativos de una función son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma una función en un determinado entorno. Ahora preguntamos por el mayor y menor valor que toma la función pero en todo su dominio.

Consideramos una función f definida en un dominio D_f. Decimos que

- **f *tiene un máximo absoluto en* D_f** si

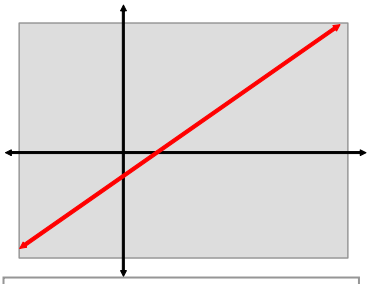
$$\exists x_M \in D_f \text{ tal que } \forall x \in D_f \text{ se verifica } f(x_M) \geq f(x)$$

- **f *tiene un mínimo absoluto en* D_f** si

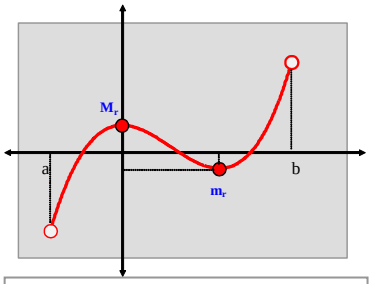
$$\exists x_m \in D_f \text{ tal que } \forall x \in D_f \text{ se verifica } f(x_m) \leq f(x)$$

El ***extremo absoluto*** (máximo o mínimo) es $f(x_0)$, que diremos es **alcanzado en** el punto x_0.

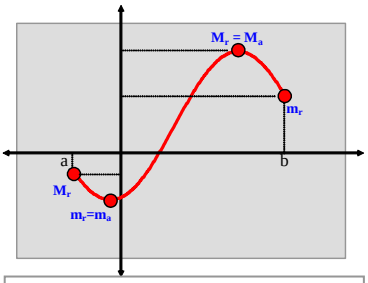
Desde el punto de vista gráfico, el extremo absoluto será un punto de la gráfica de f, $A(x_0, f(x_0))$, que ocupará la posición más alta o más baja de la misma. Veamos diferentes situaciones.



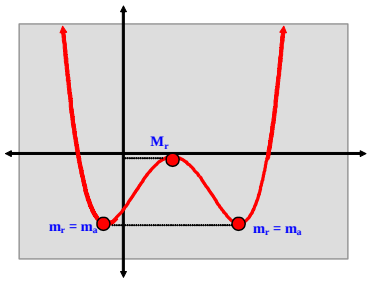
Dominio: ℝ
No posee extremos absolutos ni relativos.



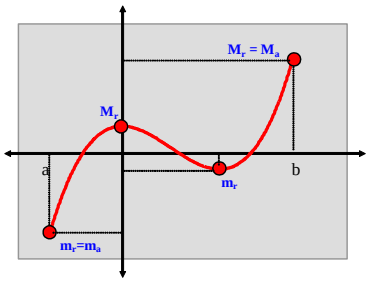
Dominio:]a, b[
No posee extremos absolutos.
Posee extremos relativos.



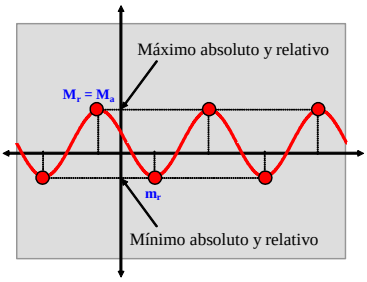
Dominio: [a, b]
Posee extremos absolutos y relativos (algunos coinciden).



Dominio: ℝ
Idénticos mínimos absolutos y relativos.
Posee máximo relativo pero no absoluto.



Dominio: [a, b]
Posee extremos absolutos y relativos.
No coinciden.



Dominio: ℝ
Posee extremos absolutos y relativos idénticos.

Observa que:

- El dominio de una función juega un papel importante en la existencia de extremos absolutos. **Si es un intervalo cerrado y la función es continua siempre hay extremos absolutos**.
- Si existen los extremos absolutos, coinciden con algún extremo relativo, bien situado en el interior del dominio bien en los puntos extremos del dominio de la función.

➢ Cálculo de los extremos absolutos

Consideramos una función f definida en un dominio. Para obtener los extremos absolutos de f:

1 Hallamos los extremos relativos $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ de entre los puntos singulares de f.

2 Si f es continua y su dominio es un intervalo cerrado [a, b], siempre hay extremos absolutos:
- El **mínimo absoluto** de f es el menor de los valores f(a), f(b), $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.
- El **máximo absoluto** de f es el mayor de los valores f(a), f(b), $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

3 Si el dominio de f no es un intervalo cerrado, los extremos absolutos se encuentran entre los relativos, **pero solo si** los límites de f, hacia los extremos del intervalo (a, b, $-\infty$ o $+\infty$) o hacia puntos de discontinuidad, **no invalidan dichos extremos máximos o mínimos**.

Ejemplo 8

Hallamos los extremos absolutos de la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ definida en el intervalo]–2, 3].

1 Hallamos los extremos relativos existentes en los puntos singulares (los situados en]–2, 3[).

Las dos primeras derivadas de f son $f'(x) = -x^2 + 2x$ y $f''(x) = -2x + 2$.

- Puntos singulares de f:

$$f'(x) = -x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 0,\ x_2 = 2}$$

- Criterio del signo de la segunda derivada:

$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ **en x = 0 se alcanza un mínimo relativo cuyo valor es f(0) = 0**
$f''(2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ **en x = 2 se alcanza un máximo relativo cuyo valor es f(2) = 4/3**

2 El dominio]–2, 3] no es un intervalo cerrado. Calculamos el valor de f en x = 3, y el límite de f cuando tiende a –2 por la derecha:

$$f(3) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) = \frac{20}{3}$$

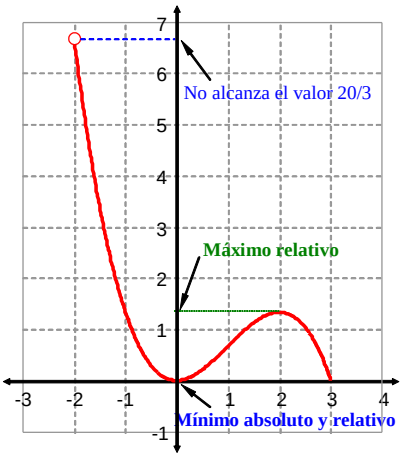
Comparamos los extremos relativos de f con los valores anteriores:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{20}{3} \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{4}{3} \qquad f(3) = 0$$

El **mínimo absoluto es 0**, menor imagen, que se alcanza para x = 0 y para x = 3 (el mínimo absoluto y el relativo coinciden).

No existe máximo absoluto porque al tender a –2 las imágenes se acercan a 20/3, pero no lo alcanzan.

Hay máximo relativo que no es absoluto (recuerda el punto 3).



8 Halla los extremos absolutos de las siguientes funciones definidas en [0, 5] y también en]–1, 3[:
(A) $f(x) = -2x + 4$ (B) $g(x) = -3$ (C) $h(x) = x^2 - 4x + 4$.

9 Halla los extremos absolutos de la función $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ definida en el intervalo [0, 5] y también en el intervalo [1, 4].

10 Halla los extremos absolutos de la función $f(x) = x^4 + 32x$ definida en $\mathbb{R}$ y también en [–3, 2].

4.5 Problemas de optimización

Ejemplo 9

Un molino produce harina con una función de coste dada por $C(x) = 2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10$, donde x refleja las toneladas métricas (t) de harina producida y C(x) el coste en cientos de euros.
La producción máxima que puede alcanzar es de 7 t.
El precio de venta (en cientos de euros) por tonelada de harina es función de la cantidad producida

$$p(x) = 25 - 0.25x.$$

Hallamos la cantidad de producción necesaria que maximice el beneficio, y el valor del mismo.

Constitución de la función que expresa el beneficio obtenido dependiente de la producción:

La función del coste es

$$C(x) = 2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10 \quad \text{con dominio } [0, 7]$$

La función de ingresos es

$$I(x) = \text{precio por cantidad} = p(x) \cdot x = (25 - 0.25x) \cdot x = 25x - 0.25x^2, \text{ definida en } [0, 7]$$

La función beneficio es

$$\mathbf{B(x)} = I(x) - C(x) = 25x - 0.25x^2 - (2x^3 - 18.25x^2 + 55x + 10) = \mathbf{-2x^3 + 18x^2 - 30x - 10}, \quad \forall x \in [0, 7]$$

Optimización de la función beneficio:

(A) Extremos relativos entre los puntos singulares:

Las dos primeras derivadas son $B'(x) = -6x^2 + 36x - 30$ y $B''(x) = -12x + 36$

- Puntos singulares: $B'(x) = 0 \iff -6x^2 + 36x - 30 = 0 \iff \mathbf{x_1 = 1,\ x_2 = 5}$
- Criterio del signo de la segunda derivada:

  $B''(1) = 24 > 0 \Rightarrow$ en x = 1 se alcanza un mínimo relativo cuyo valor es B(1) = –24

  $B''(5) = -36 < 0 \Rightarrow$ en x = 5 se alcanza un máximo relativo cuyo valor es B(5) = 40

(B) Imágenes de los extremos del intervalo del dominio (también son extremos relativos):

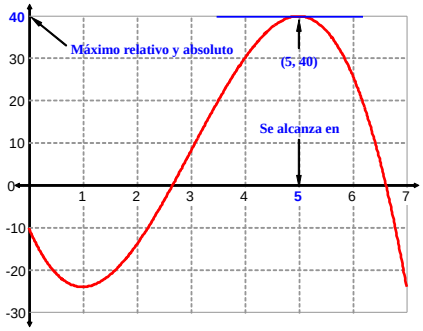
$$B(0) = -10 \qquad B(7) = -24$$

(C) El máximo absoluto es el **mayor** de entre todos los relativos:

$B(0) = -10 \qquad B(7) = -24 \qquad B(1) = -24 \qquad$ **B(5) = 40**

Máximo beneficio: 40 cientos de euros (4 000 €).

Se alcanza para x = 5 t de harina (5 000 kg).



11 ¿Para qué producción se alcanza el mínimo beneficio (máximas pérdidas) en el ejemplo anterior? ¿En qué nivel de producción se alcanza el mínimo coste?, ¿y el máximo ingreso?

12 La cuenta de resultados, pérdidas o ganancias en millones de euros, de una empresa viene dada por la siguiente función de los años x de existencia de la misma:

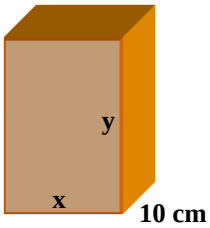
$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}, \quad x \geq 0$$

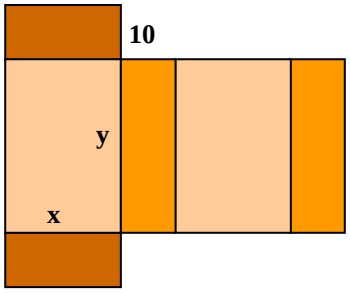
(A) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?
(B) ¿En qué momento la empresa alcanza sus máximas ganancias? ¿A cuánto ascienden éstas?
(C) Describe la evolución de la cuenta de resultados de la empresa. ¿Cuáles serán los beneficios a muy largo plazo?

Ejemplo 10

Un fabricante de "bricks" de leche y zumos, **de un litro de capacidad**, desea minimizar el coste de material empleado en su elaboración. Hallamos las dimensiones de los brikcs si un estudio revela que la profundidad de los mismos, para ajustarse a las medidas de los estantes existentes en la mayoría de frigoríficos, debe ser de 10 cm.

Minimizar el coste pasa por minimizar el área empleada en la producción del envase. Por simplificar omitimos las partes necesarias para el encolado.





Constitución de la función que expresa el área del envase.

Si llamamos x e y a las longitudes (en centímetros) de los lados de la cara frontal, la superficie empleada es la función de dos variables x e y:

$$\mathbf{S} = S(x, y) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x = \mathbf{2xy + 20y + 20x}$$

Además tenemos la condición impuesta por el volumen, que debe ser de un litro o 1000 cm^3:

$$\mathbf{V = 1000} \quad \rightarrow \quad 10 \cdot x \cdot y = 1000 \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{100}{x}}$$

Sustituyendo la y en la función S tenemos que el área depende solo de x:

$$\mathbf{S(x) = 200 + \frac{2000}{x} + 20x} \qquad \forall x \in]0, +\infty[$$

Obtención del mínimo absoluto de S(x) en [0, +∞[:

(A) Puntos críticos de S(x). La primera derivada es $S'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 20$.

$$S'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2000}{x^2} + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 10}$$

Intervalos	]0, 10[	]10, +∞[
Signo S'	–	+
S(x)	↓	↑

→ S(x) tiene un mínimo relativo en x = 10.

(B) Mínimo absoluto: como S(x) es continua, decrece en]0, 40[y crece en]40, +∞[, es evidente que el mínimo relativo es también absoluto.

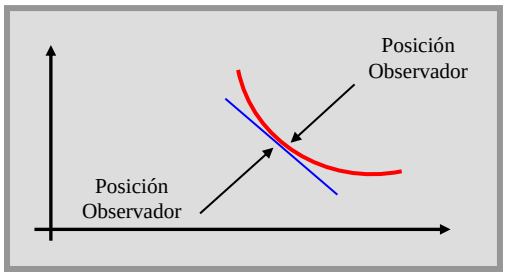
Las dimensiones del envase son **x = 10 cm**, **y = 10 cm** y la superficie mínima es **S(10) = 600 cm^2**.

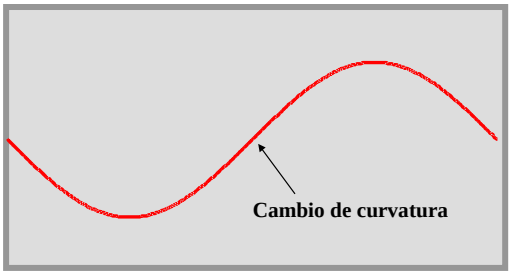
13 Una empresa fabrica maquinillas de afeitar con el coste, en euros, dado por la expresión C(x) = 0.3x + 3000, y siendo x el número de maquinillas demandadas. El precio de venta depende del número de maquinillas y viene dado por la función p = p(x) = 12 – 0.006x. Si el beneficio es ingresos menos costes y los ingresos son demanda por precio, halla el precio que maximice el beneficio de la empresa. ¿A cuánto asciende?

14 Queremos vallar una parcela rectangular de 2400 m^2 de área. El lado de la parcela que linda con la carretera se hará con material de gran calidad, que resulta a 30 € cada metro lineal, mientras que los otros tres lados se harán con material de inferior calidad, que resulta a 15 € por metro lineal. Obtén las longitudes de los lados de la parcela para que el coste del vallado sea mínimo y halla el valor de dicho coste mínimo.

4.6 Curvatura

Una lente de contacto situada entre dos observadores presenta diferente forma, ***cóncava*** y ***convexa***, para cada uno de ellos. Del mismo modo, la visualización gráfica de un máximo y de un mínimo relativos presentan curvaturas diferentes, según desde donde miremos. Se requiere por tanto establecer un sistema de referencia para definir estas características.





Además los puntos en que cambia el tipo de curvatura de una gráfica reciben el nombre de ***puntos de inflexión***.

El sistema de referencia que se utiliza en general en las Ciencias Sociales, y en particular en las Económicas, es el origen de coordenadas (porque habitualmente las funciones utilizadas se representan únicamente en el primer cuadrante). Sin embargo, en algunos tipos de funciones presenta problemas por lo que utilizamos el sistema habitual de las Ciencias Naturales: **el observador está situado en la parte más alta del eje OY**.

Recordamos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en x_0 es:

$$\mathbf{t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Consideramos una función f cualquiera y un punto x_0 en el que es derivable.

- Decimos que **f es *cóncava en* $\mathbf{x_0}$** si existe un entorno de x_0, $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$, en el que la gráfica de f está representada por encima de la recta tangente en x_0, es decir

$$\mathbf{f(x) > T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[,\ \ \mathbf{x \neq x_0}$$

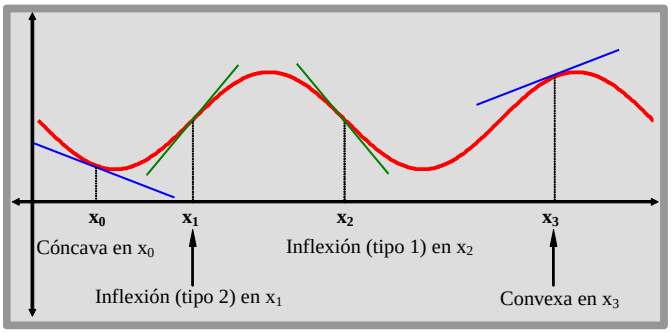
- Decimos que **f es *convexa en* $\mathbf{x_0}$** si existe un entorno de x_0, $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$, en el que la gráfica de f está representada por debajo de la recta tangente en x_0, es decir,

$$\mathbf{f(x) < T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[,\ \ \mathbf{x \neq x_0}$$

- Decimos que **f tiene una *inflexión en* $\mathbf{x_0}$** si en todo entorno de x_0, $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$, la recta tangente en x_0 atraviesa la gráfica de la función. Sucede en dos situaciones:

(1) $\mathbf{f(x) < T(x)}$, para $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta,\ x_0[$ y $\mathbf{f(x) > T(x)}$, para $\mathbf{x} \in]x_0,\ x_0 + \delta[$

(2) $\mathbf{f(x) > T(x)}$, para $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta,\ x_0[$ y $\mathbf{f(x) < T(x)}$, para $\mathbf{x} \in]x_0,\ x_0 + \delta[$



Ejemplo 11

Dada una función f, llamamos pendiente de la gráfica de f en x_0 a la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en x_0. Por tanto, la función $m(x) = f'(x)$ proporciona la pendiente de la curva en cada punto.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ con dominio $\mathbb{R}$, respondemos a las siguientes preguntas:

(A) Expresión general de la pendiente de la gráfica de f en x.
(B) ¿Para qué valores de x la pendiente aumenta?, ¿y disminuye?
(C) ¿Cuál es la mayor pendiente de la curva?, ¿y la menor?, ¿en qué puntos se alcanza?

(A) La pendiente de la curva en x es la derivada de f en x: $\mathbf{m(x) = f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}}$.

(B) Estudiamos los intervalos de crecimiento de la pendiente m(x). Para ello obtenemos su derivada, que es la segunda derivada de f. **El crecimiento de la pendiente de f se estudia con la segunda derivada**:

$$\mathbf{m'(x) = f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento de la pendiente m(x). Los puntos singulares son las soluciones de:

$$\mathbf{m'(x) = 0} \iff \mathbf{f''(x) = 0} \iff \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \iff 1-3x^2 = 0 \iff \mathbf{x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Consideramos los intervalos $\mathbf{]-\infty, x_1[}$, $\mathbf{]x_1, x_2[}$ y $\mathbf{]x_2, +\infty[}$.

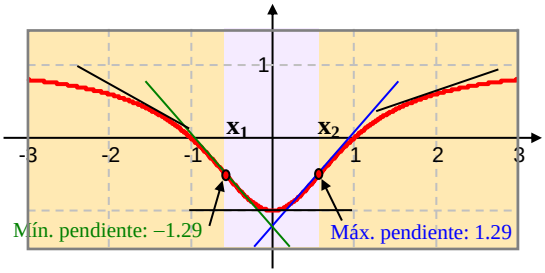
En $\mathbf{]-\infty, x_1[}$ consideramos x = –2: $\mathbf{m'(-2)} = -0.35 < \mathbf{0} \Rightarrow$ **m = f' es decreciente en** $\mathbf{]-\infty, x_1[}$

En $\mathbf{]x_1, x_2[}$ consideramos x = 0: $\mathbf{m'(0) = 4} > \mathbf{0} \Rightarrow$ **m = f' es creciente en** $\mathbf{]x_1, x_2[}$

En $\mathbf{]x_2, +\infty[}$ consideramos x = 2: $\mathbf{m'(2)} = 0.35 > \mathbf{0} \Rightarrow$ **m = f' es decreciente en** $\mathbf{]x_2, +\infty[}$

Intervalos	$]-\infty, x_1[$	$]x_1, x_2[$	$]x_2, +\infty[$
Signo m'	–	+	–
Pendiente m	↓	↑	↓

Cambio de signo de m': **Sí** **Sí**



(C) **En** $\mathbf{x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **se alcanza un mínimo relativo de la pendiente m(x) con valor** $\mathbf{m(x_1) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

En $\mathbf{x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **se alcanza un máximo relativo de la pendiente m(x) con valor** $\mathbf{m(x_2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Son la menor y mayor pendiente de la curva, como vemos en la gráfica, y se han obtenido en los puntos en que la pendiente pasa de crecer a decrecer. Observa que:

- El crecimiento de la pendiente equivale a curvatura cóncava.
- El decrecimiento de la pendiente equivale a curvatura convexa.
- Los puntos de máxima y mínima pendiente son además los puntos de inflexión de la curva.

15 Dada la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, obtén:
(A) El conjunto de puntos donde la pendiente de la gráfica (pendiente de la recta tangente) aumenta.
(B) El conjunto de puntos donde la pendiente de la gráfica disminuye.
(C) Los puntos donde la mencionada pendiente pasa de aumentar a disminuir.

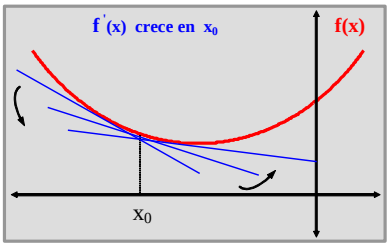
➢ Propiedad 3: condiciones suficientes de curvatura

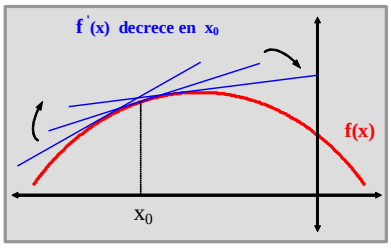
Consideramos una función f dos veces derivable en x_0.

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ $\rightarrow$ **f es cóncava en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ $\rightarrow$ **f es convexa en x_0**
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ $\rightarrow$ **No podemos asegurar nada**

Recordemos que la segunda derivada f'' estudia el crecimiento de la primera derivada f', entonces:

- Si en un punto x_0 tenemos que $f''(x_0) > 0$, por la propiedad 1, la función f' es creciente en x_0, es decir, la pendiente de la curva aumenta. Esto solo ocurre en el caso de ser un punto donde la función es cóncava.
- Si en un punto x_0 tenemos que $f''(x_0) < 0$, por la propiedad 1, la función f' es decreciente en x_0, es decir, la pendiente de la curva disminuye. Esto solo sucede en el caso de ser un punto donde la función es convexa.





- Si en un punto x_0 tenemos que $f''(x_0) = 0$ entonces **x_0 es un punto crítico de la función $f'(x)$**, y nada podemos asegurar del crecimiento de esta función en cuestión (f' en este caso) y, por tanto, nada aseguramos sobre la curvatura de f.

Ejemplo 12

Estudiamos la curvatura de la función $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - 2x^2 + \frac{16}{3}x - 3$ definida en $\mathbb{R}$, en los puntos $x_0 = 1, 2, 3$ y 4.

Hallamos las dos primeras derivadas de f:

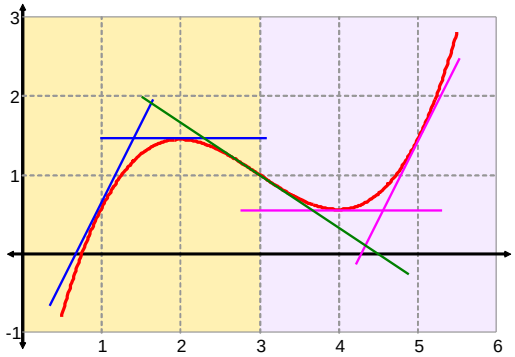
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{16}{3}, \quad f''(x) = \frac{4}{3}x - 4$$

$$f''(1) = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f es convexa en } x = 1$$

$$f''(2) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f es convexa en } x = 2$$

$f''(3) = 0$ y la propiedad 3 no nos asegura nada, aunque en este caso hay una inflexión.

$$f''(4) = \frac{4}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f es cóncava en } x = 4$$



16 Estudia la curvatura de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(A) $f(x) = x^4 - x^3$, en los puntos $x = -2, 0, 1$ y 2.

(B) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, en los puntos $x = -2, 0$ y 2.

➢ Intervalos de concavidad y convexidad de una función

Al igual que sucedía con el estudio del crecimiento de la función, el estudio puntual de la curvatura no es la solución ideal, se requiere el estudio por intervalos.

Consideramos una función f definida en su dominio.

1 Hallamos los puntos singulares de f'. Los suponemos ordenados: $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

2 La recta real queda dividida por los puntos singulares en los intervalos:

$$]a, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ ]x_2, x_3[,\ \dots,\ ]x_n, b[, \quad \text{donde a puede ser } -\infty \text{ y b puede ser } +\infty$$

En el interior de los intervalos anteriores no hay puntos singulares, luego f'' tiene signo constante en cada intervalo. Son los ***intervalos de concavidad y convexidad*** de la función.

3 Elegimos un punto x del interior de cada intervalo. Si $f''(x) > 0$, f es cóncava en dicho intervalo. Si $f''(x) < 0$, la función f es convexa en dicho intervalo.

4 Si en dos intervalos contiguos la función cambia de tipo de curvatura entonces en el punto singular que los separa hay una inflexión (siempre que f sea derivable en dicho punto).

Ejemplo 13

Hallamos los intervalos en los que la función $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ definida en $\mathbb{R}$ es cóncava o convexa.

En primer lugar f es derivable en $\mathbb{R}$ todas las veces que necesitamos y

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x \qquad f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

- Hallamos los puntos singulares de f', que son las soluciones de la ecuación

$$f''(x) = 0 \iff 4e^{2x} - 4e^x = 0 \iff 4e^x(e^x - 1) = 0 \iff e^x = 1 \iff \mathbf{x = 0}$$

- Consideramos los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$, que no contienen ningún punto singular, y estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos:

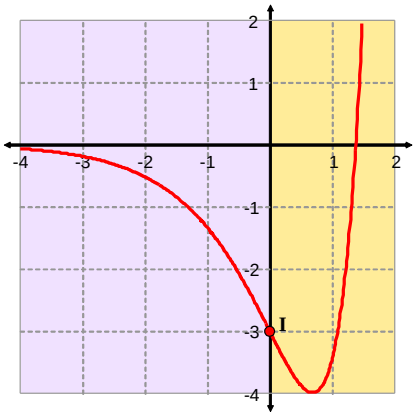
En **$]-\infty, 0[$** consideramos $x = -1$: $\mathbf{f''(-1) = -0.388 < 0} \Rightarrow$ **f es convexa en $]-\infty, 0[$**
En **$]0, +\infty[$** consideramos $x = 1$: $\mathbf{f''(1) = 48.239 > 0} \Rightarrow$ **f es cóncava en $]0, +\infty[$**

En x = 0 cambia la curvatura y f es derivable, luego hay **punto de inflexión**.

Se sitúa en el punto de la gráfica $I(0, f(0))$ = **I(0, –3)**

Intervalos	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signo f''	–	+
f	Convexa	Cóncava

Inflexión (0, –3)



17 Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

(A) $f(x) = x^5$ (B) $f(x) = e^x - e^{-x}$ (C) $f(x) = x\,e^x$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (E) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ (F) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

➢ Teorema: condición necesaria de punto de inflexión

Consideramos una función f dos veces derivable en x_0.

Si **f tiene un punto de inflexión en x_0** $\Rightarrow$ $\mathbf{f''(x_0) = 0}$

Esta propiedad se deriva del hecho de que si f tiene un punto de inflexión en x_0 entonces cambia su curvatura en x_0, por lo que la pendiente $m(x) = f'(x)$ de la curva pasa de crecer a decrecer, o al revés. Por tanto, $m = f'$ tiene en x_0 un máximo o un mínimo relativo, y por la propiedad 2, aplicada a $m = f'$, su derivada es nula:

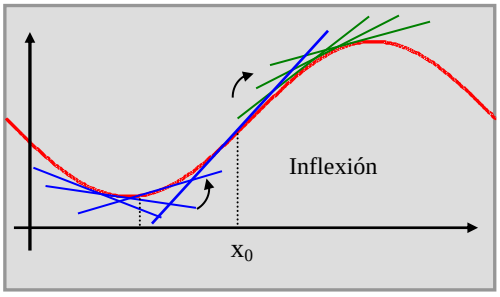
$$\mathbf{m'(x_0) = f''(x_0) = 0}$$

Por tanto los únicos puntos del dominio de la función f (siempre que sea 2 veces derivable) en los que se puede presentar un punto de inflexión son **las soluciones de la ecuación $\mathbf{f''(x) = 0}$.**

➢ Teorema: criterio de la tercera derivada

Consideramos una función f derivable 3 veces en x_0.

Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ y $\mathbf{f'''(x_0) \neq 0}$ $\Rightarrow$ **f tiene un punto de inflexión en x_0**



- Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) < 0$ entonces la función f' tiene un máximo relativo en x_0, por lo que f' pasa de ser decreciente a ser creciente, es decir, f cambia su tipo de curvatura en x_0, por lo que hay inflexión.
- Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) > 0$, f' pasa de ser creciente a ser decreciente, y también hay una inflexión.

Ejemplo 14

Estudiamos el tipo de curvatura de las funciones $f(x) = (x - 2)^3$ y $g(x) = (x - 2)^4$ en el punto $x = 2$.

(A) Obtenemos las 3 primeras derivadas de f: $f'(x) = 3(x - 2)^2$, $f''(x) = 6(x - 2)$, $f'''(x) = 6$.

Como $f''(2) = 0$ y $f'''(2) = 6 > 0$ podemos asegurar que f posee inflexión en $x = 2$.

(B) Obtenemos las 3 primeras derivadas de g: $g'(x) = 4(x - 2)^3$, $g''(x) = 12(x - 2)^2$, $g'''(x) = 24(x - 2)$.

Como $g''(2) = 0$ y $g'''(2) = 0$, desconocemos si en $x = 2$, g es cóncava, convexa, o tiene una inflexión.

Recurrimos en este caso a estudiar la curvatura por intervalos. El único punto singular de g'' es $x = 2$.

Tenemos dos intervalos $]-\infty, 2[$ y $]2, +\infty[$ en donde el signo de g'' es constante:

Como $g''(1.9) = 0.12 > 0$ $\Rightarrow$ g es cóncava en $]-\infty, 2[$
Como $g''(2.1) = 0.12 > 0$ $\Rightarrow$ g es cóncava en $]2, +\infty[$

Como la curvatura no varía en $x = 2$, no es un punto de inflexión. La función es siempre cóncava. Además, lo que tenemos en $x = 2$ es un mínimo de g, como podemos comprobar si estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g.

➢ Punto de rendimientos decrecientes: máxima eficiencia

Ejemplo 15

Un operario de una empresa trabaja 10 horas diarias. La función que refleja el número total de quintales métricos (1 Qm = 500 kg) de producto que elabora, en función del tiempo, es:

$$f(t) = -\frac{1}{50}\left(t^3 - 15t^2\right), \text{ definida para } t \in [0, 10]$$

Tras las dos primeras horas de trabajo el número de quintales elaborados es f(2) = 1.04 Qm (520 kg) y después de las primeras cuatro, f(4) = 3.52 Qm (1760 kg). El número medio de quintales métricos recogidos en los intervalos [0, 2] y [2, 4] es la variación media en dichos intervalos:

$$\mathbf{VM}_{[0,\,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \mathbf{0.52\ Qm/h} \qquad \mathbf{VM}_{[2,\,4]} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \mathbf{0.88\ Qm/h}$$

Es pues más eficiente en el segundo.

La eficiencia o ritmo que lleva en cada instante de tiempo se mide con la variación instantánea (derivada en el momento considerado). El ritmo de trabajo a las 2 y a las 4 horas es

$$f'(t) = -\frac{1}{50}\left(3t^2 - 30t\right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{f'(2) = 0.96\ \ Qm/h} \ \text{ y } \ \mathbf{f'(4) = 1.44\ \ Qm/h}$$

Es por tanto más eficiente en el instante t = 4 que en t = 2; pero ¿en qué instante de su jornada lo es más?
La eficiencia o ritmo será máxima en el instante t en el cual se alcance el máximo absoluto de la función **f '(t)**:

- $f''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{50}(6t - 30) = 0 \quad \rightarrow \quad$ **t = 5** (único punto singular de f ')
- El máximo absoluto de f ' se alcanzará en t = 5 (mayor valor entre las imágenes de 0, 5 y 10):

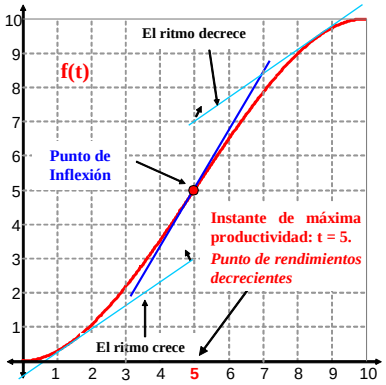
  f '(0) = 0 Qm/h **f '(5) = 1.5 Qm/h (máxima eficiencia)** f '(10) = 0 Qm/h

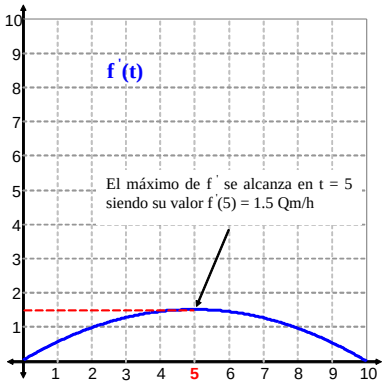
El signo de la segunda derivada nos indica los instantes en que la eficiencia **f '** aumenta o disminuye:

Intervalos	[0, 5[	]5, 10]
Signo f ''	+	–
f ' y f	↑ y cóncava	↓ y convexa

En [0, 5] tenemos que f ' crece mientras que en [5, 10] f ' decrece; en t = 5 se alcanza la máxima eficiencia o ritmo de trabajo. Desde ese instante, el ritmo disminuye (no así la producción, que siempre aumenta).

En t = 5 la función f tiene un punto de inflexión y f ' su valor máximo. Así esta inflexión de f indica el punto en el que **la eficiencia o rendimiento f ' comenzará a disminuir**: ***Punto de rendimientos decrecientes***.





18 Un montañero realiza una excursión de 13 horas. El espacio que recorre (en km), dependiente del tiempo (en horas), se expresa por la función $f(t) = -0.1t^3 + 1.8t^2 + 4t$. ¿En qué momento se alcanza el punto de rendimientos decrecientes?, ¿qué significado tiene?, ¿cuál es el máximo recorrido realizado?

4.7 Representación gráfica de funciones

Ejemplo 16

Representamos la función polinómica $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 8$ definida en $\mathbb{R}$.

Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que no tienen asíntotas verticales. Tampoco tienen asíntotas horizontales ni oblicuas (excepto las de grados 0 y 1, que son rectas) pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

Son funciones derivables en $\mathbb{R}$ por lo que el estudio de las ecuaciones

(1) **f(x) = 0** (2) **f '(x) = 0** (3) **f "(x) = 0**

proporciona los cortes con el eje OX (1), los posibles extremos relativos (2) y las posibles inflexiones (3).

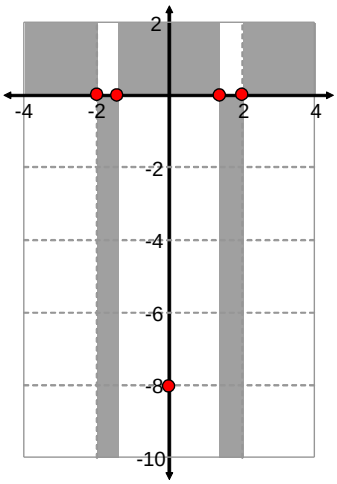
(1) **f(x) = 0** $\rightarrow$ $-x^4 + 6x^2 - 8 = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x = \pm 2, \pm\sqrt{2}}$

Los cortes con el eje OX son **(–2, 0)**, **(–$\sqrt{2}$, 0)**, **($\sqrt{2}$, 0)** y **(2, 0)**.

Estudiamos el signo de la función en los intervalos en que los anteriores puntos de corte dividen la recta real:

Intervalos	$]-\infty,-2[$	$]-2,-\sqrt{2}[$	$]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$	$]\sqrt{2},2[$	$]2,+\infty[$
Signo f	–	+	–	+	–

Además, el corte con el eje OY es (0, f(0)), es decir **(0, –8)**.

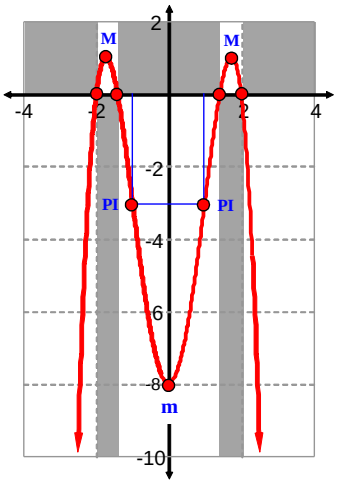


La gráfica de f pasa por los puntos de corte marcados, pero no lo hace por las regiones sombreadas.

(2) **f '(x) = 0** $\rightarrow$ $-4x^3 + 12x = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x = 0, \pm\sqrt{3}}$

Intervalos	$]-\infty,-\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},0[$	$]0,\sqrt{3}[$	$]\sqrt{3},+\infty[$
Signo f '	+	–	+	–
f	↑	↓	↑	↓

Máximo **M(–$\sqrt{3}$, 1)** Mínimo **m(0, –8)** Máximo **M($\sqrt{3}$, 1)**



(3) **f "(x) = 0** $\rightarrow$ $-12x^2 + 12 = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x = \pm 1}$

Intervalos	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,+\infty[$
Signo f "	+	–	+
f	Convexa	Cóncava	Convexa

Inflexión **PI(–1, –3)** Inflexión **PI(1, –3)**

19 Representa gráficamente las funciones polinómicas siguientes:

(A) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2}{10}$ (B) $f(x) = \dfrac{x^5 + 5x^3}{10}$ (C) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 30}{10}$ (D) $f(x) = \dfrac{x^6 - 16x^2}{10}$

Ejemplo 17

Representamos la función racional $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ definida en $\mathbb{R}$.

A los pasos indicados en el ejemplo anterior, añadimos el cálculo de asíntotas.

- No existen **asíntotas verticales** puesto que el denominador no se anula para ningún valor de la variable x.
- Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \;\rightarrow\;$ la recta **y = 1** es **asíntota horizontal bilateral**

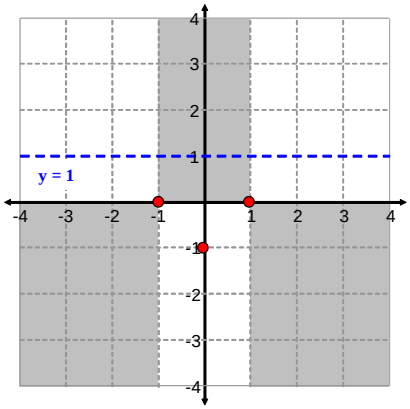
Las derivadas son $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ y $f''(x) = \dfrac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(1) **f(x) = 0** $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1, 1$

Cortes con el eje OX: **(–1, 0)** y **(1, 0)**.

Intervalos	$]-\infty, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, +\infty[$
Signo f	+	–	+

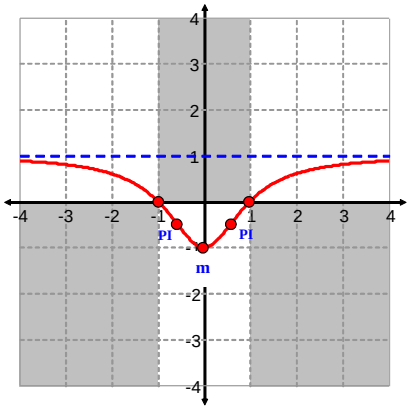
El corte con el eje OY es (0, f(0), es decir, **(0, –1)**.



(2) **f '(x) = 0** $\rightarrow$ 4x = 0 $\rightarrow$ **x = 0 (punto singular)**

Intervalos	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signo f '	–	+
f	↓	↑

Mínimo
m(0, –1)



(3) **f''(x) = 0** $\rightarrow$ $-12x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Intervalos	$\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$
Signo f''	+	–	+
f	Convexa	Cóncava	Convexa

Inflexión
PI$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Inflexión
PI$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

20 Representa gráficamente las siguientes funciones:

(A) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ (B) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ (C) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Ejemplo 18

Una determinada población crece, en un intervalo de 700 años, siguiendo una expresión del tipo:

$$f(x) = \frac{5}{1+e^{-2x+6}} + 1 \quad \forall x \in [0, 7]$$

donde x viene medido en cientos de años y f(x) en millones de personas. Representamos gráficamente esta función conocida por ***exponencial de crecimiento frenado*** (también por ***curva logística***).

- **No hay asíntotas verticales** porque el denominador no se anula para ningún valor de la variable x.
- **No hay asíntotas horizontales**, porque el dominio de f solo es el intervalo [0, 7] (si el dominio fuera $\mathbb{R}$, entonces habrían dos asíntotas horizontales, las rectas y = 1 e y = 6, como se intuye en la gráfica).

Las derivadas son $f'(x) = \dfrac{10\,e^{-2x+6}}{\left(1+e^{-2x+6}\right)^2}$, $\forall x \in]0, 7[$ y $f''(x) = \dfrac{20\,e^{-2x+6}\left(e^{-2x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-2x+6}\right)^3}$, $\forall x \in]0, 7[$.

(1) La ecuación **f(x) = 0** no tiene solución, luego no hay puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \iff \frac{5}{1+e^{-2x+6}} = -1 \iff 1 + e^{-2x+6} = -5 \iff e^{-2x+6} = -6$$

que es imposible, pues la función exponencial es siempre positiva.

Intervalos	[0, 7]
Signo f	+

El punto de corte con el eje OY es (0, f(0), es decir, **(0, 1.012)** (aproximadamente).

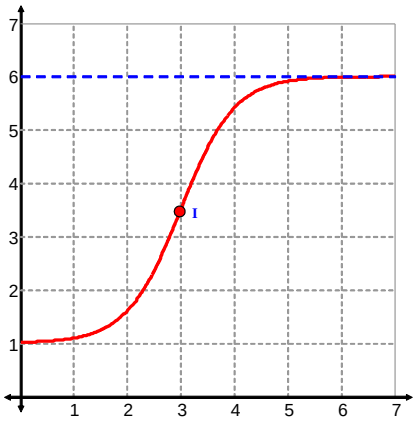
(2) $\mathbf{f'(x) > 0}$ $\rightarrow$ **no existen puntos críticos, no hay extremos relativos**.

Intervalos	]0, 7[
Signo f'	+
f	↑

(3) $\mathbf{f''(x) = 0}$ $\rightarrow$ $e^{-2x+6} - 1 = 0$ $\rightarrow$ $e^{-2x+6} = 1$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ $-2x + 6 = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x = 3}$

Intervalos	] 0, 3[	]3, 7[
Signo f''	–	+
f	Cóncava	Convexa

Inflexión
I(3, 3.5)



21 Representa gráficamente las siguientes funciones:

(A) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (B) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x - 3$ (C) $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ (D) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

Problemas del capítulo 4

1 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones en los puntos x = –2, 2 y 4:

$f(x) = x^2 + x$ $\quad g(x) = \ln(x + 5)$ $\quad h(x) = \sqrt{x+3}$ $\quad t(x) = e^{2x+1}$ $\quad p(x) = 5$

2 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

(A) $f(x) = x + 2$ $\quad g(x) = x^3 - 4x$ $\quad h(x) = x^2 - 3x - 10$ $\quad t(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

(B) $f(x) = \ln(x - 5)$ $\quad g(x) = \sqrt{x-3}$ $\quad h(x) = e^{3x-6}$ $\quad t(x) = x^4 - x^2$

3 La velocidad que lleva un motorista en cada instante, durante las 8 horas de recorrido, viene dada por la función $v(x) = -6x^2 + 72x$. Halla los intervalos en los que va aumentando y disminuyendo la velocidad. ¿En qué intervalos incrementa y disminuye la aceleración?

4 Halla los extremos relativos de las funciones siguientes:

(A) $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2$ $\quad g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ $\quad h(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4$

(B) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ $\quad g(x) = (x + 2)^4$ $\quad h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $\quad t(x) = (x + 3)^5$

(C) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad h(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$ $\quad t(x) = \dfrac{1}{2^x+1}$

5 Comprueba el tipo de curvatura de las funciones del problema 1 en los puntos indicados.

6 Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones:

(A) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad$ (B) $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2$ $\quad$ (C) $f(x) = \dfrac{9x}{x^2+2}$ $\quad$ (D) $f(x) = \dfrac{10}{1+e^{-2x+4}}$

7 Representa gráficamente las funciones de los problemas 2, 4 y 6. En algunas de ellas es necesario que calcules sus asíntotas.

8 Halla los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

(A) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ en [–1, 3]. $\quad$ (B) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ en [–1, 2].

(C) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en]–2, 2[. $\quad$ (D) $g(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$ en [–1, 3[.

9 Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$, se pide:

(A) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(B) Máximos y mínimos relativos, y valor de x donde se alcanzan.
(C) Máximo y mínimo absoluto de f en todo su dominio, si tiene.

10 Dada la función $f(x) = (x^2 + x)^2$, se pide:

(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(C) Máximos y mínimos locales.
(D) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

11 Dada la función $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$, se pide:

(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(C) Máximos y mínimos locales.
(D) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

12 Dada la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$, se pide:

(A) Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.
(C) ¿Hay máximo absoluto? ¿Y mínimo absoluto? En caso afirmativo, ¿cuál es dicho valor?
(D) Intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.
(E) Representación gráfica.

13 Dada la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$, se pide:
(A) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(B) Puntos de la gráfica donde se encuentran los máximos y mínimos relativos.
(C) Intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.
(D) Representación gráfica aproximada.

14 Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3$, se pide:
(A) Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.
(C) ¿Hay máximo absoluto? ¿Y mínimo absoluto? En caso afirmativo, ¿cuál es dicho valor?
(D) Intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.
(E) Representación gráfica.

15 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15}$, se pide:
(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales.
(C) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(D) Máximos y mínimos relativos.
(E) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

16 Dada la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$, se pide:
(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales.
(C) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(D) Máximos y mínimos locales.
(E) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

17 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$, se pide:
(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales.
(C) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(D) Máximos y mínimos relativos.
(E) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

18 Dada la función $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 1}$, se pide:
(A) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.
(B) Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales.
(C) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(D) Máximos y mínimos relativos.
(E) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

19 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide:
(A) Su dominio y la ecuación de sus asíntotas.
(B) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(C) Máximos y mínimos relativos.

20 Comprueba que las siguientes funciones definidas a trozos son derivables en los puntos de conexión y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y los intervalos de concavidad y convexidad (actúa en cada rama como si se tratara de una función diferente).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6x - \dfrac{27}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq -1 \\ 4x^2 + 6x & \text{si } x < -1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

21 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$:

(A) Estudia la continuidad y derivabilidad de f(x) en su dominio y obtén la función derivada.
(B) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).
(C) Calcula los máximos y mínimos relativos de f(x).

22 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x^2 - 3x - 8 & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a para el que f es continua en [2, 7].
(B) Para dicho valor de a, obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(C) Para dicho valor de a, obtén el mínimo y el máximo absoluto de f en [2, 7], y el valor de x donde se alcanzan.

23 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$:

(A) Estudia la continuidad de f en el intervalo [–2, 5].
(B) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(C) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo [–2, 2].
(D) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo [–2, 5].

24 Halla un número positivo que sumado con 25 veces su recíproco obtenga un valor mínimo.

25 Queremos construir dos parcelas rectangulares iguales y adosadas que comparten una pared común y cada una de ellas con un área de 300 m^2. Obtén les dimensiones de cada parcela si la valla con la que las rodeamos cuesta 10 € por metro lineal y deseamos un coste mínimo. Obtén el valor de este coste.

26 La suma de las 12 aristas de un prisma recto de base cuadrada es 60 cm. Halla las dimensiones que deben tener para que el volumen sea máximo.

27 Halla las dimensiones de un bote cilíndrico de refresco, de un litro de capacidad, para que se construya con la menor cantidad posible de material.

28 De todos los terrenos rectangulares de 900 m^2 de superficie, ¿cuál es el que necesitará menor cantidad de metros de valla?

29 Halla los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, que pasa por el punto A(2, 4), tenga extremos relativos en x = –2 y en x = 2.

30 Halla los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ posea una inflexión de tangente horizontal en el punto A(1, 0).

31 Halla una función polinómica de grado 3 sabiendo que pasa por los puntos A(–1, 0) y B(1, 2) y posee un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2.

32 Halla la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabiendo que pasa por el punto A(1, 0) y en el punto B(–1, 2) presenta una inflexión.

33 Una hoja de papel debe contener 200 cm^2 reservada para texto. Si los márgenes superior e inferior son de 2 cm y los laterales de 1 cm, ¿qué dimensiones debe tener la hoja para utilizar la menor cantidad de papel posible?

34 Una piscina en forma de paralelepípedo rectangular, de base cuadrada, tiene un área de 192 m^2. Halla las longitudes de sus aristas para que el volumen de agua contenida sea máximo.

35 Una máquina no puede producir más de 100 kg de sacarina durante un determinado período de tiempo. La función de costes totales es $C(x) = -0.2x^2 + 50x + 100$, donde x representa la cantidad de kilogramos producidos y C(x) el coste en euros. Un buen cliente de la empresa paga un precio, en función de la cantidad comprada, y que viene dado por la función $p(x) = 60 - 0.3x$. Calcula qué cantidad x de kg de sacarina conviene fabricar para maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería ese beneficio?

36 La función $P(t) = -t^4 + 150t^2$ proporciona la cantidad almacenada, en kilogramos, de un producto en el instante de tiempo t en horas durante la jornada laboral de 8 horas. Calcula:
(A) El número de kilogramos almacenados en las 2 primeras horas y también en las 6 primeras horas.
(B) El número de kilogramos almacenados entre la 2.ª y la 6.ª hora.
(C) El número medio de kilogramos almacenados en el anterior intervalo de tiempo.
(D) El ritmo de almacenamiento en los instantes t = 3, t = 4 y t = 5.
(E) ¿En qué momentos de la jornada laboral aumenta el almacenaje? ¿Por qué?
(F) ¿En qué momentos de la jornada laboral aumenta el ritmo de almacenaje?
(G) ¿Cuándo es el ritmo de almacenamiento máximo?

37 Una agencia propone un viaje conjunto a 60 personas al precio de 200 euros por persona. Con el fin de obtener mayor número de clientes, por cada viajero adicional, a los inicialmente propuestos, reduce en 2 euros el precio del viaje para cada persona.
(A) Si van 10 viajeros más, ¿qué ingreso tendrá la agencia? ¿Le conviene que vayan 10 más?
(B) Expresa el ingreso de la agencia en función del número adicional x de viajeros.
(C) Obtén hasta qué número adicional de viajeros el ingreso de la agencia crece.
(D) Obtén el máximo ingreso que puede tener la agencia y el número de viajeros para el que se obtiene.

38 Una empresa dispone de 15 comerciales que proporcionan un ingreso por ventas de 5750 euros mensuales cada uno. Se calcula que por cada nuevo comercial que contrate la empresa el ingreso de cada uno disminuye en 250 euros. Calcula:
(A) El ingreso mensual de la empresa proporcionado por los 15 comerciales.
(B) El ingreso mensual de la empresa si se contratan 5 comerciales más.
(C) La función que determina el ingreso mensual que se obtendría si se contrataran *x* comerciales más.
(D) El número total de comerciales que ha de tener la empresa para que el ingreso sea máximo y el valor que alcanzan.

39 Una huerta tiene actualmente 20 árboles que producen 500 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado la producción por árbol disminuye en 10 frutos. Calcula el número adicional de árboles que ha de tener la huerta para que la producción total de frutos sea máxima y el valor que alcanza.

40 El coste de fabricar x unidades de un determinado producto es $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 100$. El precio de venta de x unidades es $p(x) = 83 - 0.3x$. ¿Cuántas unidades se deben fabricar y vender para maximizar el beneficio B(x)? ¿A cuánto asciende este beneficio? ¿A qué precio se venden?

41 Una pastelería ha comprobado que el número de pasteles de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio p en euros según la función $n(p) = 2000 - 1000p$ donde n(p) es el número de pasteles vendidos cada semana. Calcula:
(A) La función I(p) de ingresos semanales de la pastelería en función del precio p de cada pastel.
(B) El precio al que hay que vender cada pastel para obtener ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascenderán estos ingresos máximos?

42 En un país comienza una epidemia. El número de personas que se contagia cada día viene dado por la función $f(x) = -x^2 + 40x + 84$, donde x representa el número de días transcurridos desde que apareció la enfermedad. Calcula:
(A) La tasa de propagación de la enfermedad al cabo de 5 días.
(B) El momento en el que el número de contagios deja de crecer.
(C) ¿En qué momento dejará de producirse contagios?

43 Llamamos x a la longitud de un lado de un rectángulo de 20 metros de perímetro.
(A) Expresa el área del rectángulo en función de x.
(B) Expresa la longitud de la diagonal del rectángulo en función de x.
(C) ¿Para qué valor de x el área del rectángulo es máxima? ¿Cuánto mide esta área?
(D) ¿Para qué valor de x la longitud de la diagonal es mínima? ¿Cuánto mide?

44 Queremos construir dos parcelas cuadradas independientes con un perímetro total de 160 m. En una parcela plantaremos césped de primera calidad al precio de 3 €/m^2 y en la otra césped de inferior calidad a 2 €/m^2. Obtén las dimensiones de cada parcela para que el coste total en césped sea mínimo y halla el valor de dicho coste.

45 Queremos construir dos habitaciones iguales que comparten una pared común (adosadas), cada una con un área de 12 m^2. Obtén las dimensiones x e y de cada habitación para que el material utilizado en la construcción de sus paredes sea mínimo.

46 Queremos construir 2 parcelas rectangulares iguales, con área de 1000 m^2 cada una y adosadas, que tengan un lado común. Si los muros exteriores de cada parcela cuestan 20 €/m y el muro interior común cuesta 10 €/m obtén las dimensiones de cada parcela para que el coste total de construcción de los muros sea mínimo y halla el valor de dicho coste.

47 Queremos construir 5 parcelas rectangulares iguales, adosadas en fila y cada una con un área de 1000 m^2. Si los muros exteriores de cada parcela cuestan 20 €/m y los muros interiores cuestan 10 €/m obtén las dimensiones de cada parcela para que el coste total de construcción de los muros sea mínimo y halla el valor de dicho coste.

48 El precio en euros de un diamante es igual al cuadrado de su peso en gramos. Supongamos que un diamante de 50 gramos de peso se rompe en dos trozos.

(A) Si uno de los trozos pesa 10 gramos, comprueba que tenemos pérdidas respecto al valor que tenía el diamante antes de romperse, y calcula dichas pérdidas.
(B) Si uno de los trozos pesa x gramos, expresa las pérdidas en función de x, y comprueba que siempre las hay.
(C) Obtén el peso de los trozos para los cuales la pérdida es máxima y el valor de dicha pérdida.

49 Si la función $B(x) = \dfrac{1000}{100 + 2^{-2x+100}}$ proporciona el beneficio obtenido por una empresa (en miles de euros) en función del tiempo (en meses) desde que comienza su actividad, estudia el intervalo de crecimiento de dicho beneficio. ¿Posee máximo absoluto? ¿Serán por tanto infinitos? Explica la respuesta.

50 La calificación que obtiene un alumno depende del tiempo (en horas) de preparación a través de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.2\,x & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ \dfrac{3(x-10)}{0.3x} & \text{si} \quad x > 20 \end{cases} .$$

(A) Estudia la continuidad de la función.
(B) Estudia el crecimiento de las ramas.
(C) ¿En algún momento es muy rentable estudiar un poco más?
(D) ¿Cuándo tiempo de estudio se requiere para alcanzar el 10?

51 Se calcula que entre las 2000 y las 5000 revoluciones por minuto el consumo de gasolina de un motor viene dado por la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, donde f(x) indica la cantidad de litros consumidos por cada 100 km y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Calcula:

(A) Las revoluciones en las que el consumo del motor es mínimo y el valor de dicho consumo.
(B) Las revoluciones en las que el consumo del motor es máximo y el valor de dicho consumo.

52 La velocidad (en m/s) que alcanza un atleta, en una carrera de 200 metros, se expresa en función del espacio recorrido x (en metros) a través de la expresión $f(x) = -0.00055x(x - 300)$.

(A) ¿Qué velocidad tiene cuando ha recorrido 50 metros?
(B) ¿A qué velocidad llega a la meta?
(C) Calcula la distancia recorrida por el atleta cuando alcanza su máxima velocidad. ¿Cuál es esa velocidad?

53 Un ganadero ordeña una vaca desde el día siguiente que dicha vaca ha parido hasta 300 días después del parto. La producción diaria en litros de leche que se obtiene de esta vaca viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{120x - x^2}{5000} + 40$$

donde *x* representa el número de días transcurridos desde el parto. Se pide:

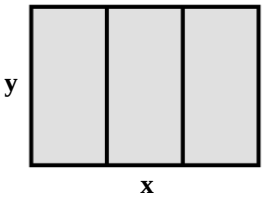
(A) El día de máxima producción y su valor.
(B) El día de mínima producción y su valor.

54 Queremos construir ventanas como la de la figura, utilizando 20 metros de madera para su construcción, siendo la longitud x de la base un valor entre 3 y 6 metros.

(A) Expresa el área de la ventana en función de la longitud x de la base.

(B) De todas las ventanas posibles, obtén la de menor área y el valor de dicha área.

(C) Obtén también la ventana con mayor área y el valor de dicha área.



55 El beneficio de una empresa depende de la cantidad invertida inicialmente y viene establecido por la función

$$f(x) = x^3 - \frac{39}{2}x^2 + 120x$$

donde las cantidades (tanto de x como de f(x)) vienen dadas en millones de euros.

(A) Si tan solo disponemos de 9 millones de euros para realizar la inversión inicial calcula la cantidad que debemos invertir para alcanzar el máximo beneficio.

(B) ¿Qué sucedería si dispusiéramos de 10 millones? ¿Por qué?

56 El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0.5x^2 + 5x + 800$. Define la función que determina el coste medio por litro producido y determina con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste medio?

57 Se cree que el número y de unidades vendidas de un cierto producto, en función del precio de este producto x, en euros, viene dado por $y = 50 - x$, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio de $x - 10$ €, determina el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

58 Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el restaurante. Se pide:

(A) El número máximo de clientes que van una noche al restaurante. ¿A qué hora se produce este máximo?

(B) Si queremos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas pero no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

59 Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de Internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían obtenerse 4800 contratos. Además, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:

(A) Expresa el ingreso total previsto en función del número x de euros de rebaja en la tarifa.

(B) ¿Cuál tendría que ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se alcanzaría?

60 Se estima que el beneficio mensual de una fábrica de caramelos, en miles de euros, viene dado por la función $B(x) = -0.1x^2 + 2.5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

(A) Cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y a cuánto asciende éste.

(B) Cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

(C) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcula también este máximo beneficio.

61 El efectivo, en miles de euros, de una oficina bancaria, durante las seis horas que permanece la caja abierta al público, viene dado por la expresión $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$, siendo t "horas transcurrido desde su apertura".

(A) ¿En qué momento hay más dinero en efectivo y a cuánto asciende?

(B) ¿En qué momento hay menos dinero en efectivo y a cuánto asciende?

62 Una función $f(x) = ax + b$, definida en el intervalo $[-2, 2]$, es tal que su función derivada es $f'(x) = -5$.

(A) ¿Qué podemos afirmar de su crecimiento?

(B) Si su valor mínimo es 10, ¿cuánto valen los parámetros a y b?

63 El rendimiento de un estudiante durante las primeras 6 horas de estudio viene dado (en porcentaje) por la función $R(t) = \frac{700t}{4t^2 + 9}$, donde t es el número de horas transcurridas.

(A) Calcula el rendimiento a las 3 horas de estudio.

(B) Determina la evolución del rendimiento durante las primeras 6 horas de estudio (cuando aumenta y cuando disminuye). ¿Cuál es el rendimiento máximo?

64 Una vez obtenido el rendimiento máximo, en qué momento el rendimiento es igual a 35? Una empresa de material fotográfico ofrece una máquina que es capaz de revelar 15.5 fotografías por minuto. Sin embargo, esta capacidad se deteriora con el tiempo de forma que el número de fotografías reveladas por minuto viene dado por la función f(x), donde x es la antigüedad de la máquina en años:

$$f(x) = \begin{cases} 15.5 - 1.1x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{5x+45}{x+2} & \text{si } x > 5 \end{cases}.$$

(A) Estudia la continuidad de f(x) en el intervalo [0,+∞[.
(B) Comprueba que el número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina.
(C) ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

65 En una sesión bursátil el valor de una determinada acción, en euros, vino expresado por la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+15 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 8x + 26 & \text{si } 3 < x \le 6 \\ 2x+2 & \text{si } 6 < x \le 8 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de dicha sesión. Se pide:
(A) Estudia la continuidad de f(x).
(B) Calcula el valor máximo y el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento sucedió.
(C) ¿En qué momentos de la sesión convino comprar y vender para maximizar el beneficio? ¿Cuál habría sido éste?

66 La función siguiente representa la valoración de una empresa en millones de euros dependiente del tiempo t, a lo largo de los últimos 13 años:

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0.1t & \text{si } 0 \le t < 5 \\ 4.5 + 0.05(t-5) & \text{si } 5 \le t < 10 \\ 4.75 + 0.1(t-10)^2 & \text{si } 10 \le t \le 13 \end{cases}.$$

Estudia en el intervalo [0, 13]:
(A) La continuidad de f(t).
(B) El instante t en que la valoración de la empresa es máxima y el valor de dicha valoración.
(C) El instante t en que la valoración de la empresa es mínima y el valor de dicha valoración.

67 Una cadena de montaje está especializada en la producción de un cierto modelo de motocicleta. El coste C(x) de producción en euros está relacionado con el número x de motocicletas fabricadas mediante la expresión $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$. Si el precio de venta de cada una de las motocicletas es de 8000 euros y se venden todas las motocicletas fabricadas, se pide:
(A) Define la función ingreso I(x) que obtiene la cadena de montaje en función de las ventas de las motocicletas producidas.
(B) ¿Cuál es la función beneficio B(x) de la cadena de montaje?
(C) ¿Cuántas motocicletas ha de fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto ascenderá?

68 La especialidad de una pastelería es la fabricación de cajas de bombones. El coste C(x) de fabricación en euros está relacionado con el número x de cajas producidas mediante la función $C(x) = 0.1x^2 + 20x + 2500$. Si el precio de venta de una caja de bombones es de 80 euros y se venden todas las cajas producidas, se pide:
(A) La función ingreso que obtiene la pastelería con la venta de las cajas.
(B) La función beneficio, diferencia entre ingresos y costes de fabricación.
(C) El número de cajas de bombones que se ha de producir para maximizar el beneficio y su valor.

69 Se estima que el beneficio anual B(t), en porcentaje, que produce una cierta inversión está determinado por el tiempo t en meses que se mantiene esta inversión a través de la expresión siguiente:

$$B(t) = \frac{36t}{t^2+324} + 1, \quad t \ge 0$$

(A) Describe la evolución del beneficio en función del tiempo durante los primeros 30 meses.
(B) Calcula razonadamente cuánto tiempo ha de mantenerse esta inversión para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
(C) ¿Cuál sería el beneficio de la inversión si esta se mantuviera en el tiempo de forma indefinida?

70 Radio Jove ha determinado por medio de encuestas que el número de personas de personas que la sintonizan, entre las 12 de la mañana y las 12 de la noche, viene dado por la función $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, donde t indica las horas transcurridas desde las 12 de la mañana.

(A) Halla la variación media entre las 12 horas y las 15 horas.
(B) Halla la variación instantánea a las 15 horas y la las 22 horas.
(C) ¿A qué horas alcanza la máxima y la mínima audiencia?
(D) ¿Cuántos ciudadanos sintonizan la emisora a esas horas?
(E) ¿A qué hora se produce la mayor la tasa de variación de la audiencia? ¿Cuál es esa tasa?

71 El beneficio de una empresa depende de la cantidad invertida inicialmente y viene establecido por la función

$$f(x) = x^3 - \frac{39}{2}x^2 + 120x$$

donde las cantidades x y f(x) vienen dadas en millones de euros.

(A) Si disponemos de hasta 9 millones de euros para realizar la inversión inicial, calcula la cantidad que debemos realmente invertir para alcanzar el máximo beneficio.
(B) ¿Qué sucedería si dispusiéramos de 10 millones de euros? ¿Por qué?

72 Una empresa posee una demanda de azúcar (en kg) en función del precio (en euros) dada por la función

$$D(p) = 10000 - 1000\,p.$$

Se pide:

(A) ¿Cuál es la demanda si el precio es 5 €?
(B) ¿Cuál es la variación media de la demanda en el intervalo [1, 5]? ¿Qué te sugiere el resultado?
(C) ¿Cuál es la variación instantánea para p = 3 €?
(D) Si el precio oscila en el intervalo [1, 10], ¿cuál es la cantidad máxima de azúcar demandado? ¿A qué precio?
(E) Estudia el crecimiento y decrecimiento de esta función en el intervalo anterior.
(F) ¿Cuál es la función ingreso? ¿A qué precio obtiene esta empresa el máximo ingreso? ¿Qué cantidad tendrá demandada en él?

73 Si la función $P(t) = -2t^3 + 24t^2 - 72t + 250$ es el número de piezas que ha fabricado un trabajador hasta el instante t en horas, con $2 \le x \le 6$.

(A) ¿Cuál será la función que muestre el ritmo de piezas fabricadas por hora?
(B) ¿A qué ritmo fabrica a las 3 horas? ¿Y a las 3.5 horas? ¿Y a las 5 horas?
(C) ¿En qué momento fabrica a más ritmo y cuál ese ritmo? ¿Qué pasa un poco antes y un poco después de ese instante?

74 Un modelo para 3 meses del coste de almacenamiento y transporte de materiales en un proceso de manufactura viene dado en euros por la función $C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$ siendo x la cantidad de toneladas de materiales.

(A) ¿Qué cantidad de materiales hacen que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el coste en este caso?
(B) Se llama ***coste marginal*** de producir una nueva unidad de producto (la unidad x + 1) a la diferencia de costes C(x + 1) – C(x), es decir, al incremento de costes para poder producirla. Un valor aproximado del coste marginal de producir la unidad x + 1 es $\mathbf{C'(x)}$. Calcula el coste marginal de la tonelada 101.

75 Las pérdidas o ganancias de una empresa siguen la ley $y = \frac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa e y las pérdidas o ganancias en millones de euros.

(A) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
(B) ¿Pueden ser sus beneficios de tres millones de euros en algún momento? Justifica la respuesta.
(C) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función.
(D) ¿Cuándo se alcanza el máximo beneficio?

76 Una empresa ha realizado un estudio acerca de su coste de producción llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto tiene un coste en miles de euros expresado por la función $C(x) = 0.25x^2 + 25x + 25$. La venta de x unidades de ese objeto proporciona un ingreso en miles de euros dado por la función $I(x) = (30 + 0.125x)x$, siendo x el número de unidades producidas y vendidas. Se pide:

(A) El número de unidades que se deben producir para que el coste sea mínimo.
(B) Calcula la función beneficio suponiendo siempre que se venden las x unidades producidas.
(C) Halla el número de unidades que se deben producir y vender para que el beneficio sea máximo y halla el valor de este beneficio.

77 Un vendedor de pólizas de seguros tiene unos ingresos que dependen del número de pólizas x vendidas y está expresado por la función $S(x) = 100000 + 2660x - 0.2x^3$. Por realizar su trabajo asume un gasto, dependiente del número de pólizas vendidas, que viene dado por la función $G(x) = 20000 + 500x$.

(A) ¿Cuántas pólizas debe vender para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio?

(B) ¿Cuál es el beneficio marginal de vender la 52.ª póliza? ¿Y la 58.ª, 60.ª, 61.ª y 63.ª? ¿Qué te sugiere el resultado?

Soluciones de las actividades del capítulo 4

1. (A) No definida en 0, decrece en los demás. (B) Decrece en –2, –1, 0 y 1, crece en 5, y en 2 hay incertidumbre. (C) Crece en 1, 2 y 5, en los demás, no está definida. (D) Crece en todos. (E) Crece en –2 y –1, decrece en 1, 2 y 5 y en 0 no definida. **2.**

	A	B	C	D	E	F	G
↗	$]-\infty, 0[$	$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$]-1, +\infty[$		$]-\infty, 2[\cup]3,+\infty[$	
↘	$]0, +\infty[$	$]-2, 2[$			$]-\infty, +\infty[$	$]2, 3[$	$]-\infty, +\infty[$

	H	I	J	K	L	M
↗	$]-1, 0[\cup]1, +\infty[$			$]-\infty, 0[$	$]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$	$]0, +\infty[$
↘	$]-\infty, -1[\cup]0, 1[$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$]0, 1[\cup]1, +\infty[$	$]-\infty, 0[$

3. $x = -b/2a$. **4.** (A) $m = -11/12$ en $x = -1$, $M = 5/12$ en $x = 1$. (B) No tiene. (C) m no tiene, $M = 39/4$ en $x = 3$.

5. (A) En $\mathbb{R}$: $m = -1/4$ en $x = 2.5$, M no tiene; en $[-2, 2.5]$: $m = -1/4$ en $x = 2.5$, $M = 20$ en $x = -2$.

(B) En $\mathbb{R}$: $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; en $[-2, 2.5]$: $m_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $m_2 = -6$ en $x = -2$; $M_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $M_1 = 13.125$ en $x = 2.5$. (C) En $\mathbb{R}$: no tiene ni m ni M; en $[-2, 2.5]$: $m = -10$ en $x = -2$, $M = 18.125$ en $x = 2.5$. (D) En $\mathbb{R}$: $m = -32$ en $x = 4$, $M = 0$ en $x = 0$; en $[-2, 2.5]$: $m_1 = -32$ en $x = -2$, $m_2 = -21.875$ en $x = 2.5$, $M = 0$ en $x = 0$. **6.** (A) En $\mathbb{R}$: no tiene; en $[0, 5]$: $m = 3$ en $x = 0$, $M = 13$ en $x = 5$. (B) En $\mathbb{R}$: $m_1 = -38$ en $x = -1$, $m_2 = 16$ en $x = 2$, $M_1 = -16$ en $x = -2$, $M_2 = 38$ en $x = 1$; en $[0, 5]$: $m_1 = 0$ en $x = 0$, $m_2 = 16$ en $x = 2$, $M_1 = 38$ en $x = 1$, $M_2 = 6550$ en $x = 5$. (C) En $\mathbb{R}$: $m = 1$ en $x = 2$, M no tiene; en $[0, 5]$: $m = 1$ en $x = 2$, $M_1 = 17$ en $x = 0$, $M_2 = 82$ en $x = 5$. (D) En $\mathbb{R}$: $m = 0$ en $x = 0$; en $[0, 5]$: $m = 0$ en $x = 0$, $M = 25/26$ en $x = 5$.

7. $m = -8$, $n = 12$. **8.** (A) En $[0, 5]$: $m = -6$ en $x = 5$ y $M = 4$ en $x = 0$; en $]-1, 3[$: no hay. (B) $m = M = -3$, en ambos casos. (C) En $[0, 5]$: $m = 0$ en $x = 2$ y $M = 9$ en $x = 5$; en $]-1, 3[$: $m = 0$ y M no existe. **9.** En $[0, 5]$: $m = -27$ en $x = 0$, y $M = 13$ en $x = 2$ y 5; en $[1, 4]$: $m = 5$ en $x = 1$ y 4, $M = 13$ en $x = 2$. **10.** En $\mathbb{R}$, $m = -48$ en $x = -2$, M no hay; en $[-3, 2]$: $m = -48$ en $x = -2$, $M = 80$ en $x = 2$. **11.** 1 tonelada, 10/3 toneladas, 7 toneladas. **12.** (A) A partir del primer año. (B) A los 7 años, 6428579 €. (C) La empresa tiene pérdidas durante el primer año, beneficios a partir de ahí, siendo máximos a los 7 años. Después descienden tendiendo a 5 millones de euros a largo plazo (siempre son mayores). **13.** p = 6.15 €, B = 2703.75 € (cuando se venden x = 975 maquinillas). **14.** Lado que linda con la carretera: 40m, el otro lado, 60m. Gasto mínimo: 3600 €. **15.** (A) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. (B) $]-1, 1[$. (C) –1 y 1.

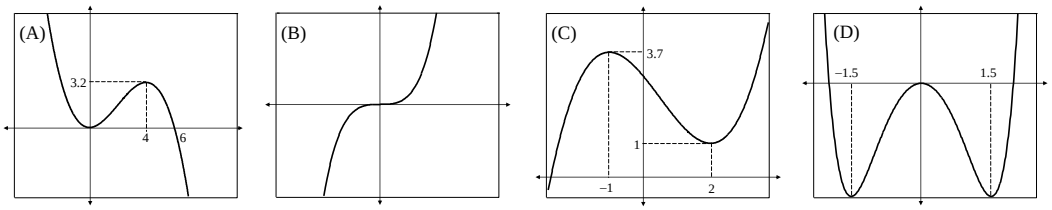
16. (A) f cóncava en $x = -2$, 2 y 1. (B) f convexa en $x = -2$ y 0, cóncava en $x = 2$.

17.

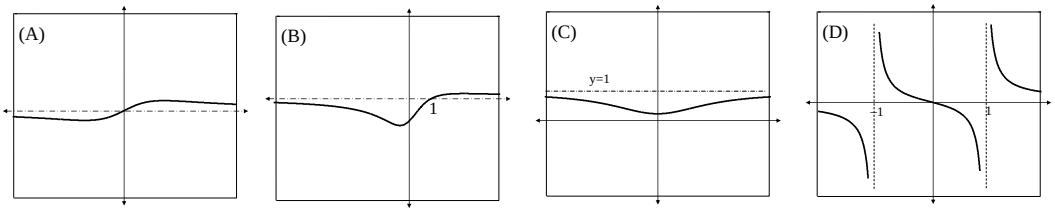
	A	B	C	D	E	F
Cóncava	]0, +∞[	]0, +∞[	]–2, +∞[	$]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$	]–1, 0[∪]1, +∞[	]–∞,0[
Convexa	]–∞, 0[	]–∞, 0[	]–∞, –2[	$]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[$	]–∞, –1[∪]0, 1[	]0, +∞[

18. A las 6 horas, hasta ese instante iba aumentando su velocidad, a partir de él la disminuye (instante de máxima velocidad del recorrido); el recorrido es de 136.5 km.

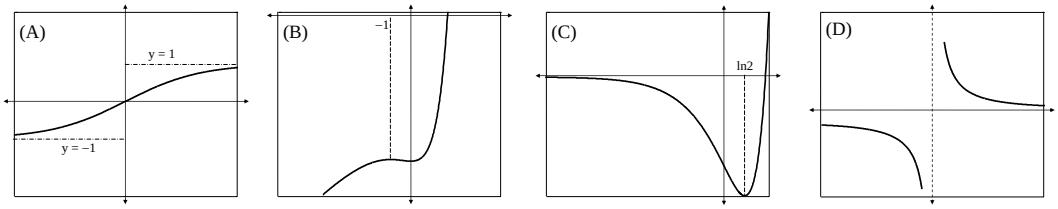
19.



20.



21.



Soluciones de los problemas del capítulo 4

1. Respectivamente, f decrece, crece y crece; g crece en los 3; h crece en los 3; t crece en los 3; p es constante.

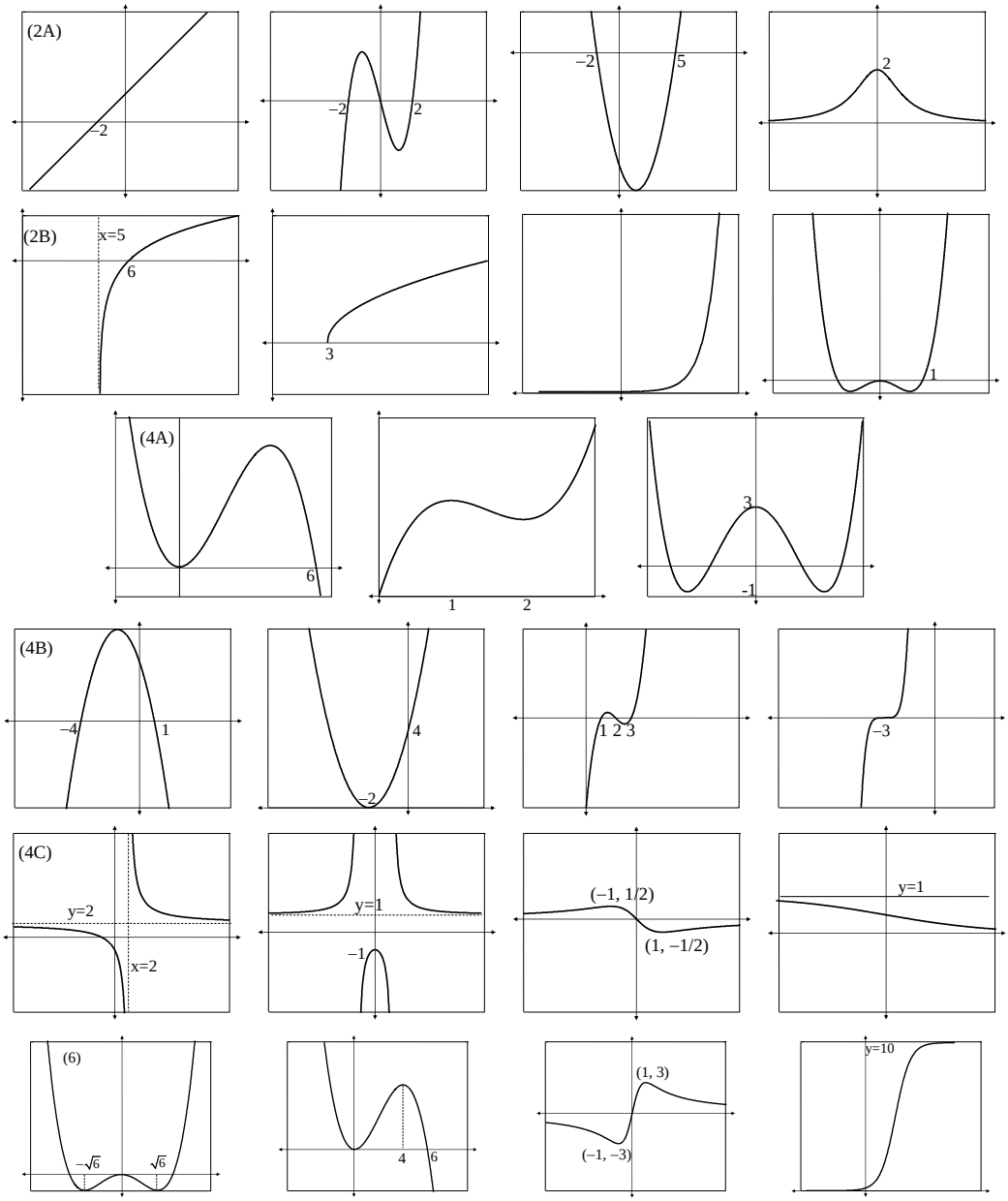
2. (A) f crece en $\mathbb{R}$; g crece en $\left]-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ y decrece en $\left]\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$; h crece en]3/2, +∞[y decrece en]–∞, 3/2[; t crece en]–∞, 0[y decrece en]0, +∞[. (B) f crece en]5, +∞[; g crece en]3, +∞[; h crece en $\mathbb{R}$; t crece en $\left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y decrece en $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. **3.** Aumenta en]0, 6[y disminuye en]6, 8[; la aceleración disminuye en]0, 8[. **4.** (A) f: m = 0 en x = 0, M = 48 en x = 4; g: m = 4 en x = 2, M = 5 en x = 1; h: m = –1 en x = $\pm\sqrt{2}$, M = 3 en x = 0. (B) f: M = $\frac{25}{4}$ en x = $-\frac{3}{2}$; g: m = 0 en x = –2; h: m = $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en x = $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$, M = $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en x = $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$; t no tiene. (C) f no tiene; g: M = –1 en x = 0; h: m = –1/2 en x = 1, M = 1/2 en x = –1; t no tiene. **5.** f y t cóncavas en los tres puntos, g y h convexas en los tres puntos, t es constante.

6.

	f	g	h	t	p
Cóncava	]–∞, –1[∪]1, +∞[	]–∞, 2[	$]-\sqrt{6}, 0[\cup]\sqrt{6}, +\infty[$	$]-\infty, 2-\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{2}, +\infty[$	]–∞, 2[
Convexa	]–1, 1[	]2, +∞[	$]-\infty, -\sqrt{6}[\cup]0, \sqrt{6}[$	$]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$	]2, +∞[

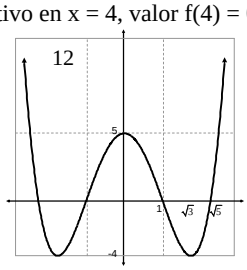
∪

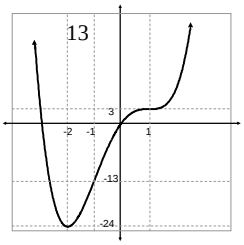
7.

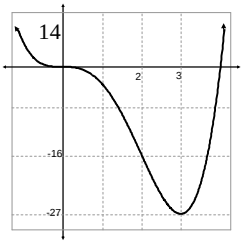


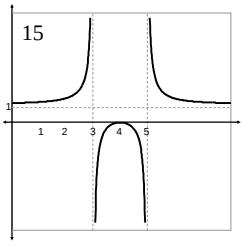
8. (A) m = –6 en x = –1, M = 6 en x = 3. (B) m = –7 en x = 2, M = 9 en x = 0. (C) m no hay, M = $\frac{203}{27}$ en x = $-\frac{4}{3}$. (D) m = –28 en x = –1, M no hay. **9.** (A) Decrece en]–∞, –2[∪]1, 0[y crece en]–2, –1[∪]0, +∞[. (B) Máximo relativo en x = –1, valor f(1) = –7; mínimo relativo en x = 2 y en x = 0, valor –8 en ambos. (C) No tiene máxima absoluto en su dominio, pero el mínimo absoluto es –8. **10.** (A) $D_f = \mathbb{R}$, puntos de corte P(0, 0) y Q(–1, 0). (B) Decrece en]–∞, –1[∪]–1/2, 0[y crece en]–1, –1/2[∪]0, +∞[. (D) Mínimo relativo en x = –1 y en x = 0, valor f(–1) = f(0) = 0; máximo relativo en x = –1/2, valor f(–1/2) = 1/16. **11.** (A) $D_f = \mathbb{R}$, puntos de corte P(0, 4), Q(1, 0) y Q(–2, 0). (B) Decrece en]–∞, –2[∪]–1/2, 1[y crece en]–2, –1/2[∪]1, +∞[. (D) Mínimo relativo en x = –2 y en x = 1, valor f(–2) = f(1) = 0; máximo relativo en x = –1/2, valor f(–1/2) = 81/16. **12.** (A) A(0, 5), B$\left(\sqrt{5},0\right)$, C$\left(-\sqrt{5},0\right)$, D(1, 0), E(–1, 0). (B) Crece en]$-\sqrt{3}$, 0[∪]$\sqrt{3}$, +∞[, decrece en]–∞, $-\sqrt{3}$[∪]0, $\sqrt{3}$[. Mínimos relativos en x = $\pm\sqrt{3}$, valor −4; máximo relativo en x = 0, valor 5. (C) No hay máximo absoluto, hay mínimo absoluto: −4, para x = $\pm\sqrt{3}$. (D) Cóncava en]–∞, –1[∪]1,+∞[; convexa en]−1, 1[. **13.** (A) Crece en]–2, +∞ [, decrece en]–∞, –2[. Mínimo relativo en x = –2, valor –24. (C) Cóncava en]–∞, –1[∪]1,+∞[; convexa en]–1, 1[.

(D) PI en x = ±1. **14.** (A) A(0, 0) y B(4, 0). (B) Decrece en]–∞, 3[, crece en]3, +∞[. Mínimo relativo en x = 3, valor –27. (C) No hay máximo absoluto, hay mínimo absoluto: –27, para x = 3. (D) Cóncava en]–∞, 0[∪]2, +∞[, convexa en]0, 2 [. PI en x = 0 y x = 2. **15.** (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{3, 5\}$, puntos de corte P(0, 16/15) y Q(4, 0).
(B) AH: y = 1 (bilateral), AV: x = 3, x = 5. (C) Crece en]–∞, 3[∪]3, 4[y decrece en]4, 5[∪]5, +∞[. (D) Máximo relativo en x = 4, valor f(4) = 0.

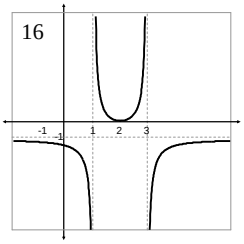


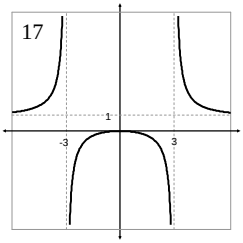


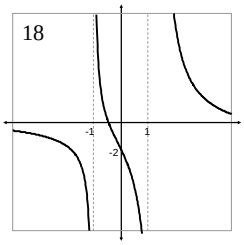




16. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, 3\}$, puntos de corte P(0, –4/3) y Q(2, 0). (B) AH: y = –1 (bilateral), AV: x = 1, x = 3.
(C) Decrece en]–∞, 1[∪]1, 2[y crece en]2, 3[∪]3, +∞[. (D) Mínimo relativo en x = 2, valor f(2) = 0.
17. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{-3, 3\}$, puntos de corte P(0, –1/9). (B) AH: y = 1 (bilateral), AV: x = –3, x = 3.
(C) Crece en]–∞, 0[∼ {– 3} y decrece en]0, +∞[∼ {3}. (D) Máximo relativo en x = 0, valor f(0) = –1/9.
18. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, -1\}$, puntos de corte P(0, –2) y Q(–2/3, 0). (B) AH: y = 0 (bilateral), AV: x = 1, x = –1.
(C) Decrece en $\mathbb{R} \sim \{1, -1\}$. (D) No hay máximos ni mínimos relativos.







19. (A) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1, -1\}$, AV: x = 1, x = –1, AO: y = x. (C) f crece en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ y decrece en $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\sim \{-1, 1\}$. (D) Máximo relativo en x = $-\sqrt{3}$, valor $f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$; mínimo relativo en x = $\sqrt{3}$, valor $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **20.** (A) f crece en]1, 3[∪]3, +∞[, f decrece en]–∞, 1[, m = $-\frac{3}{2}$ en x = 1, f cóncava en]–∞, 3[y línea recta en]3, +∞[. (B) g crece en]0, +∞[, decrece en]–∞, 0[, m = –3 en x = 0, g cóncava en]–∞, –1[∪]–1, +∞[.
(C) h crece en]–2, 2[∪]2, +∞[, decrece en]–∞, –2[, m = –4 en x = –2, cóncava en]–∞, 2[∪]2, +∞[.
21. (A) Continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \sim \{-1\}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > -1 \\ \dfrac{-12x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$ (B) f crece en]–∞, –1[∪]0, +∞[y decrece en] –1, 0[. (C) Máximo relativo en x = –1, valor f(–1) = 3; mínimo relativo en x = 0, valor f(0) = 2.
22. (A) a = 10. (B) Decrece en [2, 5[, crece en]5, 7]. (C) Máximo absoluto 20 en x = 7; mínimo absoluto 2 en x = 5.
23. (A) Continua en [–2, 5] ∼ {3}. (B) Decrece en]0, 1[y crece en [–2, 0[∪]1, 5[. (C) Máximo absoluto 2 en x = 0 y 2; mínimo absoluto 0 en x = –2. (D) Máximo absoluto 14 en x = 5; mínimo absoluto 0 en x = –2. **24.** 5.
25. 15 × 20 m; 120 €. **26.** Todas miden 5 cm. **27.** r = $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ dm, h = $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm. **28.** x = y = 30 m.
29. a = –8, b = 0, c = 20. **30.** a = –3, b = 3, c = –1. **31.** a = 1, b = –3, c = 0, d = 4. **32.** a = 1/3, b = 1, c = –4/3.
33. 12×24 cm. **34.** 8, 8 y 4 m. **35.** 50 kg; 150 €. **36.** (A) 584 kg y 4104 kg. (B) 3520 kg. (C) 880 kg/h.
(D) 792, 944 y 1000 kg/h. (E) Siempre, pues la derivada es siempre positiva. (F) En [0, 5]. (G) 1000 kg/h, a las 5 h.
37. 12600 €, sí. (B) $f(x) = -2x^2 + 80x + 12000$. (C) Hasta 20 personas más. (D) 12800 €. **38.** (A) 86250 €.
(B) 90000 €. (C) f(x) = (15 + x)(5750 – 250x). (D) 19 comerciales, 90250 €. **39.** 15 árboles adicionales; producción máxima 12 250 frutos. **40.** 100 unidades; 3900 €; 53 €/u.

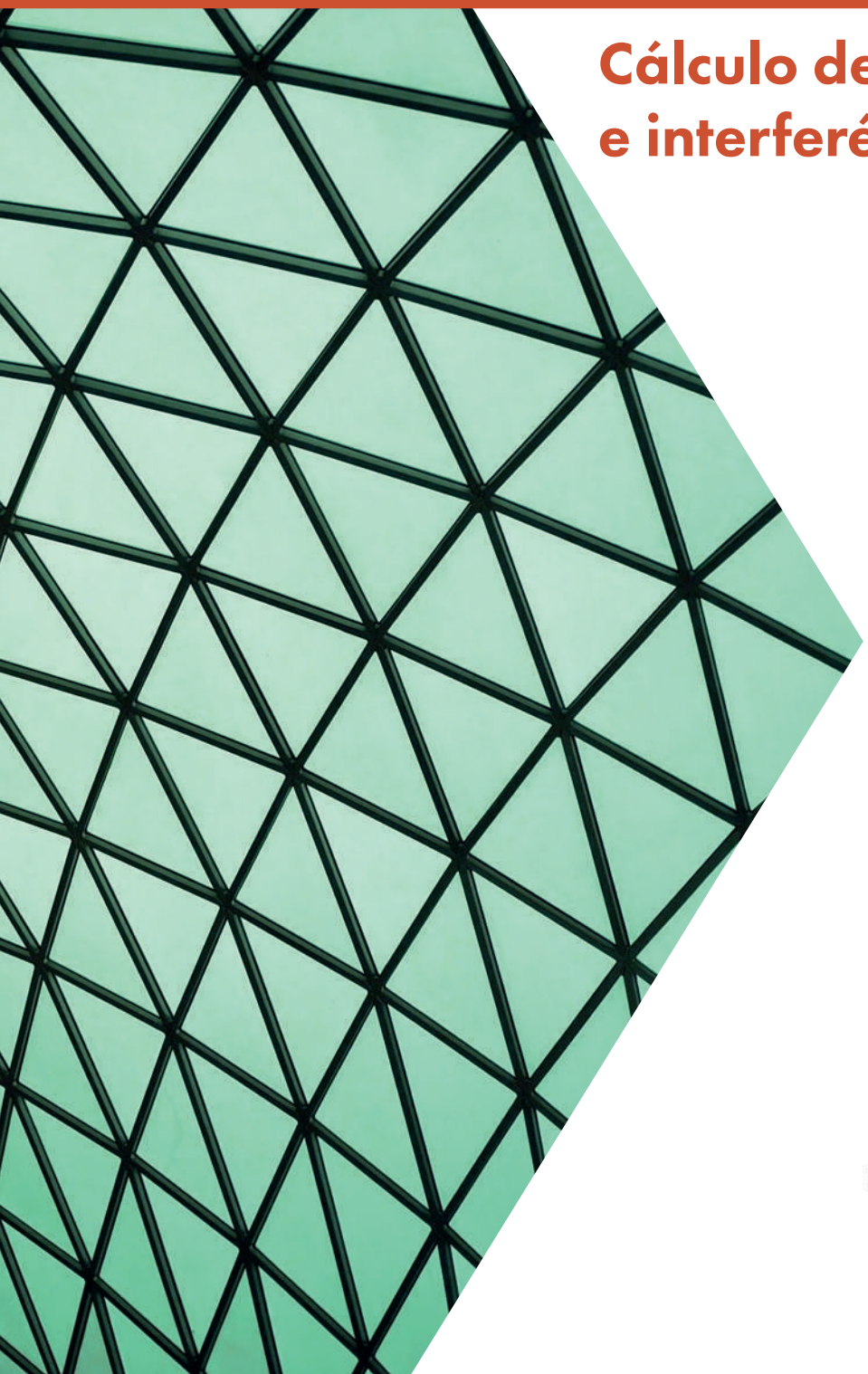
41. (A) $I(p) = p(2000 - 1000p)$. (B) $p = 1$ €, $I(1) = 1000$ €. **42.** (A) 30 personas/día. (B) 20 días. (C) 42 días. **43.** (A) $A(x) = 10x - x^2$. (B) $D(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$. (C) $x = 5$ m, $A = 25$ m^2. (D) $x = 5$ m, $D = \sqrt{50}$ m. **44.** El lado de la primera parcela 16 m y 24 m para la segunda. Coste mínimo 1920 €. **45.** $x = 3$ m, $y = 4$ m. **46.** 25 m × 40 m. Coste 4000 €. **47.** 20 m × 50 m; 8000 €. **48.** (A) Precio sin romper: 2500 €, precio al romper: 1700 €; pérdidas: 800 €. (B) $p(x) = -2x^2 + 100x \geq 0$ en [0, 50]. (C) Peso: 25 gramos cada uno; pérdidas: 1250 €. **49.** Siempre es creciente, por tanto no hay máximo absoluto, pero como B(x) tiende a 10 cuando x tiende a $+\infty$, el beneficio no supera los 10 miles de €. **50.** (A) Discontinua en $x = 20$. (B) Crecen ambas. (C) Sí, al pasar de 20 horas. (D) No se alcanza, hay una asíntota horizontal en $y = 10$. **51.** (A) 3000 rev/min, 5litros. (B) 5000 rev/min, 13 litros. **52.** 6.875 m/s. (B) 11m/s. (C) 150 m, 12.375 m/s. **53.** (A) A los 60 días, 40.72 litros. (B) A los 300 días, 29.2 litros. **54.** (A) $A(x) = \frac{10x - x^2}{2}$. (B) $x = 3$, $y = 3.5$, $A = 10.5$ m^2. (C) $x = 5$, $y = 2.5$, $A = 12.5$ m^2.
55. (A) 5 millones. (B) El máximo se alcanza en 10 millones que es el extremo del intervalo.
56. $f(x) = \frac{C(x)}{x} = 0.5x + 5 + \frac{800}{x}$; 40 litros; 45 €/l. **57.** A 30 €; 20 unidades; 400 € de beneficio.
58. (A) 90 clientes a las 11 de la noche. (B) Entre las 9 y las 10 de la noche y entre las 12 de la noche y la 1 de la madrugada. **59.** (A) $I(x) = -150x^2 + 600x + 172800$. (B) 34 €; 173400 €; 5100 abonados. **60.** (A) No tiene máximo. (B) 20 toneladas. (C) 10 toneladas; 0.5 miles de euros por tonelada. **61.** (A) En la apertura, 2000 miles de euros. (B) A las 13/3 horas de la apertura, 1493 miles de euros. **62.** (A) Es decreciente en el intervalo. (B) $a = -5$, $b = 20$. **63.** (A) 46.67 %. (B) El rendimiento crece hasta las 1.5 horas y decrece desde las 1.5 horas hasta las 6 h. El máximo rendimiento es del 58.33 %. **64.** (A) Es continua en $[0, +\infty[$. (B) Como $f'(x) = -1.1$ si $0 < x < 5$, y $f'(x) = \frac{-35}{(x+2)^2}$ si $x > 5$, f es siempre decreciente y el número de fotografías decrece con la antigüedad de la máquina. (C) Sí, porque f es siempre decreciente y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+45}{x+2} = 5$, por tanto $f(x) > 5$ siempre.
65. (A) f es continua en $[0, 8]\sim\{3\}$. (B) Valor máximo: 18, cuando $x = 8$; valor mínimo: 10, cuando $x = 4$. (C) Convino comprar a las 4 horas y vender a las 8 horas; beneficio: $18 - 10 = 8$ €/acción. **66.** (A) f es continua en [0, 13]. (B) $t = 13$, máxima valoración de 5.65 millones de euros. (C) $t = 5$, mínima valoración de 4.5 millones de euros. **67.** (A) $I(x) = 8000x$. (B) $B(x) = -10x^2 + 6000x - 250000$. (C) 300 motos, con un beneficio de 650 000 €.
68. (A) $I(x) = 80x$. (B) $B(x) = -0.1x^2 + 60x - 2500$. (C) 300 cajas, 6 500 €. **69.** (A) El beneficio inicial es del 1 %, crece hasta los 18 meses y decrece desde los 18 meses hasta los 30 meses, donde el beneficio sería del 1.88 %. (B) La inversión se ha de mantener 18 meses y el beneficio máximo sería del 2 %. (C) El beneficio se aproxima al 1 % cuando el tiempo tiende a $+\infty$. **70.** (A) Pierde 159 oyentes/h. (B) Pierde 96 oyentes/h y gana 9 oyentes/h respectivamente. (C) Máxima audiencia a las 12 de la mañana, mínima a las 7 de la tarde. (D) 660 y 23 oyentes respectivamente. (E) A las 9 de la tarde con 12 oyentes/h. **71.** (A) 5 millones de euros con el que alcanzaríamos 237.5 millones de € de beneficio. (B) El máximo absoluto ya no estaría en $x = 5$ sino en $x = 10$ y se alcanzaría 250 millones de beneficio. **72.** (A) 5000 kg. (B) –1000 kg/€, por cada euro que se incrementa el precio la demanda cae en 1000 kg. (C) –1000 kg/€. (D) 9000 kg a 1 €. (E) Decrece en todo el intervalo. (F) $I(p) = p \cdot D(p)$; $p = 5$ €, $D(5) = 5000$ kg. **73.** (A) $P'(t) = -6t^2 + 48t - 72$. (B) 18, 22.5 y 18 piezas/h. (C) A las 4 h, a 24 piezas/h. Pasa de aumentar el ritmo a disminuirlo (se llama punto de rendimientos decrecientes, es decir, en un punto de fatiga y aunque sigue fabricando piezas lo hace a menor ritmo). **74.** (A) 4 toneladas, coste: 17200 €. (B) $C'(100) = 898.56$ euros, la tonelada 101 tiene este coste añadido sobre la tonelada 100. **75.** (A) A partir del segundo año. (B) No, la función es creciente y con AH: $y = 2$, por lo que nunca alcanzará el valor 3. **76.** (A) El coste es mínimo cuando no se produce; 25 miles de €. (B) $B(x) = -0.125x^2 + 5x - 25$. (C) 20 unidades, 25 miles de €. **77.** (A) $x = 60$ pólizas, beneficio de 208880 €. (B) $df(51) = 599.4$ €; $df(57) = 210.6$ €; $df(59) = 71.4$ €; $df(60) = 0$ €; $df(62) = -146.4$ €. Vender una póliza más proporciona beneficio hasta alcanzar las 60 pólizas, a partir de ahí no conviene vender más pólizas.

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Cálculo de probabilidades e interferéncia estadística



educàlia editorial

2 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Cálculo de probabilidades e interferéncia estadística

educàlia editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-06-0

Depósito legal: V-3242-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Todos los derechos reservados. No está permitida la reimpresión de ninguna parte de este libro, ni de imágenes ni de texto, ni tampoco su reproducción, ni utilización, en cualquier forma o por cualquier medio, bien sea electrónico, mecánico o de otro modo, tanto conocida como los que puedan inventarse, incluyendo el fotocopiado o grabación, ni está permitido almacenarlo en un sistema de información y recuperación, sin el permiso anticipado y por escrito del editor.

Alguna de las imágenes que incluye este libro son reproducciones que se han realizado acogiéndose al derecho de cita que aparece en el artículo 32 de la Ley 22/18987, del 11 de noviembre, de la Propiedad intelectual. Educàlia Editorial agradece a todas las instituciones, tanto públicas como privadas, citadas en estas páginas, su colaboración y pide disculpas por la posible omisión involuntaria de algunas de ellas.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 3

Variables aleatorias discretas

3.1 Variables aleatorias discretas
- Variables aleatorias
- Sucesos relacionados con una variable aleatoria

3.2 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta
- Función de cuantía de una variable discreta
- Propiedades

3.3 Esperanza de una variable aleatoria discreta

3.4 Varianza de una variable aleatoria discreta
- Definición de varianza y desviación típica
- Definición operativa de la varianza

3.5 La distribución binomial

3.6 La distribución hipergeométrica

3.1 Variables aleatorias discretas

En cualquier experimento aleatorio, los sucesos de interés suelen estar relacionados con cantidades numéricas, como por ejemplo el número de caras al lanzar 3 monedas, el tiempo de espera en una determinada cola, etc. Estas cantidades numéricas se expresan mediante variables, llamadas ***variables aleatorias***, en las que podemos definir conceptos tan conocidos como la ***media*** y la ***varianza***.

➢ Variables aleatorias

Consideramos un experimento aleatorio de espacio muestral Ω.

Llamamos ***variable aleatoria* X** a una correspondencia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada resultado posible ω del espacio muestral Ω le asocia un **único** número real.

El conjunto de todos los números reales que toma la variable aleatoria X se llama ***rango***, $\mathbf{R_X}$:

$$\mathbf{R_X = \{X(\omega): \omega \in \Omega\}}$$

Clasificamos las variables aleatorias según el número de valores de su rango:

- Si el rango $\mathbf{R_X}$ es un conjunto finito o infinito numerable, la variable se llama ***discreta***.
- Si el rango $\mathbf{R_X}$ es un intervalo de números reales, la variable se dice que es ***continua***.

Ejemplo 1

- Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados. El espacio muestral Ω contiene 36 resultados:

(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(2,2)	(1,4)	(4,1)	(2,3)	(3,2)	(1,5)	(5,1)
(2,4)	(4,2)	(3,3)	(1,6)	(6,1)	(2,5)	(5,2)	(3,4)	(4,3)	(2,6)	(6,2)	(3,5)
(5,3)	(4,4)	(3,6)	(6,3)	(4,5)	(5,4)	(4,6)	(6,4)	(5,5)	(5,6)	(6,5)	(6,6)

  Definimos la variable aleatoria **X: "suma de puntos obtenidos con los 2 dados"**.

  X asocia a cada resultado del espacio muestral un número, la suma de los puntos de cada dado. Por ejemplo:

$$(1, 1) \rightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow X(1, 1) = 2$$
$$(1, 2) \rightarrow 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow X(1, 2) = 3$$
$$(6, 6) \rightarrow 6 + 6 = 12 \Leftrightarrow X(6, 6) = 12$$

  El ***rango de X***, o conjunto de todos los valores posibles, es:

$$\mathbf{R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$$

  Como R_X es un conjunto finito la variable X es ***discreta***.

- Esperamos una llamada telefónica que se producirá entre las 10 y las 11 horas de forma que suponemos aleatoria. El espacio muestral podemos considerarlo como:

$$\mathbf{\Omega = [10, 11]}$$

  Definimos la variable X: "tiempo que esperamos hasta recibir la llamada".

  El **rango** de X es $\mathbf{R_X = [0, 1]}$ y, por tanto, X es una variable **continua**.

  La variable X transforma cada resultado de Ω (instante de tiempo en que se produce la llamada) en un número entre 0 y 1 (tiempo que hemos esperado) mediante la expresión:

$$\mathbf{X(\omega) = \omega - 10,} \text{ para cualquier } \boldsymbol{\omega \in \Omega}$$

➢ Sucesos relacionados con una variable aleatoria

Consideramos una variable aleatoria X definida sobre Ω y un valor x de su rango R_X.

Representamos por **{X = x}** al suceso de Ω que contiene los resultados para los que la variable X toma el valor x, es decir:

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\}$$

Representamos por **{X ≤ x}** al suceso de Ω que contiene los resultados para los que X toma valores menores o iguales que x:

$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \le x\}$$

Representamos por **{a ≤ X ≤ b}** al suceso que contiene los resultados para los que X toma todos los valores entre a y b:

$$\{a \le X \le b\} = \{\omega \in \Omega \,/\, a \le X(\omega) \le b\}$$

De igual forma se definen los sucesos **{X < x}**, **{X ≥ x}**, **{a < X ≤ b}**, y otros parecidos.

Ejemplo 2

Consideramos de nuevo la variable aleatoria X: "número total de puntos al lanzar dos veces un dado".

- El suceso {X = 2} se lee: "el número total de puntos obtenido es 2", y contiene todos los resultados para los que la suma de puntos es 2 (solo uno, en este caso):

  $$\{X = 2\} = \{(1, 1)\}$$

  Esto permite clasificar todos los resultados de Ω en sucesos incompatibles:

  {X = 3} = {(1, 2), (2, 1)}
  {X = 4} = {(1, 3), (3, 1), (2, 2)}
  {X = 5} = {(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}
  {X = 6} = {(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)}
  {X = 7} = {(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}
  {X = 8} = {(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}
  {X = 9} = {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)}
  {X = 10} = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}
  {X = 11} = {(5, 6), (6, 5)}
  {X = 12} = {(6, 6)}

- El suceso {X ≤ 5} se lee: "el número total de puntos obtenido es menor o igual que 5":

  $$\{X \le 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

  Este suceso se expresa también por **{X ≤ 5} = {X = 2}** ∪ **{X = 3}** ∪ **{X = 4}** ∪ **{X = 5}**.

- El suceso {3 < X ≤ 5} se lee: "el número total de puntos obtenido es mayor que 3 y menor o igual que 5":

  $$\{3 < X \le 5\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

  Se expresa también por **{3 < X ≤ 5} = {X = 4}** ∪ **{X = 5}**.

1 Para la variable aleatoria X del ejemplo 2, expresa los resultados de que constan los sucesos:
(A) {X > 8} (B) {4 ≤ X ≤ 6} (C) {4 < X < 6} (D) {X < 3.5}
Expresa también los anteriores sucesos como unión de sucesos de la forma {X = x}.

2 Halla las intersecciones o uniones de sucesos siguientes para la variable X del ejemplo 2:
(A) {X ≤ 5} ∩ {X ≥3} (B) {X ≤ 2} ∪ {X ≤ 3} (C) {X = 3} ∪ {X = 4} (D) {X = 2} ∩ {X = 4}

3 En el experimento de lanzar dos veces una moneda expresa el espacio muestral, los valores de la variable aleatoria X: "número de caras al lanzar dos veces la moneda" y los sucesos de la forma {X = x}.

3.2 Distribución de probabilidad de una v. a. discreta

La ***distribución de probabilidad*** de una variable aleatoria discreta es cualquier expresión que relaciona los valores de la variable y las probabilidades de los sucesos relacionados con dichos valores.

La más utilizada es la llamada ***función de cuantía*** de una variable discreta. Conocida dicha función podemos obtener la probabilidad de cualquier suceso.

➢ Función de cuantía de una variable discreta

Consideramos una variable aleatoria discreta X definida sobre un espacio muestral Ω siendo su rango R_X; llamamos ***función de cuantía*** de la variable X a la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo 3

Consideramos de nuevo el experimento aleatorio de lanzar dos dados del ejemplo 2. Obtenemos la función de cuantía de la variable X: "número total de puntos obtenidos con los dados" y su representación gráfica.

El espacio muestral Ω del experimento aleatorio contiene 36 resultados:

(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(2,2)	(1,4)	(4,1)	(2,3)	(3,2)	(1,5)	(5,1)
(2,4)	(4,2)	(3,3)	(1,6)	(6,1)	(2,5)	(5,2)	(3,4)	(4,3)	(2,6)	(6,2)	(3,5)
(5,3)	(4,4)	(3,6)	(6,3)	(4,5)	(5,4)	(4,6)	(6,4)	(5,5)	(5,6)	(6,5)	(6,6)

Cada uno de los 36 resultados es igualmente probable; por tanto podemos calcular las probabilidades con la regla de Laplace:

$$\{X = 2\} = \{(1, 1)\} \quad \to \quad f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

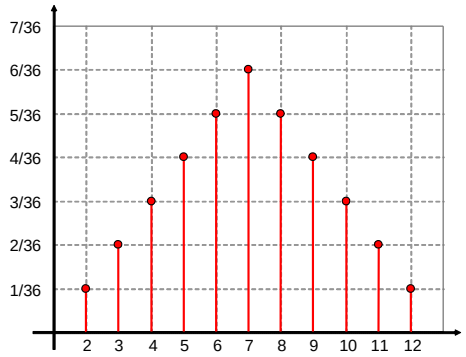
$$\{X = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad \to \quad f(3) = P(X = 3) = \frac{2}{36}$$

$$\{X = 4\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \quad \to \quad f(4) = P(X = 4) = \frac{3}{36}$$

$$\{X = 5\} = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\} \quad \to \quad f(5) = P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

De esta forma rellenamos todos los valores de la siguiente tabla. Observa que la suma de las probabilidades es 1. En la gráfica siguiente representamos los valores de X en el eje OX y sus probabilidades en el eje OY.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1



➢ Propiedades

(A) $\mathbf{0 \le f(x) \le 1}$

(B) Sólo los valores del rango R_X tienen probabilidad no nula, o equivalentemente:

$$\textbf{si} \quad x \notin R_X \quad \textbf{entonces} \quad f(x) = 0$$

(C) La suma de las probabilidades de todos los sucesos de la forma $\{X = x\}$ es igual a 1:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1$$

Ejemplo 4

Tenemos un llavero con 5 llaves indistinguibles y 2 de ellas abren una puerta. Obtenemos la función de cuantía de la variable:

X: "número de intentos hasta abrir la puerta"

Suponemos que cada vez que no abrimos con una llave la eliminamos del llavero. El número máximo de intentos es 4, en el caso de que eligiéramos primero las 3 llaves que no abren. El rango de X es:

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Para calcular la probabilidad de cada valor del rango, definimos los sucesos:

E_i : "tenemos ***éxito*** (abrimos) en la elección i-ésima",
F_i : "tenemos ***fracaso*** (no abrimos) en la elección i-ésima", $i = 1, 2, 3, 4$.

Deducimos:

$f(1) = P(X = 1) = P(E_1) = \dfrac{2}{5}$, pues corresponde a elegir una de las 2 llaves que abren.

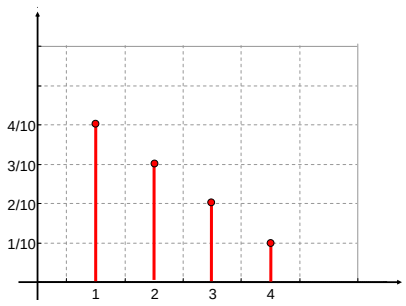
$f(2) = P(X = 2) = P(F_1 \cap E_2) = P(F_1) \cdot P(E_2/F_1) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$, que corresponde a elegir primero una de las 3 llaves que no abren y después una de las 2 llaves que abren, cuando ya nos quedan 4 llaves. Del mismo modo obtenemos:

$f(3) = P(X = 3) = P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{10}$.

$f(4) = P(X = 4) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap E_4) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{10}$.

La función de cuantía de X es

x_i	1	2	3	4	Total
$f(x_i)$	4/10	3/10	2/10	1/10	1



4 Calcula el rango y la función de cuantía de la variable aleatoria del ejemplo anterior en el caso en que tenemos 4 llaves de las que solo una abre una puerta, en los siguientes casos:
(A) Si tras cada intento fallido, eliminamos la llave que no abre.
(B) Si tras cada intento fallido, no eliminamos la llave que no abre.

5 La función de cuantía de una variable aleatoria X se puede expresar como $f(x) = px$, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$.
(A) Calcula el valor de p para que la anterior función sea de cuantía.
(B) Calcula las siguientes probabilidades: $P(X \le 2)$, $P(X < 2)$, $P(X \ge 2)$, $P(X > 2)$, $P(1 \le X \le 3)$, $P(1 < X \le 3)$, $P(1 \le X < 3)$, $P(1 < X < 3)$, $P(0.5 < X \le 3.5)$.

3.3 Esperanza de una variable aleatoria discreta

Todos los conceptos que utilizábamos para resumir la información contenida en la distribución de frecuencias de una variable estadística, como la media, la varianza, la mediana, etc., pueden ser definidos de forma análoga para resumir la información que sobre una variable aleatoria a partir de su distribución de probabilidades. Nos vamos a limitar a desarrollar los conceptos de ***esperanza*** *y* ***varianza***, los más utilizados, por sus muchas propiedades matemáticas.

➢ Definición de esperanza

Llamamos ***esperanza*** de la variable aleatoria X, que representamos por **E(X)**, a la suma de todos los valores de la variable multiplicados por sus probabilidades:

$$\mathbf{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

siendo $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ las respectivas probabilidades de los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Si utilizamos los sumatorios la definición de esperanza se escribe de diferentes formas:

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X = x) = \sum_{x \in R_X} x \cdot f(x)}$$

La esperanza de X se llama también ***valor esperado***, ***valor medio*** o ***media*** de X.

Como la suma de las probabilidades de todos los valores del rango R_X es igual a 1:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

E(X) es una ***media***, de los diferentes valores de la variable X, ***ponderada*** por sus probabilidades:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

Ejemplo 5

En sus inicios, el concepto de esperanza apareció ligado a los juegos de azar, porque los jugadores querían conocer lo que "esperaban" ganar en el juego. Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados y anotar el número de puntos obtenido. ¿Que esperamos obtener como resultado?

El espacio muestral Ω del experimento aleatorio contiene 36 resultados:

(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (3,1) (2,2) (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) (1,5) (5,1)

(2,4) (4,2) (3,3) (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) (2,6) (6,2) (3,5)

(5,3) (4,4) (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) (4,6) (6,4) (5,5) (5,6) (6,5) (6,6)

Los posibles valores de la variable X: "número de puntos al lanzar dos dados" y sus probabilidades están en las dos primeras filas de la tabla siguiente. La tercera fila contiene los cálculos iniciales para obtener E(X):

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
$x_i \cdot p_i$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36	**7**

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{i=2}^{12} x_i \cdot p_i = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \mathbf{7}$$

Ejemplo 6

Una lotería consta de 10 000 números (del 0000 al 9999) y reparte los siguientes premios:

- 1000 € al que coincide con el número premiado.
- 100 € al que coincide en las 3 últimas cifras.
- 10 € al que coincide en las 2 últimas cifras.
- 1 € al que coincide solo en la última cifra.

Si el precio de cada número es de 5 €, ¿qué cantidad esperamos ganar?

Si llamamos X: "cantidad de dinero recibido por número", el rango será:

$$\mathbf{R_X = \{0, 1, 10, 100, 1000\}}$$

Calculamos la probabilidad de cada valor de la variable X.

Cada una de las cifras tiene probabilidad $\frac{1}{10}$ de coincidir con la premiada y $\frac{9}{10}$ de no coincidir:

$P(X = 1000) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.0001$ (Acertar las 4 cifras.)

$P(X = 100) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.0009$ (Acertar las 3 últimas cifras y no la primera.)

$P(X = 10) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.009$ (Acertar las dos últimas cifras y no la antepenúltima.)

$P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.09$ (Acertar la última cifra y no la penúltima, las demás dan igual.)

$P(X = 0) = \frac{9}{10} = 0.9$ (No acertando la última cifra no se recibe premio alguno.)

La tabla de la función de cuantía es:

x	0	1	10	100	1000	Total
P(X = x)	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001	1

Observamos que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.0001 = 1$$

La esperanza de la variable X es la suma de todos los valores de X multiplicados por sus probabilidades:

$$\mathbf{E(X)} = 0 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.09 + 10 \cdot 0.009 + 100 \cdot 0.0009 + 1000 \cdot 0.0001 = \mathbf{0.37}$$

Esperamos ganar 0.37 €, y teniendo en cuenta que nos gastamos 5 € en adquirir el número, en realidad esperamos perder 4.63 €.

6 Lanzamos un dado; si obtenemos un número par recibimos tantos euros como indica el número del dado pero si obtenemos un número impar, pagamos tantos euros como indica el dado. ¿Cuánto dinero esperamos ganar?

7 Repite la pregunta de la actividad anterior si lanzamos dos dados observando la suma de los puntos obtenidos.

8 Calcula el número medio de caras que esperamos obtener al lanzar 4 veces una moneda.

9 Calcula el número de intentos que esperamos realizar hasta abrir una puerta con las llaves de un llavero que tiene 5 llaves si al elegir una llave que no abre la eliminamos del llavero, en los siguientes casos:
(A El llavero contiene una única llave que abre la puerta.
(B) El llavero contiene dos llaves que abren la puerta.

3.4 Varianza de una variable aleatoria discreta

En estadística descriptiva la ***varianza*** es un concepto utilizado para medir el grado de dispersión de los valores de una variable respecto de su media, y se define como la media aritmética de las diferencias cuadráticas entre los valores de la variable y dicha media. Para las variables aleatorias tenemos el mismo concepto con una definición parecida.

➢ Definición de varianza y desviación típica

Llamamos ***varianza*** de la variable aleatoria X, que representamos por **Var(X)**, al valor esperado de las diferencias cuadráticas entre los valores de X y su esperanza E(X):

$$\mathbf{Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2}$$

Si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son las respectivas probabilidades de los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\mathbf{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \cdots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n}$$

Llamamos ***desviación típica*** de X, **σ(X)**, a la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

➢ Definición operativa de la varianza

La fórmula que obtenemos a continuación es mucho más sencilla para calcular la varianza que la de su definición y es la utilizada habitualmente.

$$\mathbf{Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$$

siendo

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

y

$$\mathbf{E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n}$$

Por la fórmula del cuadrado de un binomio, expresamos:

$$\left(x_i - E(X)\right)^2 = x_i^2 - 2\, x_i \cdot E(X) + E(X)^2$$

Si sustituimos esta expresión en $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$ y separamos en 3 sumandos, obtenemos:

$$Var(X) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i}_{\mathbf{E(X^2)}} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}_{\mathbf{E(X)}} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{\mathbf{1}}$$

Obtenemos:

$$Var(X) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 \cdot 1 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Por tanto $\mathbf{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$.

Ejemplo 7

Tenemos una urna que contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Calculamos la esperanza de las variables:

X: "número de bolas blancas en dos extracciones sin reemplazo".

Y: "número de bolas blancas en dos extracciones con reemplazo".

Calculamos la función de cuantía de X. Si las extracciones son ***sin reemplazo***:

$$P(X = 0) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P(X = 1) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10} \text{ y } P(X = 2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Calculemos la función de cuantía de Y. Como las extracciones son ***con reemplazo***:

$$P(Y = 0) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

$$P(Y = 1) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \text{ y } P(X = 2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

Ambas variables tienen la misma esperanza pero la distribución de probabilidad de X está más concentrada alrededor de la media que la de Y como vemos en sus funciones de cuantía:

x	0	1	2	Total
P(X = x)	0.3	0.6	0.1	1

y	0	1	2	Total
P(Y = y)	0.36	0.48	0.16	1

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$$

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot P(Y = y) = 0 \cdot 0.36 + 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.16 = 0.8$$

La mayor concentración de las probabilidades de la variable X se traduce en que la varianza de X es menor que la de Y. Utilizamos la fórmula operativa de la varianza para comprobar este hecho:

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot P(X = x) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot P(Y = y) = 0^2 \cdot \frac{9}{25} + 1^2 \cdot \frac{12}{25} + 2^2 \cdot \frac{4}{25} = 1.12$$

Las varianzas de X e Y son:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0.8^2 = 0.36 \qquad Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1.12 - 0.8^2 = 0.48$$

10 Calcula la función de cuantía, la esperanza y la varianza de la variable X: "número de puntos obtenido al lanzar un dado".

11 Repite las preguntas de la actividad anterior, si el dado está fabricado de forma que tenemos igual probabilidad de obtener el 1 que el 6, doble probabilidad de obtener el 2 o el 5 y quíntuple probabilidad de obtener el 3 o el 4.

12 Tenemos dos urnas que contienen bolas numeradas de la siguiente forma:

- La urna 1 contiene 5 bolas con los números 1, 2, 3, 4, 5.
- La urna 2 contiene 10 bolas con los números 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Extraemos una bola de cada urna y definimos las variables:

X: "número de la bola extraída de la urna 1" e Y: "número de la bola extraída de la urna 2".

Calcula las funciones de cuantía de ambas variables, sus esperanzas y varianzas.

3.5 La distribución binomial

Es una de las distribuciones de probabilidad más común en Estadística. Son muchos los experimentos aleatorios que presentan las condiciones de la distribución binomial. Vamos a expresarlas y a obtener, de forma general, una fórmula para el cálculo de probabilidades en experimentos aleatorios que las verifiquen.

De un experimento aleatorio consideramos un suceso que llamamos A.
Diremos que tenemos ***éxito*** si el suceso A ocurre o se verifica y ***fracaso*** si A no se verifica.

- La ***probabilidad de éxito*** es **p** = P(A).
- La ***probabilidad de fracaso*** es **q** = 1 – P(A) = 1 – p.

Del experimento hacemos **n pruebas independientes**, llamadas experiencias, y definimos la variable aleatoria:

X: "número de éxitos en las n experiencias".

En estas circunstancias diremos que la variable aleatoria X sigue una distribución de probabilidad llamada ***binomial de parámetros*** **n** y **p**, que representamos por $\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

Un examen tipo test consta de 5 preguntas con 4 alternativas por pregunta de las que solo una es correcta. Un estudiante decide responder todas las preguntas al azar. Definimos la variable aleatoria:

X: "número de preguntas acertadas en el test de 5 preguntas".

Nos encontramos en las condiciones de la variable binomial:

- El experimento consta de **5 experiencias** que son las 5 preguntas del test.
- **Las experiencias son independientes** porque las preguntas son contestadas al azar.
- En cada experiencia llamamos **éxito** a acertar la respuesta y **fracaso** a no acertarla; como en cada pregunta hay 4 alternativas y solo una correcta, las probabilidades de éxito y fracaso son en este caso: $\mathbf{p = \frac{1}{4}}$ y $\mathbf{q = \frac{3}{4}}$.

Decimos que la variable X sigue una distribución **binomial con parámetros n = 5** y $\mathbf{p = \frac{1}{4}}$: $\mathbf{X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)}$.

➢ Características de la variable binomial

Si X sigue una distribución binomial, $\mathbf{X \sim B(n, p)}$:

- La **función de cuantía** es:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}}, \text{ para } \mathbf{x = 0, 1, 2, ..., n}.$$

- **La esperanza** es el número de experiencias por la probabilidad de éxito:

$$\mathbf{E(X) = n \cdot p}$$

- **La varianza** es el número de experiencias por las probabilidades de éxito y de fracaso:

$$\mathbf{Var(X) = n \cdot p \cdot q}$$

No vamos a ver la demostración general de los anteriores resultados pero lo haremos en el caso particular del siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Consideremos nuevamente la variable aleatoria **X: "número de preguntas acertadas en el test de 5 preguntas"** que sigue una distribución binomial, $\mathbf{X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)}$. Obtenemos su función de cuantía, esperanza y varianza.

Como ejemplo, deducimos la probabilidad del suceso:

{X = 2}: "el número de preguntas acertadas es de 2".

Llamamos: E_i: "en la experiencia i-ésima tenemos éxito" $\rightarrow$ $P(E_i) = \mathbf{p = 1/4}$, para i = 1, 2, 3, 4, 5.

F_i: "en la experiencia i-ésima tenemos fracaso" $\rightarrow$ $P(F_i) = \mathbf{q = 3/4}$, para i = 1, 2, 3, 4, 5.

Podemos obtener 2 éxitos en las 5 pruebas consiguiéndolos en las primeras 2 pruebas y fracaso en las 3 restantes:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) \cdot P(F_5) = p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2 \cdot q^3 \qquad \textbf{(1)}$$

Pero hay 10 formas de obtener 2 éxitos y 3 fracasos:

EEFFF EFEFF EFFEF EFFFE FEEFF FEFEF FEFFE FFEEF FFEFE FFFEE

Este número de formas es el de las ***permutaciones con repetición*** de 5 elementos, de los que 2 son iguales entre sí y los 3 restantes también son iguales entre sí:

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2} = 10 \qquad \textbf{(2)}$$

Como cualquiera de las distintas formas tiene probabilidad $p^2 \cdot q^3$, la probabilidad de obtener 2 éxitos en 5 pruebas es la probabilidad calculada en (1) multiplicada por el número de formas distintas de reordenarlos (2):

$$\mathbf{f(2) = P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 \cdot q^3 = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = 0.2636}$$

En general se demuestra que:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}}, \text{ para } \mathbf{x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ y } 5}.$$

Los valores de estas probabilidades los expresamos en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	Total
P(X = x)	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$	1

$$E(X) = \sum x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{243}{1024} + 1 \cdot \frac{405}{1024} + 2 \cdot \frac{270}{1024} + \cdots + 5 \cdot \frac{1}{1024} = \mathbf{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \mathbf{E(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1.25}$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot \frac{243}{1024} + 1^2 \cdot \frac{405}{1024} + 2^2 \cdot \frac{270}{1024} + \cdots + 5^2 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{5}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \mathbf{Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}}$$

13 Calcula la probabilidad de obtener 5 caras en 8 lanzamientos de una moneda, el número de caras que esperamos obtener en los 8 lanzamientos y la varianza.

14 Una máquina fabrica piezas de forma independiente. Dichas piezas pueden ser defectuosas con una probabilidad del 5 %. Calcula la probabilidad de que un lote de 10 piezas contenga:
(A) Dos defectuosas. (B) Alguna pieza defectuosa. (C) Más de una pieza defectuosa.

15 En la situación del ejemplo 8, calcula la probabilidad de aprobar el examen tipo test contestando al azar si se aprueba acertando al menos la mitad de las preguntas.

Ejemplo 9

Efectuamos 10 lanzamientos con un dado de quiniela que tiene tres caras con el número 1, dos caras con la X y una con el 2. Como cada lanzamiento es **independiente** de los demás y las probabilidades de obtener respectivamente un uno, una equis o un dos son siempre **las mismas** en cada lanzamiento:

$$P(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(X) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(2) = \frac{1}{6}$$

Así las siguientes variables aleatorias son **binomiales**:

$$\text{X: “número de unos en los 10 lanzamientos”} \rightarrow X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Y: “número de equis en los 10 lanzamientos”} \rightarrow Y \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$$

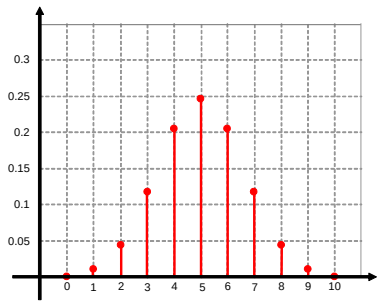
$$\text{Z: “número de doses en los 10 lanzamientos”} \rightarrow Z \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$$

Las funciones de cuantía y las gráficas de las 3 variables son:

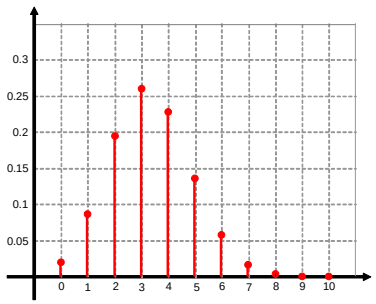
$$P(X = x) = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \text{ para } x = 0, 1, 2, ..., 10$$

$$P(Y = y) = \binom{10}{y} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-y}, \text{ para } y = 0, 1, 2, ..., 10$$

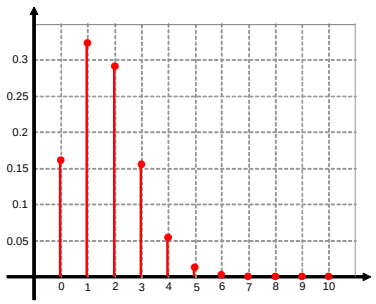
$$P(Z = z) = \binom{10}{z} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^z \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-z}, \text{ para } z = 0, 1, 2, ..., 10$$



$X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$



$Y \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$



$Z \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

- La probabilidad de obtener 4 unos en los 10 lanzamientos es:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cong 0.2051$$

- La probabilidad de obtener 4 equis en los 10 lanzamientos es:

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cong 0.2276$$

- La probabilidad de obtener 2 doses en los 10 lanzamientos es:

$$P(Z = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cong 0.2907$$

Ejemplo 10

Un jugador de baloncesto tiene una efectividad del 75 % en los lanzamientos a canasta. Efectúa 5 lanzamientos y suponemos que el resultado de cada lanzamiento que realiza es independiente de los anteriores. Calculamos las probabilidades de que el jugador consiga en 5 lanzamientos:

(A) Dos canastas. (B) Alguna canasta. (C) Más de dos canastas.

Nos encontramos ante un experimento aleatorio en el que la probabilidad de éxito (conseguir canasta) y fracaso (no conseguirla) son:

$$p = P(E) = 0.75 \qquad q = P(F) = 0.25$$

Puesto que efectúa 5 lanzamientos, el experimento se realiza 5 veces siendo **independiente** cada experiencia. Definimos la variable:

$$X\text{: “número de éxitos en 5 experiencias”} \quad \rightarrow \quad X \sim B(5,\, 0.75)$$

(A) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^3 \cong 0.0879$

(B) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^5 = 1 - 0.25^5 \cong 0.999$

(C) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.75^4 \cdot 0.25 + \binom{5}{5} \cdot 0.75^5 \cong$

$\cong 0.2637 + 0.3955 + 0.2373 = 0.8965$

Ejemplo 11

En un autobús viajan 10 personas que no se conocen. Hay 5 paradas hasta el final del trayecto y suponemos igualmente probable que cualquier persona baje en cualquier parada. Calculamos la probabilidad de que en la próxima parada bajen 2 personas.

Se trata de un experimento aleatorio con **10 experiencias independientes** (cada persona). Para cada experiencia llamamos éxito a bajar en la próxima parada y fracaso a no bajar. Como hay 5 paradas, estas probabilidades son, para cada persona:

$$p = \frac{1}{5} \qquad q = \frac{4}{5}$$

Definimos la variable aleatoria X: “número de éxitos en 10 experiencias” $\rightarrow$ $X \sim B\left(10,\, \frac{1}{5}\right)$

La probabilidad de que 2 personas bajen en la próxima parada es la probabilidad de obtener 2 éxitos:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cong 0.3020$$

16 Un motorista encuentra en su trayecto un total de 10 semáforos no sincronizados. Cada semáforo está en verde 3 minutos y en rojo 2 minutos. Calcula las probabilidades de que el motorista encuentre:
(A) Todos los semáforos en verde. (B) Dos de los 10 semáforos en verde.
(C) Alguno de los 10 semáforos en verde. (D) Más de 2 semáforos en verde.

17 En el ejemplo 10, sea p entre 0 y 1 el valor de la probabilidad de conseguir una canasta en un intento. Calcula el valor de p para que la probabilidad de conseguir alguna canasta en 10 intentos sea de 0.9.

18 En el ejemplo 11, calcula las probabilidades de que en la próxima parada:
(A) No baje ninguna persona. (B) Bajen 3 personas.
(C) Baje alguna persona. (D) Bajen menos de 8 personas.

3.6 La distribución hipergeométrica

Consideramos una ***población finita*** de **N** elementos ***distinguibles*** entre sí y supongamos que:

- **M** de ellos, llamados ***éxitos***, tienen una característica de interés A,
- el resto, **N – M**, no tienen esa característica y los llamamos ***fracasos***.

Elegimos al azar y ***sin reemplazo*** **n** elementos de la población; interesa conocer el número de éxitos obtenidos. Para ello, definimos la siguiente variable aleatoria:

X: "*número de éxitos obtenidos en la muestra de n elementos*".

Bajo estas condiciones, la variable X decimos que sigue una distribución de probabilidad ***hipergeométrica*** con parámetros **N**, **M** y **n**, representada por $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$, donde:

N es el ***número de elementos de la población***,
M es el ***número de éxitos*** existentes en la población y
n es el ***número de elementos de la muestra***.

➢ Características de la variable hipergeométrica

Si X sigue una distribución hipergeométrica $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$:

- La **función de cuantía** de X, para $\mathbf{x = 0, 1, 2, ..., n}$, $\mathbf{x \le M}$ y $\mathbf{n - x \le N - M}$, es:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

- Si llamamos $\mathbf{p = M/N}$ a la probabilidad de éxito en una extracción y $\mathbf{q = 1 - p}$, tenemos

$$E(X) = n \cdot p = n \cdot \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot q \cdot \left(\frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}}\right)$$

La variable $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$ también se define **X: "número de éxitos en n extracciones sin reemplazo"**.

Calculamos la probabilidad P(X = x) con la regla de Laplace. El espacio muestral del experimento aleatorio es el conjunto de todos los grupos que contienen n elementos de los N de la población; por tanto:

$$\textbf{casos posibles} = \binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}$$

Como tenemos $\binom{M}{x}$ formas de elegir x éxitos entre los M existentes en la población y $\binom{N-M}{n-x}$ formas de elegir n – x fracasos entre los N – M existentes, de donde

$$\textbf{casos favorables} = \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{x}} \cdot \binom{\mathbf{N-M}}{\mathbf{n-x}},$$

y la probabilidad de obtener x éxitos es:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{x}} \cdot \binom{\mathbf{N-M}}{\mathbf{n-x}}}{\binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}}$$

Ejemplo 12

- Tenemos una baraja española con 40 cartas y consideramos la variable hipergeométrica:

  X: "número de copas obtenidas al repartir 5 cartas **sin reemplazo**"

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{Número de elementos de la población (cartas):} & N = 40 \\ \text{Número total de éxitos (copas en la baraja):} & M = 10 \\ \text{Número de elementos extraídos (cartas repartidas):} & n = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{X \sim H(40, 10, 5)}$$

  La probabilidad de obtener 3 copas al repartir 5 cartas es:

  $$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{5}} \simeq 0.0793$$

  La esperanza y la varianza son:

  $$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{10}{40} = 1.25 \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot q \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 10 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{40} \cdot \frac{40-5}{40-1} = 1.6827$$

- Consideramos la variable Y: "número de copas obtenidas al repartir 5 cartas **con reemplazo**".

  Esta variable no es hipergeométrica, sino **binomial**: Cada extracción puede ser interpretada como una experiencia **independiente** de las demás, pues las extracciones son **con reemplazo** y las probabilidades de éxito y fracaso son, para cualquier extracción, **las mismas** pues siempre hay 10 copas y 40 cartas en total:

  $$p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad q = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

  Deducimos que Y sigue una distribución **binomial**: $\mathbf{Y \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)}$.

  La probabilidad de obtener 3 copas al repartir 5 cartas con reemplazo es:

  $$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \simeq 0.0879$$

  La esperanza y varianza son:

  $$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1.25 \qquad Var(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0.9375$$

19 Efectuamos 10 extracciones sin reemplazo de una urna que contiene 5 bolas blancas, 12 negras y 8 rojas. Calcula las probabilidades de:
(A) Obtener 2 bolas blancas. (B) Obtener 2 bolas negras. (C) Obtener 2 bolas rojas.

20 En una clase hay 10 chicos y 15 chicas. Formamos al azar un grupo de 5 personas de la clase para realizar un trabajo. Calcula la probabilidad de que el grupo:
(A) Esté formados solo por chicos. (B) Esté formado solo por chicas.
(C) Contenga más chicos que chicas. (D) Contenga más chicas que chicos.

21 Si realizamos una apuesta sencilla de la lotería primitiva (elegimos al azar 6 números entre el 1 y el 49), calcula la probabilidad de obtener premio (se obtiene premio al acertar 3 o más números).

22 La primera prueba de un examen de oposiciones consiste en elegir al azar 3 temas de una colección de 100 y responder bien uno de los tres para superar la prueba. Un estudiante se prepara 30 temas de los 100 de la colección, calcula las probabilidades de:
(A) Elegir uno de los temas que se ha preparado. (B) Elegir 2 de los temas que se ha preparado.
(C) ¿Qué probabilidad tiene de superar la prueba?

Problemas del capítulo 3

1 Una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad dada por la tabla siguiente:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.18	0.25	0.3	0.12	m

(A) Obtén el valor de m para que la anterior tabla represente una distribución de probabilidad.
(B) Representa gráficamente la función de cuantía $f(x) = P(X = x)$.
(C) Calcula E(X) y Var(X).
(D) Calcula $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$, …, $P(X \leq 5)$.
(E) La función definida por $F(x) = P(X \leq x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ se llama ***función de distribución*** de la variable X. Represéntala gráficamente.

2 La probabilidad de que un tirador haga blanco en una diana es p = 0.4 y supongamos que cada lanzamiento es independiente de los anteriores. Calcula la probabilidad de:
(A) Hacer 2 blancos en 5 tiros.
(B) Hacer algún blanco en 5 tiros.
(C) Hacer por lo menos 3 blancos en 5 tiros.
(D) Necesitar 5 tiros para hacer blanco por primera vez.

3 Suponiendo que cada niño nacido tiene una probabilidad 0.51 de ser varón, y que la elección al azar del sexo es independiente, calcula la probabilidad de que:
(A) Una familia con 5 hijos tenga 3 niños.
(B) Una familia con 5 hijos tenga 3 niñas.

4 Un aparato eléctrico consta de 5 piezas diferentes conectadas de tal forma que el aparato funciona si todas y cada una de las 5 piezas actúan con éxito. La probabilidad de que cada pieza actúe con éxito es 0.9, y cada pieza funciona de forma independiente.
(A) Calcula la probabilidad de que el aparato funcione.
(B) ¿Y si el aparato funcionara siempre que actúen con éxito al menos 4 de sus 5 piezas?
(C) ¿Y si el aparato funcionara siempre que actúe con éxito alguna de sus piezas?

5 Un fabricante de circuitos electrónicos afirma que la proporción de unidades defectuosas de cierto componente que éste produce es del 5 %. Un comprador de estos componentes revisa 20 unidades seleccionadas al azar y encuentra 4 defectuosas.
(A) Si la afirmación del fabricante fuera cierta, y podemos suponer independencia en la fabricación de los componentes, ¿cuál es la probabilidad de lo ocurrido al comprador?
(B) A la vista del resultado anterior, ¿crees que el fabricante está en lo cierto?

6 Suponiendo que es igualmente probable nacer en cualquier mes del año y los nacimientos son independientes, calcula la probabilidad de que el cumpleaños de 5 personas ocurra:
(A) En el mes de enero.
(B) En el mismo mes.
(C Entre enero y marzo.
(D) En el mismo trimestre.
(E) En enero o en febrero o en marzo.
(F) Entre enero y febrero, pero de forma que queden libres exactamente 10 meses.

7 En una reunión hay 10 hombres y 15 mujeres. Elegimos al azar a 5 personas. Calcula la probabilidad de que:
(A) Haya 2 hombres entre las personas elegidas.
(B) Haya por lo menos 3 hombres entre las personas elegidas.
(C) Haya algún hombre entre las personas elegidas.
(D) Calcula también el número medio de hombres entre las 5 personas elegidas.

8 Supongamos que la probabilidad de que una persona contrate una póliza de seguro después de la visita de un agente es constante e igual a 0.05.
(A) Calcula la probabilidad de que tras visitar a 10 personas distintas, que no se conocen, el agente haya contratado por lo menos una póliza de seguro.
(B) ¿Cuántas visitas tendrá que realizar el agente para que la probabilidad de contratar por lo menos una póliza sea de 0.9?

9 Extraemos sin reemplazo (hazlo también con reemplazo) 3 cartas de una baraja española. Calcula las probabilidades de:

(A) Obtener dos copas. (B) Obtener alguna copa.
(C) Obtener un oro. (D) Obtener dos copas y un oro.
(E) Obtener más de un oro. (F) Obtener un oro, una copa y un basto.

10 Un juego de azar consiste en lanzar 3 monedas, si salen 3 caras o 3 cruces se ganan 18 euros, y si se obtiene cualquier otro resultado se pagan 6 euros. ¿Es equitativo el juego? (Un juego es equitativo si la media es nula).

11 Una pista deportiva esta iluminada por 20 focos luminosos que funcionan de forma independiente. Cada foco tiene una probabilidad p = 0.01 de fundirse en una jornada. Calcula la probabilidad de que durante una jornada:
(A) No se funda ningún foco. (B) Se funda algún foco. (C) Se fundan más de 2 focos.

12 Extraemos sin reemplazo 3 cartas de una baraja española. Calcula la función de cuantía, la esperanza y la varianza de las variables siguientes:
(A) X: “número de copas obtenido”. (B) Y: “número de sotas obtenido”.

13 Una máquina produce un tipo de artículos de forma independiente. Se sabe, por larga experiencia, que la calidad de fabricación (proporción de artículos defectuosos fabricados) de un determinado producto es p = 0.1. Para controlar la calidad se interrumpirá el proceso de fabricación si al inspeccionar 10 artículos, tomados al azar, se encuentran por lo menos 2 defectuosos.
(A) Calcula la probabilidad de encontrar 3 artículos defectuosos en los 10 inspeccionados.
(B) Calcula la probabilidad de que la producción se interrumpa.
(C) Si la calidad cambia a p = 0.3 y se inspeccionan 10 artículos después del cambio, ¿cuál es la probabilidad de que la producción se interrumpa?

14 Una máquina fabrica artículos de forma independiente. La probabilidad de que un artículo resulte defectuoso es p = 0.01.
(A) Calcula la probabilidad de encontrar algún artículo defectuoso al inspeccionar 10 artículos de la producción.
(B) Calcula el número de artículos que hay que inspeccionar para que la probabilidad de encontrar alguno defectuoso sea de al menos 0.95.

15 Un examen versa sobre 10 temas. Consiste en elegir dos temas al azar a los que se debe responder. Un tema bien resuelto vale 10 puntos, uno regularmente resuelto vale 5 y uno mal resuelto vale 0 puntos. Un estudiante se prepara perfectamente 5 temas, regularmente 3 y los otros dos no los prepara. Definimos la variable aleatoria X: "puntuación obtenida en el examen". Calcula los valores posibles de X, sus probabilidades y la nota que espera obtener.

16 Una caja contiene 9 bolas blancas y una bola roja. Calcula el número medio de extracciones (sin reemplazo) hasta obtener la bola roja.

17 Dos personas juegan a cara y cruz, y han convenido en continuar la partida hasta que tanto la cara como la cruz hayan aparecido por lo menos 3 veces. Calcula la probabilidad de que el juego no se acabe cuando han realizado 10 tiradas.

18 Supongamos que para personas de una determinada edad, la probabilidad de que mueran por una enfermedad contagiosa es 0.001. ¿Cuántas personas de este grupo pueden exponerse a la enfermedad de manera que la probabilidad de que ninguna persona muera sea de por lo menos 0.95?

19 Un lote de 30 bombillas contiene 2 defectuosas. Se obtiene una muestra aleatoria sin reemplazo de tamaño 5.
(A) Calcula la probabilidad de que la muestra contenga por lo menos una bombilla defectuosa.
(B) Calcula el número n de bombillas que habrá que inspeccionar para que la probabilidad de encontrar por lo menos una bombilla defectuosa sea de 0.8.

20 Un padre tiene en su cartera 5 billetes de 10 €, 4 de 20 € y uno de 500 €. Coge un billete al azar y se lo da a su hijo. Calcula la cantidad que espera recibir su hijo.

21 Repite la pregunta anterior si el padre da dos billetes al azar a su hijo.

22 Un examen tipo test consta de 10 preguntas con 4 alternativas cada una, de las que solo una es correcta. Un estudiante decide responder todas las preguntas al azar.
(A) Calcula el número de preguntas que espera acertar y el de preguntas que espera fallar, y la varianza del número de aciertos y del número de fallos.
(B) Si la puntuación del examen es igual al número de aciertos menos un tercio del número de fallos, calculamos la probabilidad de obtener al menos 5 puntos y el número de puntos que esperamos obtener.

Soluciones de las actividades del capítulo 3

1. (A) $\{X > 8\} = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} = \{X = 9\} \cup \{X = 10\} \cup \{X = 11\} \cup \{X = 12\}$. (B) $\{4 \le X \le 6\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} = \{X = 4\} \cup \{X = 5\} \cup \{X = 6\}$. (C) $\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\} = \{4 < X < 6\} = \{X = 5\}$. (D) $\{X < 3.5\} = \{X \le 3\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$. **2.** (A) $\{3 \le X \le 5\}$. (B) $\{X \le 3\}$. (C) $\{3 \le X \le 4\}$. (D) $\varnothing$.

3. $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$; $R_X = \{0, 1, 2\}$; $\{X = 0\} = \{KK\}$, $\{X = 1) = \{CK, KC\}$, $\{X = 2\} = \{CC\}$.

4. (A) $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(X = n) = \frac{1}{4}$, con n = 1, 2, 3, 4. (B) $R_X = \{1, 2, 3\ldots\}$, $P(X = n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$, n = 1, 2, 3....

5. (A) p = 15. (B) $\frac{3}{15}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{14}{15}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{6}{15}$. **6.** 0.5 €. **7.** 0 €. **8.** 2. **9.** (A) 3. (B) 2.

10. P(X = n) = 1/6, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6; E(X) = 7/2; Var(X) = 35/12.

11.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/16	2/16	5/16	5/16	2/16	1/16

E(X) = 7/2, Var(X) = 3/2.

12.

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

y	1	2	3	4	5
P(Y = y)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

E(X) = E(Y) = 3, Var(X) = 2, Var(Y) = 6/5. **13.** $P(X = 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0.21875$, E(X) = 4, Var(X) = 2.

14. (A) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^8 = 0.0746$. (B) $P(X \ge 1) = 1 - 0.95^{10} = 0.401263$. (C) $P(X > 1) = 0.0861383$.

15. $\frac{106}{1024}$. **16.** (A) $0.6^{10} = 0.006$. (B) $\binom{10}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^8 = 0.0106$. (C) $1 - 0.4^{10} = 0.9999$. (D) 0.9877.

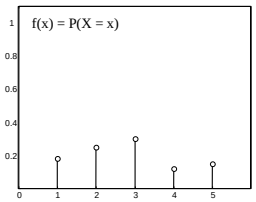
17. $P = 1 - \sqrt[10]{0.1}$. **18.** (A) $0.8^{10} = 0.1074$. (B) $\binom{10}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^7 = 0.2013$. (C) 0.8926. (D) 0.9998.

19. (A) 0.3854. (B) 0.026. (C) 0.2082. **20.** (A) 0.0047. (B) 0.0565. (C) 0.3012. (D) 0.6989. **21.** 0.0186.

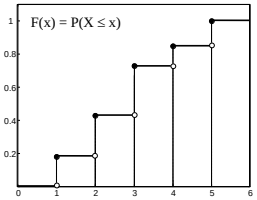
22. (A) 0.4481. (B) 0.1883. (C) 0.6615.

Soluciones de los problemas del capítulo 3

1. (A) m = 0.15. (B) E(X) = 2.81; Var/X) = 1.6539. (B) $P(X \le 1) = 0.18$; $P(X \le 2) = 0.43$; $P(X \le 3) = 0.73$; $P(X \le 4) = 0.85$; $P(X \le 1) = 1$.



(E) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.18 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0.43 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0.73 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0.85 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$



2. (A) 0.3456. (B) 0.9222. (C) 0.3174. (D) 0.0518. **3.** (A) 0.3185. (B) 0.306. **4.** (A) 0.59049. (B) 0.91854. (C) 0.99999. **5.** (A) 0.0133. (B) No. **6.** (A) $\left(\frac{1}{12}\right)^5$. (B) $\left(\frac{1}{12}\right)^4$. (C) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$. (D) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$. (E) $3\left(\frac{1}{12}\right)^5$. (F) $\left(\frac{1}{6}\right)^5 - 2\left(\frac{1}{12}\right)^5$ **7.** (A) 0.3854. (B) 0.3012. (C) 0.9435. (D) 2. **8.** (A) 0.4013. (B) 45. **9.** (A) 0.1366 (0.1406). (B) 0.5891 (0.5781). (C) 0.4403 (0.4219). (D) 0.0455 (0.0469). (E) 0.1488 (0.1562). (F) 0.1012 (0.0937). **10.** Sí. **11.** (A) 0.8179. (B) 0.1821. (C) 0.001.

12. (A)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.4109	0.4403	0.1366	0.0121

E(X) = 3/4.

(B)

y_i	1	2	3	4
$f(y_i)$	0.7227	0.2551	0.0219	0.0004

E(Y) = 3/10.

13. (A) 0.0574. (B) 0.2639. (C) 0.8507. **14.** (A) 0.0956. (B) 299.

15.

y_i	20	15	10	5	0
$f(y_i)$	10/45	15/45	13/45	6/45	1/45

E(X) = 13.

16. 5.5. **17.** $\frac{7}{64}$. **18.** 51. **19.** (A) 0.3103. (B) Al menos 17. **20.** 63 €. **21.** 126 €. **22.** (A) E(A) = 2.5, E(F) = 7.5; Var(A) = Var(F) = 1.875. (B) $P(P \ge 5) = 0.0035$; E(P) = 0.