Matemàtiques per a batxillerat

Matemàtiques per a batxillerat és el resultat de molta il·lusió, treball, temps i gran experiència docent. Conté tots els coneixements matemàtics necessaris per a emprendre els estudis de Grau de qualsevol Universitat.

Aquest projecte consta dels llibres de matemàtiques de primer i segon de les modalitats de batxillerat de Ciències i Tecnologia i de Ciències socials, segons els continguts curriculars que actualment s'estudien a l'estat espanyol, i estan distribuïts en 3 volums per a cada curs:

	Primer curs	Segon curs
Modalitat de Ciències i Tecnologia	Àlgebra i Geometria	Àlgebra lineal i Geometria
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Estadística	Càlcul de probabilitats
Modalitat de Ciències socials	Àlgebra	Àlgebra lineal
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Càlcul de probabilitats i Estadística	Càlcul de probabilitats i Inferència estadística

Contingut de Matemàtiques per a batxillerat

- **Tot el currículum** dels batxillerats de l'estat espanyol.
- Més de 1 500 **exemples resolts** dels epígrafs importants.
- Més de 8 000 problemes entre **activitats i exercicis** proposats.
- Totes les activitats i exercicis proposats tenen la **solució** al final del capítol corresponent.

Estructura i concepció del llibre Matemàtiques per a batxillerat

Cada parella de pàgines consecutives (8 i 9, 10 i 11...) **es conceben com una porció tancada** del capítol; cap concepte quedarà a mig fer, i conté exemples resolts i activitats per a resoldre.

Mai hi ha text vertical paral·lel. Sempre es llegeix de dalt a baix, sense distraccions.

Per a facilitar l'estudi distingim amb formes i colors:

- **Definicions**: Sempre amb quadres de color verd, sense farcit.
- **Propietats i teoremes**: Sempre amb quadres amb farcit de color verd. Quan hem cregut convenient incloure la demostració d'alguna propietat ho fem fora del quadre, ressaltada per l'esquerra amb una barra vertical de color verd.
- **Exemples resolts**: És el més abundant al llarg del llibre; resolts amb detall, perquè l'alumne puga dependre d'ells. Molts són aplicacions a altres ciències, com la Física, Biologia, Economia, Topografia, per citar les més aplicades. Van ressaltats per l'esquerra amb una barra groga, i numerats per capítol.
- **Activitats proposades**: Almenys al finalitzar cada parella de pàgines (10 i 11, 12 i 13...) incloem un quadre farcit de color taronja amb activitats numerades per capítol i relacionades amb la teoria explicada en aquestes pàgines i els exemples allí resolts.
- **Problemes de recapitulació**: A més, al finalitzar cada capítol afegim una àmplia col·lecció de problemes proposats per a acabar d'assolir els conceptes del capítol.
- **Solucions**: Cada capítol acaba amb les solucions de totes les activitats i de tots els problemes proposats en ell.

És un procés d'assimilació dels elements conceptuals necessaris per a interpretar, enunciar i resoldre els problemes que planteja l'estudi dels fenòmens propis de les diverses ciències. El coneixement matemàtic s'organitza en forma de sistema deductiu, de manera que definicions, postulats, propietats, teoremes i mètodes s'articulen lògicament per a donar validesa a les intuïcions i a les tècniques matemàtiques. Tot aquest procés culmina en els exemples i problemes.

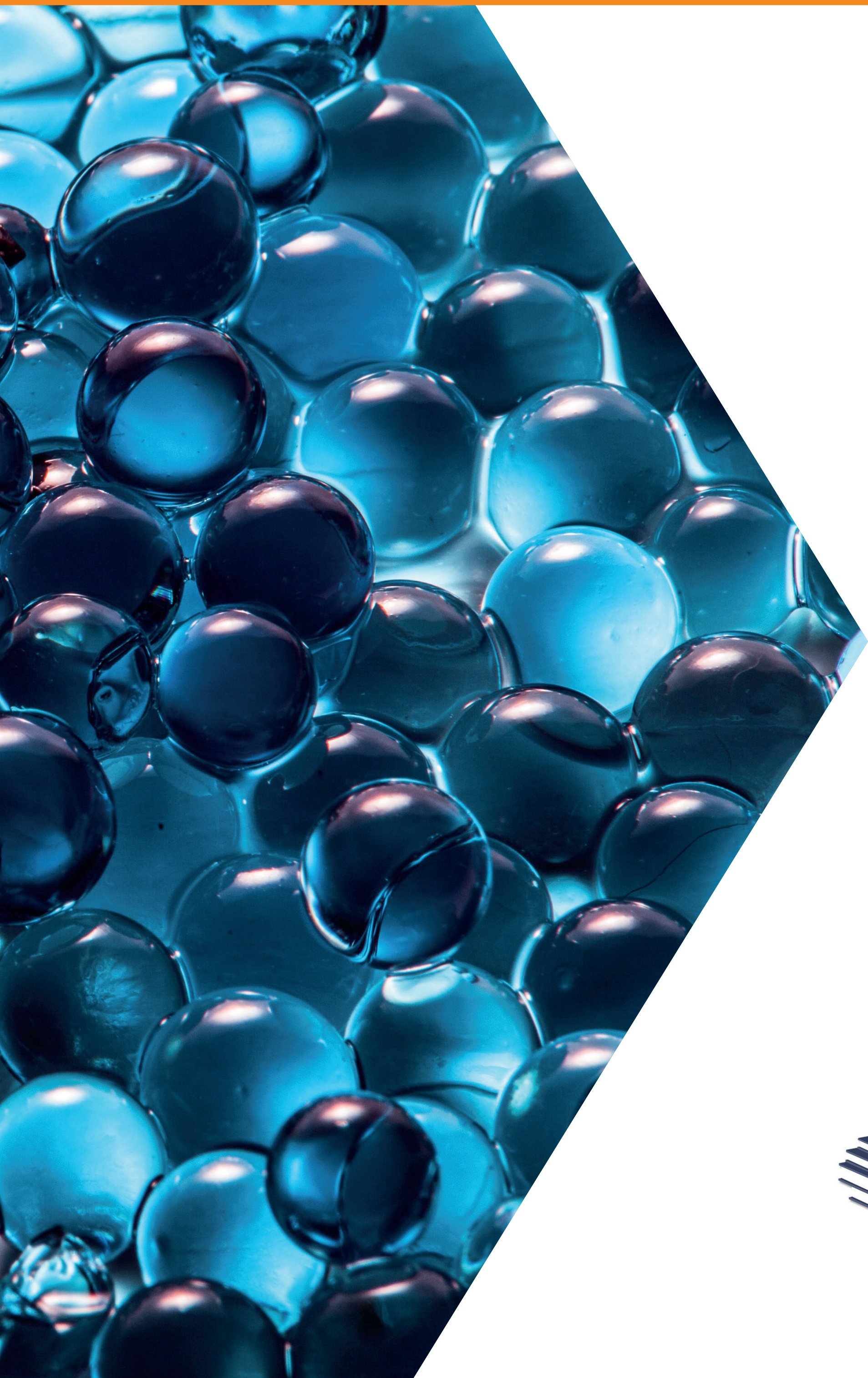
El llenguatge formal s'introdueix lentament, però resulta imprescindible per a no perdre la línia conductora de la solució del problema. Incloem demostracions d'algunes propietats sempre que siguen adequades al nivell, encara que no són necessàries per al desenvolupament del text.

1 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Àlgebra



educàlia editorial

1 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Àlgebra

educàlia editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-09-1

Depòsit legal: V-3245-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Tots els drets reservats. No està permesa la reimpressió de cap part d'aquest llibre, ni d'imatges ni de text, ni tampoc la seva reproducció, ni utilització, en qualsevol forma o per qualsevol mitjà, ja sigui electrònic, mecànic o d'una altra manera, tant coneguda com els que puguin inventar-se, incloent el fotocopiat o gravació, ni està permès emmagatzemar-lo en un sistema d'informació i recuperació, sense el permís anticipat i per escrit de l'editor.

Alguna de les imatges que inclou aquest llibre són reproduccions que s'han realitzat acollint-se al dret de cita que apareix en l'article 32 de la Llei 22/18987, de l'11 de novembre, de la Propietat intel·lectual. Educàlia Editorial agraeix a totes les institucions, tant públiques com privades, citades en aquestes pàgines, la seva col·laboració i demana disculpes per la possible omissió involuntària d'algunes d'elles.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 2

Polinomis

2.1 Expressions algebraiques

Qualsevol algoritme matemàtic que puga generalitzar una sèrie d'operacions utilitza lletres per a la seua expressió. Cada lletra utilitzada representa una magnitud numèrica distinta; per exemple l'expressió:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

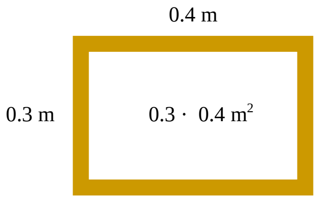
és la coneguda fórmula de l'àrea d'un trapezi: “L'àrea A és igual a la semisuma de la base major i la base menor multiplicada per l'altura”. Al substituir B, b i h per valors numèrics obtenim el valor de l'àrea del trapezi amb aquestes magnituds:

$$\text{si} \quad B = 5,\ b = 3\ \text{i}\ h = 4 \quad \rightarrow \quad A = \frac{5+3}{2} \cdot 4 = 16$$

Les lletres B, b, h i A reben el nom de ***variables***. Les expressions que involucren a una o diverses variables s’anomenen ***expressions algebraiques***. En el següent exemple efectuem amb elles operacions com amb els nombres, perquè simplement els representen.

Exemple 1

En una botiga es cobra per la construcció d'un quadre per a fotografies 5 € pel treball, 10 € per metre de longitud de marc i 10 € per metre quadrat d'àrea de cristall.



- Què costarà un quadre de 30 × 40 cm?

  El perímetre del marc és (2 · 0.3 + 2 · 0.4) metres.

  L’àrea del cristall és $0.3 \cdot 0.4\ m^2$.

  El preu total és

  $$\mathbf{P} = 10 \cdot (0.3 \cdot 0.4) + 10 \cdot (2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4) + 5 = 1.2 + 14 + 5 = \mathbf{20.2}\ €$$

- Què costarà un quadre de 40 × 50 cm?

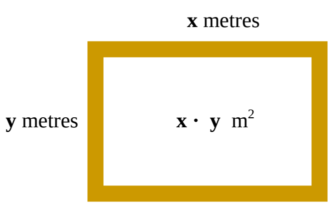
  El perímetre del marc és (2 · 0.4 + 2 · 0.5) metres.

  L’àrea del cristall és $0.4 \cdot 0.5\ m^2$.

  El preu total és

  $$\mathbf{P} = 10 \cdot (0.4 \cdot 0.5) + 10 \cdot (2 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.5) + 5 = 2 + 18 + 5 = \mathbf{25}\ €$$

- Si fem abstracció i anomenem **x** i **y** a les longituds dels costats del quadre, obtenim una ***expressió algebraica*** que ens ajuda a efectuar els càlculs del preu en cada cas particular.



  $$P = 10 \cdot (x \cdot y) + 10 \cdot (x + x + y + y) + 5$$

  Podem agrupar els termes iguals:

  $$P = 10xy + 10(2x + 2y) + 5$$

  $$\mathbf{P = 10xy + 20x + 20y + 5}$$

  No podem reduir més l'expressió perquè les magnituds **x**, **y**, **xy** són distintes ja que representen a nombres en principi diferents.

  L'expressió algebraica anterior s'anomena també ***polinomi*** o ***funció polinòmica en les variables*** **x** i **y**. Permet obtenir el preu **P** en funció de les longituds **x** i **y** dels costats:

  $$\text{si} \quad \mathbf{x = 0.3},\ \mathbf{y = 0.4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 20 \cdot 0.3 + 20 \cdot 0.4 + 5 = 1.2 + 6 + 8 + 5 = \mathbf{20.2}$$

  $$\text{si} \quad \mathbf{x = 0.4},\ \mathbf{y = 0.5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 20 \cdot 0.4 + 20 \cdot 0.5 + 5 = 2 + 8 + 10 + 5 = \mathbf{25}$$

Exemple 2

Suposem que el propietari de la botiga de l'exemple anterior vol una expressió algebraica que proporcione el preu de quadres quadrats per a facilitar el càlcul als seus empleats. Si fem x = y en l'anterior expressió algebraica obtenim

$$\left.\begin{array}{c} P = 10xy + 20x + 20y + 5 \\ x = y \end{array}\right\} \rightarrow \quad P = 10x \cdot x + 20x + 20x + 5$$

Agrupem i expressem de forma més simple:

$$\mathbf{P = 10x^2 + 40x + 5}$$

Aquesta última expressió s'anomena ***polinomi*** o ***funció polinòmica en la variable*** **x**. Proporciona el preu d'un quadre quadrat en funció de la longitud **x** del costat.

Si $x = 0.4 \rightarrow P = 10 \cdot 0.4^2 + 40 \cdot 0.4 + 5 = 1.6 + 16 + 5 = 22.6$

Si $x = 0.5 \rightarrow P = 10 \cdot 0.5^2 + 40 \cdot 0.5 + 5 = 2.5 + 20 + 5 = 27.5$

Si $x = 0.6 \rightarrow P = 10 \cdot 0.6^2 + 40 \cdot 0.6 + 5 = 3.6 + 24 + 5 = 32.6$

- Si volem gastar 100 €, quina serà la longitud del quadre quadrat?

  Ens preguntem pel valor de x per al qual P = 100. Es tracta de resoldre una equació polinòmica de grau 2, de la qual coneixem una fórmula que ens dóna les solucions:

$$10x^2 + 40x + 5 = 100 \rightarrow 10x^2 + 40x - 95 = 0 \rightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-95)}}{2 \cdot 10} = \frac{-40 \pm \sqrt{5400}}{20}$$

  Aquesta equació només té una solució positiva $\mathbf{x = \frac{-40 + 30\sqrt{6}}{20} \simeq 1.67}$

  Un quadre quadrat de 1.67 m de costat costa aproximadament 100 €.

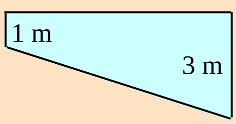
En aquest capítol desenvolupem l'Àlgebra de polinomis i alguna de les seues aplicacions, com és el cas de la resolució d'equacions algebraiques.

1 Per a veure un espectacle hi ha 3 tipus d'entrades, i es ven cadascuna a 5, 10 i 15 euros respectivament. Obtén una expressió algebraica que proporcione la recaptació total per la venda de **x** entrades de 5 euros, **y** entrades de 10 euros i **z** entrades de 15 euros.

2 Obtén una expressió algebraica que proporcione el capital acumulat per una persona després d'invertir durant un any x euros al 10% d'interés anual. I després de 2 anys si el benefici s'acumula al final de cada any? I després de 3 anys?

3 Si anomenem n al nombre d'anys en què una persona té invertit un capital de x euros al 10% anual, obtén una expressió algebraica que proporcione el capital acumulat transcorreguts els n anys. Quants anys hauran de passar perquè obtinga el doble del capital inicial?

4 Una piscina té una longitud de 20 metres. La seua profunditat mínima és d'un metre i la màxima és de 3 metres.



(A) Quina longitud té el fons de la piscina? I si la piscina té 40 metres de longitud?

(B) Si anomenem x a la longitud de la piscina, obtén una expressió algebraica que proporcione la longitud del fons de la piscina.

5 Una empresa compra tres productes, A, B i C a 4, 6, i 12 euros la unitat respectivament. Troba una expressió que permeta trobar el valor de les compres en funció de la quantitat de cada tipus de producte.

2.2 Polinomis en una variable

Anomenem ***polinomi*** o ***funció polinòmica en la variable*** **x** a l'expressió algebraica:

$$\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + ... + a_nx^n}$$

on $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$ són nombres reals, que anomenem ***coeficients***, i els exponents de x són nombres naturals. El major dels exponents **n** indica el ***grau del polinomi***.

El coeficient $\mathbf{a_0}$ s'anomena ***terme independent*** del polinomi P(x) i $\mathbf{a_n}$ ***coeficient principal o director***.

Cadascun dels termes $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1x}$, $\mathbf{a_2x^2}$, **...,**$\mathbf{a_nx^n}$ rep el nom de ***monomi*** (polinomi d'un únic terme). Els monomis anteriors tenen graus 0, 1, 2, ..., n, respectivament.

Exemple 3

El polinomi $P(x) = 2 + 3x + 5x^2 - x^3$ té 4 monomis:

$m_1(x) = 2$, monomi de grau 0 amb coeficient 2 (pensa que $2 = 2x^0$).

$m_2(x) = 3x$, monomi de grau 1 amb coeficient 3.

$m_3(x) = 5x^2$, monomi de grau 2 amb coeficient 5.

$m_3(x) = -x^3$, monomi de grau 3 amb coeficient –1.

El terme independent del polinomi és 2, el coeficient principal –1 i el grau del polinomi és 3.

L'ordre de col·locació dels termes del polinomi no importa. Les següents expressions representen el mateix polinomi:

$$3x + 1 - x^3 + 5x^2 \qquad\qquad 5x^2 + 1 - x^3 + 3x$$

No obstant això, els termes del polinomi seran ordenats generalment de major a menor grau. En aquest cas:

$$\mathbf{P(x) = -x^3 + 5x^2 + 3x + 1}$$

Igualtat de polinomis

Direm que dos polinomis són ***iguals*** si tenen el mateix grau i tots els termes (monomis) d'igual grau tenen idèntics coeficients.

El polinomi $P(x) = ax^4 + 6x^3 - x - 2$ és igual a $Q(x) = 3x^4 + bx^3 + cx^2 - x + d$ únicament si

$$a = 3,\ \ b = 6,\ \ c = 0\ \text{ i }\ d = -2.$$

La lletra de la variable no importa ja que en realitat representa a nombres reals. Per exemple, els polinomis $P(x) = x^2 - 3x + 5$ i $P(y) = y^2 - 3y + 5$ són iguals.

6 Indica el valor dels termes independents i dels coeficients directors dels polinomis

$$P(x) = 4x^5 + 3x^2 - 2x - 3 \qquad Q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 4 \qquad R(x) = x^6 - x^4$$

7 Troba el valor de a, b i c perquè els següents polinomis siguen iguals:

$$P(x) = 2x + ax^2 + x^3 + bx^4 \qquad Q(x) = c + 2x - 4x^2 + x^3 - 3x^4$$

2.3 Suma, diferència i producte de polinomis

- ***La suma de dos polinomis*** és un altre polinomi que s'obté sumant els monomis del mateix grau (anomenats monomis semblants) d'aquests dos polinomis, segons l'expressió:

$$\mathbf{ax^m + bx^m = (a + b)x^m}$$

- ***La diferència de polinomis*** s'efectua restant els monomis semblants:

$$\mathbf{ax^m - bx^m = (a - b)x^m}$$

- ***El producte de dos polinomis*** és un altre polinomi que s'obté multiplicant cada monomi del primer polinomi per tots els monomis del segon i sumant a continuació els monomis semblants. Els monomis es multipliquen amb l'expressió:

$$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)(x^n \cdot x^m) = abx^{n+m}}$$

Exemple 4

- La suma i diferència dels monomis semblants $M(x) = 2x^2$ i $N(x) = 5x^2$ són

$$\mathbf{M(x) + N(x)} = 2x^2 + 5x^2 = (2 + 5)x^2 = \mathbf{7x^2} \qquad \mathbf{M(x) - N(x)} = 2x^2 - 5x^2 = (2 - 5)x^2 = \mathbf{-3x^2}$$

- La suma i diferència dels polinomis $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$ i $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x$ són

$$\mathbf{P(x) + Q(x)} = (2x^3 - x^2 + 3x - 2) + (-2x^3 + 3x^2 - 2x) = (2 - 2)x^3 + (-1 + 3)x^2 + (3 - 2)x - 2 =$$
$$= 0x^3 + 2x^2 + x - 2 = \mathbf{2x^2 + x - 2}$$
$$\mathbf{P(x) - Q(x)} = (2x^3 - x^2 + 3x - 2) - (-2x^3 + 3x^2 - 2x) = (2 + 2)x^3 + (-1 - 3)x^2 + (3 + 2)x - 2 =$$
$$= \mathbf{4x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

- El producte dels monomis $M(x) = 5x^3$ i $N(x) = -2x^4$ és

$$\mathbf{M(x) \cdot N(x)} = (5x^3) \cdot (-2x^4) = -10x^{3+4} = \mathbf{-10x^7}$$

- El producte dels polinomis $P(x) = (2x^2 - 3)$ i $Q(x) = x^2 + 2x - 5$ és

$$\mathbf{P(x) \cdot Q(x)} = (2x^2 - 3)(x^2 + 2x - 5) = 2x^2(x^2 + 2x - 5) - 3(x^2 + 2x - 5) =$$
$$= 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 3x^2 - 6x + 15 = \mathbf{2x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 6x + 15}$$

8 Efectua les següents operacions amb monomis o binomis:

(A) $3x^2 + 8x^2 - 2x^2$ (B) $3x^2 \cdot 5x$ (C) $-2x^3 \cdot (-5x^3)$ (D) $4x^5 - 2x^3 \cdot 2x^2$

(E) $2x^3(x^2 - 2)$ (F) $x(2x + 5)$ (G) $-3x^5(3x^2 - 2x - 6)$ (H) $2x(2x - 2) - x(4x - 4)$

9 Donats els polinomis $P(x) = 2x^2 + x - 1$ i $Q(x) = x^2 - x + 2$, calcula:

(A) $P(x) + Q(x)$ (B) $P(x) - Q(x)$ (C) $P(x) \cdot Q(x)$

10 Donats els polinomis $P(x) = x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x - 1$ i $R(x) = x^2 - x - 1$, efectua les operacions següents, per a comprovar la validesa de les propietats:

(A) **Propietat associativa del producte:** $P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)] = [P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x)$.

(B) **Propietat distributiva del producte respecte de la suma:** $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$.

2.4 Potències naturals de polinomis

La potència enèsima d'un polinomi és el producte del polinomi per ell mateix n vegades:

$$\left(\mathbf{P(x)}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{P(x)\cdot P(x)\cdot \overset{(n\ vegades)}{.....}\cdot P(x)}$$

En el cas de la potència d'un monomi tenim, per les propietats de les potències:

$$\left(\mathbf{ax^m}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n}\left(\mathbf{x^m}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n x^{nm}}$$

- $\left(2x^3\right)^4 = 2x^3\cdot 2x^3\cdot 2x^3\cdot 2x^3 = 2^4\left(x^3\right)^4 = \mathbf{16x^{12}}$
- $\mathbf{(2x^2+3)^2 =} (2x^2+3)\cdot(2x^2+3) = 4x^4+6x^2+6x^2+9 = \mathbf{4x^4+12x^2+9}$

Les següents fórmules són de gran aplicació en els productes i potències de polinomis:

(1) Quadrat d'una suma: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(2) Cub d'una suma: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(3) Suma per diferència és igual a diferència dels quadrats: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(4) Quadrat d'un trinomi: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(1) $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \mathbf{a^2+2ab+b^2}$

(2) $\mathbf{(a+b)^3} = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

(3) $\mathbf{(a+b)(a-b)} = a^2+ab-ba+b^2 = \mathbf{a^2-b^2}$

(4) $\mathbf{(a+b+c)^2} = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

- $\mathbf{(2x^2+3)^2 =} (2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot 3+3^2 = \mathbf{4x^4+12x^2+9}$
- $\mathbf{(2x^2-3)^2 = (2x^2+(-3))^2 =} (2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot(-3)+(-3)^2 = \mathbf{4x^4-12x^2+9}$
- $\mathbf{(2x^2+5)^3 =} (2x^2)^3+3(2x^2)^2\,5+3\cdot 2x^2\cdot 5^2+5^3 = 8x^6+3\cdot 4x^4\cdot 5+150x^2+5^3 = \mathbf{8x^6+60x^4+150x^2+125}$
- $\mathbf{(2x^2-5)^3 = (2x^2+(-5))^3 =} (2x^2)^3+3(2x^2)^2(-5)+3\cdot 2x^2(-5)^2+(-5)^3 = 8x^6+3\cdot 4x^4(-5)+150x^2+(-5)^3$
  $= \mathbf{8x^6-60x^4+150x^2-125}$
- $\mathbf{(2x+x^3)(2x-x^3)} = (2x)^2-(x^3)^2 = \mathbf{4x^2-x^6}$
- $\mathbf{(x^2+2x-1)^2 =} (x^2)^2+(2x)^2+(-1)^2+2\cdot x^2\cdot 2x+2\cdot x^2\cdot(-1)+2\cdot 2x\cdot(-1) = x^4+4x^2+1+4x^3-2x^2-4x$
  $= \mathbf{x^4+4x^3+2x^2-4x+1}$

11 Efectua els següents productes de polinomis, simplificant el resultat en la mesura que es puga:

(A) $(3x^2+2)(3x^2+2)$ (B) $(3x^2-2)(3x^2-2)$ (C) $(3x^2-2)(3x^2+2)$ (D) $(5x-4)\cdot(5x+4)$

(E) $(2x^3-3x-1)\cdot(x^2+3x+2)$ (F) $(-x^4+2x^3-3x+4)\cdot(-x^3+x^2-3)$

12 Calcula les següents potències de polinomis:

(A) $(2x+3)^2$ (B) $(2x-3)^2$ (C) $(x^2+1)^2$ (D) $(x^2-1)^2$ (E) $(2x^2)^4 - (4x^4)^2$

(F) $(x^2+x+1)^2$ (G) $(x+1)^3$ (H) $(x-1)^3$ (I) $(x+1)^4$ (J) $(x-1)^4$

➢ Binomi de Newton

El ***binomi de Newton*** és una fórmula que permet trobar les potències naturals de qualsevol binomi.

No deduïm en aquests moments el desenvolupament de la fórmula, però indiquem la seua evidència que, a més, suggereix la manera més fàcil de recordar-la.

Exposem les potències 0, 1, 2, 3 i 4 d'un binomi:

Potència 0:	$(\mathbf{a+b})^0 =$	$\mathbf{1}$
Potència 1:	$(\mathbf{a+b})^1 =$	$\mathbf{1a + 1b}$
Potència 2:	$(\mathbf{a+b})^2 =$	$\mathbf{1a^2 + 2ab + 1b^2}$
Potència 3:	$(\mathbf{a+b})^3 =$	$\mathbf{1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3}$
Potència 4:	$(\mathbf{a+b})^4 =$	$\mathbf{1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

...

Observa les potències decreixents de a i creixents de b en cadascun dels termes i la seqüència dels coeficients d'aquests termes, que anomenem ***nombres combinatoris***, i que expressem per

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!\,(n-k)!}} \quad \text{on} \quad \begin{cases} \text{n indica la potencia a calcular} \\ \text{k indica el terme dins de cada potencia,} \quad 0 \le k \le n \end{cases}$$

trobats, de mode pràctic, amb l'anomenat ***triangle de Tartaglia*** del quadre anterior.

D'aquesta manera l'expressió de la fórmula del binomi de Newton és

$$\mathbf{(a+b)^n} = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Exemple 5

$\mathbf{(3x-2)^5 = (3x+(-2))^5 =}$

$$= \binom{5}{0}(3x)^5(-2)^0 + \binom{5}{1}(3x)^{5-1}(-2)^1 + \binom{5}{2}(3x)^{5-2}(-2)^2 + \binom{5}{3}(3x)^{5-3}(-2)^3 + \binom{5}{4}(3x)^{5-4}(-2)^4 + \binom{5}{5}(3x)^{5-5}(-2)^5 =$$

$$= \mathbf{1}\,(3x)^5(-2)^0 + \mathbf{5}\,(3x)^4(-2)^1 + \mathbf{10}\,(3x)^3(-2)^2 + \mathbf{10}\,(3x)^2(-2)^3 + \mathbf{5}\,(3x)^1(-2)^4 + \mathbf{1}\,(3x)^0\,2^5 =$$

$$= 3^5x^5 - 5\cdot 3^4\cdot 2\,x^4 + 10\cdot 3^3\cdot 2^2\,x^3 - 10\cdot 3^2\cdot 2^3\,x^2 + 5\cdot 3\cdot 2^4\,x - 2^5 =$$

$$= \mathbf{243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32}$$

13 Calcula les següents potències de binomis:

(A) $(3x+2)^3$ (B) $(2x-1)^4$ (C) $(x^2-2)^4$ (D) $(x+1)^5-(x-1)^5$

(E) $(x+3)^6$ (F) $(2x-4)^5$ (G) $(x^3+3x)^4$ (H) $\left(\frac{1}{2}x^2+2x^3\right)^4$

14 Obtén el terme de grau indicat en el següents binomis:

(A) Quatre de $(3x-2)^6$ (B) Tres de $(2x+1)^8$ (C) Dos de $(4x-1)^5$ (D) Deu de $(x^2-4)^{10}$

2.5 Divisió euclidiana de polinomis

La ***divisió entera*** o ***euclidiana*** de polinomis generalitza la mateixa operació existent en els nombres enters. Dividir un nombre enter **D**, anomenat **dividend**, entre un altre nombre enter **d**, anomenat **divisor**, és trobar dos nombres enters **C** i **R**, anomenats respectivament **quocient** i **residu**, que verifiquen:

$$\mathbf{D = d \cdot C + R} \quad \text{sent} \quad \mathbf{R < d}$$

Si R = 0, diem que la divisió és **exacta**. Per exemple:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 2 \cdot 4$$ **divisió entera exacta,** quocient **2** i residu **0**

$$\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad 38 = 7 \cdot 5 + 3$$ **divisió entera no exacta,** quocient **7** i residu **3**

La divisió entera o ***euclidiana*** del polinomi **P(x)**, ***dividend***, entre el polinomi **Q(x)**, ***divisor***, consisteix a obtenir dos polinomis **C(x)** i **R(x),** respectivament ***quocient*** i ***residu***, tal que:

$$\mathbf{P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

sent el grau del residu R(x) menor que el del divisor Q(x).

- Si el residu R(x) = 0 diem aleshores que la ***divisió*** és ***exacta***:

$$\mathbf{P(x) = C(x) \cdot Q(x)}$$

Exemple 6

- La divisió entre dos monomis és sempre exacta, si el grau del dividend és major o igual que el del divisor. Es pot expressar com en la divisió de nombres:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 & 3x^2 \\ \hline 0 & 2x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 7x^3 & 3x^2 \\ \hline 0 & \frac{7}{3}x \end{array}$$

$$6x^3 = 3x^2 \cdot 2x \qquad\qquad 7x^3 = 3x^2 \cdot \frac{7}{3}x$$

- La divisió entre dos monomis no existeix com a operació entre polinomis en altre cas. En el següent exemple, el quocient és 0; no hi ha cap polinomi que al multiplicar-lo per $3x^5$ done com a resultat $6x^3$:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 & 3x^5 \\ \hline 6x^3 & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad 6x^3 = 3x^5 \cdot 0 + 6x^3$$

- La divisió entre un polinomi i un monomi és exacta només si el grau del monomi és menor que el de tots els termes del polinomi. S'efectua dividint terme a terme els monomis del dividend, mentre el seu grau siga menor que el del dividend. Els que no ho compleixen, constitueixen el residu.

$$\begin{array}{c|l} x^3 - 3x^2 + 2x & x \\ \hline 0 & x^2 - 3x + 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 2x & x^2 \\ \hline 2x & x - 3 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) \qquad\qquad x^3 - 3x^2 + 2x = x^2(x - 3) + 2x$$

Divisió exacta: residu 0 | **Divisió entera: residu 2x**

➢ Algorisme de la divisió

La divisió entre dos polinomis es realitza repetint el procés que expliquem en el pròxim exemple mentre el grau de la residu siga major que el grau del divisor:

(1) Ordenem els termes del dividend de major a menor grau, deixant buits si falta algun terme.

(2) Dividim els monomis de major grau del dividend i del divisor (és una divisió exacta). El quocient obtingut es multiplica pel divisor i a continuació es resta del dividend.

(3) Si el residu obtingut és de grau menor que el del divisor, hem acabat la divisió.

(4) Si el residu obtingut no és de grau menor que el del divisor, el residu és considerat com el nou dividend i repetim els passos anteriors.

Exemple 7

Dividim el polinomi $P(x) = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ entre $Q(x) = 2x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +\,4x^3 & +\,5x^2 & +\,3x - 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-6x^4 & & -\,3x^2 & & 3x^2 \\ \cline{1-4}
& 4x^3 & +2x^2 & +\,3x - 1 &
\end{array}
$$

Residu de grau 3: Seguim dividint

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +\,4x^3 & +\,5x^2 & +\,3x - 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-6x^4 & & -\,3x^2 & & 3x^2 + 2x \\ \cline{1-4}
& 4x^3 & +\,2x^2 & +\,3x - 1 & \\
& -\,4x^3 & & -\,2x & \\ \cline{2-4}
& & 2x^2 & +\ x\ -1 &
\end{array}
$$

Residu de grau 2: Seguim dividint

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +\,4x^3 & +\,5x^2 & +\,3x - 1 & 2x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-6x^4 & & -\,3x^2 & & 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{1-4}
& 4x^3 & +\,2x^2 & +\,3x - 1 & \\
& -\,4x^3 & & -\,2x & \\ \cline{2-4}
& & 2x^2 & +\ x - 1 & \\
& & -2x^2 & -\,1 & \\ \cline{3-4}
& & & x - 2 &
\end{array}
$$

Residu de grau 1, menor que el del divisor. Hem acabat la divisió:

El quocient és **$C(x) = 3x^2 + 2x + 1$ i el residu $R(x) = x - 2$**.

Escrivim:

$$\boxed{\mathbf{6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = (2x^2 + 1)(\,3x^2 + 2x + 1) + x - 2}}$$

15 Obtén el quocient i el residu de les següents divisions euclidianes, i expressa el resultat de la divisió en la forma “Dividend és igual a divisor per quocient més residu”:

(A) $P(x) = x^4 + 1$ entre $Q(x) = x^2 + 1$

(B) $P(x) = x^4 + 1$ entre $Q(x) = x^2 - 1$

(C) $P(x) = x^4 - 1$ entre $Q(x) = x^2 + 1$

(D) $P(x) = x^2 + 1$ entre $Q(x) = x^2 - 1$

(E) $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ entre $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

(F) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ entre $Q(x) = x - 1$

(G) $P(x) = 2x^4 + 5x^2 + x + 3$, $Q(x) = 4x^2 + 2$

(H) $P(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$, $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

2.6 Divisió per (x – a): regla de Ruffini

En forma general, al dividir un polinomi P(x) pel polinomi de grau 1 Q(x) = x – a obtenim

$$\mathbf{P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R(x)}$$

Com que $\mathbf{P(x)} = \mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ **és de grau n** sabem que:

- El quocient C(x) és un polinomi de grau n – 1: $\mathbf{C(x)} = \mathbf{c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0}$.
- El residu de la divisió és de grau 0: **R(x) = R**.

A més, les operacions que condueixen a obtenir els coeficients del quocient i residu de la divisió poden ser resumides en el següent tipus de format. Col·loquem en la primera línia els coeficients del dividend (si falta algun monomi, es posa un 0) i el nombre **a**. A la dreta tenim les operacions successives que cal realitzar. És l'anomenada ***regla de Rufinni***:

Coeficients del dividend

$$\text{De } (x - \mathbf{a}) \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a & & a\cdot c_{n-1} & & & a\cdot c_1 & a\cdot c_0 \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 & \boxed{R} \end{array}$$

Coeficients del quocient — Residu

$$\begin{aligned} \mathbf{c_{n-1}} &= \mathbf{a_n} \\ \mathbf{c_{n-2}} &= \mathbf{a_{n-1}} + a \cdot \mathbf{c_{n-1}} \\ &\vdots \\ \mathbf{c_0} &= \mathbf{a_1} + a \cdot \mathbf{c_1} \\ R &= \mathbf{a_0} + a \cdot \mathbf{c_0} \end{aligned}$$

Exemple 8

Obtenim el quocient i el residu de la divisió de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ entre $Q(x) = x - 2$, per mitjà de l'algoritme de la divisió, i amb la regla de Ruffini, acolorint els coeficients coincidents en aquests dos algoritmes:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -\ 1x^2 & +\ 0x & +\ 1 & x - \mathbf{2} \\ \cline{5-5} -2x^3 & +\ 4x^2 & & & 2x^2 + 3x + 6 \\ \cline{1-4} & 3x^2 & +\ 0x & -\ 1 & \\ & -3x^2 & +\ 6x & & \\ \cline{2-4} & & 6x & -\ 1 & \\ & & 6x & +\ 12 & \\ \cline{3-4} & & & 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{13} \end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 1 = (x - \mathbf{2})(\mathbf{2}x^2 + \mathbf{3}x + \mathbf{6}) + \mathbf{13}$$

La regla de Ruffini s'aplica en 4 ràpids passos, fins a obtenir l'expressió anterior:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & \downarrow & & & \\ \hline & \mathbf{2} & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & & 4 & & \\ \hline & 2 & \mathbf{3} & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & & 4 & 6 & \\ \hline & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{6} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 6 & \mathbf{13} \end{array}$$

16 Amb la regla de Ruffini obtén el quocient i el residu de la divisió de $P(x) = x^3 - 3x + 2$ entre els binomis:
(A) (x – 1) (B) (x + 1) (C) (x – 2) (D) (x + 2) (E) x

17 Troba el valor de m perquè al dividir $P(x) = 4x^5 + mx^4 - x + 3$ entre $Q(x) = x - 2$ s'obtinga 3 de residu.

2.7 Valor numèric i arrel d'un polinomi

Considerem el polinomi $\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + ... + a_nx^n}$, i **a** un nombre real.

- Anomenem ***valor del polinomi*** **P(x)** ***en*** **x = a**, que representem per **P(a)**, al nombre que obtenim al substituir en el polinomi la variable x pel nombre a:

$$\mathbf{P(a) = a_0 + a_1a + a_2\,a^2 + ... + a_na^n}$$

- Diem que el nombre real **a** és una ***arrel del polinomi*** **P(x)** si **P(a) = 0**

El valor numèric del polinomi $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ en $x = -1$ és $\mathbf{P(-1) = -3}$, perquè

$$P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 2(-1) + 4 = -1 -4 -2 + 4 = -3$$

Mentre que, com $\mathbf{P(2)} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 8 - 16 + 4 + 4 = \mathbf{0}$, diem aleshores que **el nombre 2 és una arrel del polinomi P(x)**.

➢ Teorema del residu

El residu de la divisió del polinomi **P(x)** pel binomi **x – a** és igual al valor de P(x) en **a**:

P(x)	x – a
R	C(x)

→ **R = P(a)**

Si efectuem la divisió de P(x) per x – a, obtenim

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

i substituint x per a en l'anterior expressió, obtenim:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 \cdot C(a) + R \quad \to \quad \mathbf{P(a) = R}$$

Exemple 9

Donat el polinomi $P(x) = x^5 - 3x^2 - 16x + 12$, calculem el valor numèric en x = 3 i en x = –2, efectuem la divisió de P(x) pels binomis x – 3 i x + 2 amb la regla de Ruffini, i comprovem que el residu d'aquestes divisions coincideix amb els valors numèrics anteriors.

$$\mathbf{P(3)} = 3^5 - 3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 12 = 243 - 27 - 48 + 12 = \mathbf{180}$$

$$\mathbf{P(-2)} = (-2)^5 - 3\cdot(-2)^2 - 16\cdot(-2) + 12 = -32 - 12 + 32 + 12 = \mathbf{0}$$

	1	0	0	–3	–16	12
3		3	9	27	72	168
	1	**3**	**9**	**24**	**56**	**180**

	1	0	0	–3	–16	12
–2		–2	4	–8	22	–12
	1	**–2**	**4**	**–11**	**6**	**0**

18 Obtén el valor numèric de $P(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x - 4$ en $x = \sqrt{2}$ i en $x = -\sqrt{2}$.

19 Troba el valor de m perquè al dividir el polinomi $P(x) = x^3 + mx^2 - 4x - 3$ entre $Q(x) = x + 1$ s'obtinga de residu 5.

20 Troba m i n perquè al dividir el polinomi $P(x) = 2x^4 + mx^3 + 3x^2 + nx + 4$ entre $Q(x) = x - 1$ i entre $R(x) = x + 2$ s'obtinga de residu 7 i 58 respectivament.

2.8 Arrels de polinomis amb coeficients enters

Veurem que és important obtenir les arrels dels polinomis de grau n

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

perquè, si existeixen, són les solucions de l'equació $\mathbf{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}$.

Una conseqüència de l'anomenat ***teorema fonamental de l'Àlgebra*** és que:

"Qualsevol polinomi de grau n té com a màxim n arrels reals"

No hi ha un mètode general per a obtenir les arrels. Els següents teoremes permeten conéixer quins nombres enters o fraccionaris poden ser arrels d'un polinomi que tinga per coeficients nombres enters. També és aplicable als polinomis de coeficients fraccionaris com veiem en l'exemple 12.

➢ Teorema 1. Recerca de les arrels enteres

Donat un polinomi **amb coeficients enters**

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}, \text{ amb } \mathbf{a_0, a_1, .., a_n} \in \mathbb{Z}.$$

Si **a és una arrel entera de P(x)** $\rightarrow$ **a és un divisor de a_0**

Si a és una arrel de P(x) obtenim P(a) = 0, aleshores:

$$a_n a^n + ... + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = 0$$

Aïllem a_0:

$$a_0 = -(a_n a^n + ... + a_2 a^2 + a_1 a) \quad \rightarrow \quad a_0 = -a\,(a_n a^{n-1} + ... + a_2 a + a_1)$$

Si anomenem $b = -(a_n a^{n-1} + ... + a_2 a + a_1)$ obtenim $\mathbf{a_0 = a \cdot b}$.

Necessàriament b és un nombre enter, perquè a és enter i els coeficients $a_1, a_2, ..., a_n$ també.

Com que: $a_0 = a \cdot b$ $\rightarrow$ a_0 és múltiple de a $\rightarrow$ **a és divisor de a_0**

Exemple 10

Obtenim les arrels enteres del polinomi $\mathbf{P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

Com que els coeficients de P(x) són tots enters, el teorema 1 assegura que els únics nombres que poden ser **arrels enteres** de P(x) són els divisors del terme independent $\mathbf{a_0 = 6}$:

divisors de 6: {1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6}

Calculem el valor de P(x) en cadascun dels candidats anteriors:

- Com que $P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 4 \neq 0$ $\rightarrow$ 1 no és arrel de P(x)
- Com que $\mathbf{P(-1)} = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = \mathbf{0}$ $\rightarrow$ **–1 és arrel de P(x)**
- Com que $\mathbf{P(2)} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = \mathbf{0}$ $\rightarrow$ **2 és arrel de P(x)**
- Com que $\mathbf{P(3)} = 3^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = \mathbf{0}$ $\rightarrow$ **3 és arrel de P(x)**

Aleshores **les arrels de P(x)** són els nombres **–1**, **2** i **3**, no sent necessari continuar la recerca perquè el teorema fonamental de l'Àlgebra assegura que un polinomi de grau 3 té com a màxim 3 arrels. Açò vol dir que el valor de P(x) en els restants divisors de 6 no és zero.

Exemple 11

Si el polinomi té coeficients fraccionaris, també podem buscar si hi ha solucions enteres:

Les arrels del polinomi $\mathbf{P(x)} = \mathbf{x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}}$ són les mateixes que les de $\mathbf{Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2}$ obtingut al multiplicar els coeficients de P(x) pel m.c.m. dels denominadors, que és 6. Açò és degut al fet que les equacions següents tenen les mateixes solucions:

$$\mathbf{x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = 0} \overset{\text{m.c.m.} = 6}{\Leftrightarrow} 6\left(x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0}$$

Les úniques arrels enteres possibles de $\mathbf{Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2}$ són els divisors de $a_0 = 2$: $\{\pm1, \pm2\}$.

Pots comprovar que Q(1) = 6, Q(–1) = 12, Q(2) = 60 i **Q(–2) = 0**.

Aleshores el polinomi P(x) **només té una arrel entera**, el **–2**. Tindrà arrels fraccionàries?

➢ Teorema 2. Recerca de les arrels fraccionàries

Donat un polinomi **amb coeficients enters**:

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}, \text{ amb } \mathbf{a_0, a_1, ... , a_n} \in \mathbb{Z}$$

Si $\mathbf{a = \frac{r}{s}}$ **és una arrel de P(x)** $\rightarrow$ **r és divisor de a_0** i **s és divisor de a_n**

Se suposa que la fracció **r/s** és irreductible, és a dir, r i s són primers entre si.

La demostració és semblant a la del teorema 1, que a més, és un cas particular del teorema 2, perquè tota arrel entera és també racional.

Exemple 12

Obtenim les arrels fraccionàries del polinomi de l'exemple 11: $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$.

Tots els coeficients de P(x) són enters, aleshores pel teorema 2, si r/s és arrel de Q(x) tenim que

r és divisor de $a_0 = 2$ i s és divisor de $a_n = 6$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divisors de } 2: \{\pm1, \pm2\} \\ \text{Divisors de } 6: \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Possibles arrels racionals: } \left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\right\},$$

perquè qualsevol divisor de 2 entre qualsevol divisor de 6 pot ser una arrel de Q(x). Observa que entre els candidats a arrels fraccionàries obtenim també els candidats a arrels enteres.

Com que P(1/2) = 0, P(1/3) = 0 i P(–2) = 0, P(x) té una arrel entera, –2, com vam veure en l'exemple 11, i dues arrels fraccionàries, 1/2 i 1/3.

21 Troba les arrels enteres dels polinomis:
(A) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ (B) $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (C) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

22 Troba les arrels enteres, i si no n'hi ha, les fraccionàries, dels següents polinomis:
(A) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (B) $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ (C) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
(D) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (E) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$ (F) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

2.9 Factorització de polinomis

Suposem que al dividir un polinomi P(x) per un altre polinomi de grau inferior Q(x) obtenim que el residu és 0. Açò significa que **P(x) *és divisible per* Q(x)**

P(x)	**Q(x)**
0	**C(x)**

$\Leftrightarrow$ **P(x) = C(x) · Q(x)**

En aquest cas tenim expressat P(x) com a producte de dos factors, C(x) i Q(x). Diem que tenim una ***factorització*** de P(x).

➢ Teorema del factor

Donat el polinomi **P(x)**, són equivalents:

a és una arrel de P(x) $\Leftrightarrow$ **(x – a) és un factor de P(x)**

Efectuem la divisió euclidiana de P(x) per (x – a):

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

sent, pel **teorema del residu**: R = P(a)

- Si a és arrel de P(x) → P(a) = 0 → R = 0 → **P(x) = (x – a) · C(x)** → (x – a) és un factor de P(x).
- Si (x – a) és un factor de P(x) → **P(x) = (x – a) · C(x)** → P(a) = 0 → a és una arrel de P(x)

La combinació del teorema del factor, el teorema del residu i la recerca d'arrels enteres o racionals permet obtenir factoritzacions de polinomis de grau major o igual que 2.

Exemple 13

- Obtenim les arrels i la factorització del polinomi $P(x) = x^2 + 2x - 15$.

  Els candidats a arrels enteres són els divisors de 15: {±1, ±3, ±5, ±15}.

  Obtenim que P(3) = 0 i P(–5) = 0. Segons el teorema del factor, els factors associats a les arrels **3** i **–5** són, respectivament, **(x – 3)** i **(x + 5)**. Obtenim la factorització de P(x) amb la regla de Ruffini:

	1	2	–15
3		3	15
	1	5	**0**

$\Rightarrow$

$x^2 + 2x - 15$	$x - 3$
0	$x + 5$

$\Rightarrow$ $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$

  Les arrels de P(x) són 3 i –5, i la seua factorització és **P(x) = (x – 3)(x + 5)**.

- Obtenim les arrels i la factorització del polinomi $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$.

  Els candidats a arrels enteres del polinomi Q(x) no es poden obtenir perquè no hi ha terme independent. Però observa que en aquest cas, **el 0 és una arrel de Q(x)**, perquè **Q(0) = 0**. Podem traure factor comú **x**, que és el factor associat a l'arrel 0:

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 15x = x(x^2 + 2x - 15) = x \cdot P(x) = x(x - 3)(x + 5)$$

  Aleshores les arrels de Q(x) són **0**, **3** i **–5**, i la seua factorització és:

$$\mathbf{Q(x) = x(x - 3)(x + 5)}$$

➢ Descomposició d'un polinomi en factors lineals

Si el polinomi $\mathbf{P(x)} = a_n x^n + \ldots + \mathbf{a_2 x^2} + \mathbf{a_1 x} + \mathbf{a_0}$ té com a arrels als n nombres reals distints $\mathbf{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n}$ aleshores es descompon en factors lineals o de primer grau del mode següent:

$$\mathbf{P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}$$

Exemple 14

Obtenim les arrels i la factorització del polinomi $P(x) = 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1$.

Els candidats a ser arrels racionals de P(x) són:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divisors de } -1: \{\pm 1\} \\ \text{Divisors de } 12: \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12\}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Possibles arrels racionals: } \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6} \ \pm\frac{1}{12}\right\}$$

Comprovem que $P(1/2) = 0$ → **1/2 és arrel de P(x)** → $(x - 1/2)$ és factor de P(x)

	12	4	–3	–1
1/2		6	5	1
	12	10	2	**0**

$\Rightarrow \quad 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = (x - 1/2)(12x^2 + 10x + 2) \qquad (1)$

Ara factoritzem el polinomi $Q(x) = 12x^2 + 10x + 2$. Comprovem que $Q(-1/2) = 0$, per la qual cosa $(x + 1/2)$ és un factor de Q(x).

	12	10	2
–1/2		–6	–2
	12	4	**0**

$\Rightarrow \quad 12x^2 + 10x + 2 = (x + 1/2)(12x + 4) \qquad (2)$

Agrupant (1) i (2) obtenim la descomposició de P(x) com a producte de factors lineals

$$\mathbf{12x^3 + 4x^2 - 3x - 1} = (x - 1/2)(12x^2 + 10x + 2) = \mathbf{(x - 1/2)\ (x + 1/2)(12x + 4)}$$

De l'últim factor traiem factor comú 12, que és el coeficient principal de P(x), i amb aquesta factorització equivalent en cada factor podem observar l'arrel associada:

$$\mathbf{P(x) = 12(x - 1/2)(x + 1/2)(x + 1/3)}$$

Las arrels de P(x) són **1/2, –1/2** i **–1/3**.

23 Comprova que les arrels de $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6$ són 2, –3, 1/2 i –1/2, i escriu la seua descomposició en factors lineals.

24 Quin polinomi de grau 3 té per arrels –2, 4, 6 i coeficient principal –3? I coeficient principal 1?

25 Obtén un polinomi de grau 3 les arrels del qual siguen 0, 1 i –1.

26 Obtén les arrels i la descomposició en factors lineals dels següents polinomis:

(A) $x^2 - 9$ (B) $9x^2 - 4$ (C) $3x^2 + x$ (D) $2x^2 + 8x - 10$ (E) $6x^2 + x - 2$ (F) $3x^2 + 2x$

(F) $3x^3 + 6x^2 - 9x$ (H) $4x^3 - 8x^2 - x + 2$ (I) $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ (J) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

(K) $x^2 + x - 2$ (L) $2x^3 - x^2 - x$ (M) $x^4 - 5x^2 + 4$ (N) $x^4 - 10x^2 + 9$ (Ñ) $-2x^2 + 3x$

Arrels múltiples d'un polinomi

Exemple 15

Obtenim les arrels i la descomposició factorial del polinomi $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$.

Els candidats a ser arrels enteres són $\{\pm1, \pm3, \pm9\}$. De tots ells, obtenim que $P(1) = P(-1) = P(3) = 0$.

Per tant, **1**, **−1** i **3 són arrels de P(x)**, i els seus factors associats són $(x-1)$, $(x+1)$ i $(x-3)$.

Per a obtenir la descomposició factorial de P(x), dividim successivament pels anteriors factors, amb la regla de Ruffini:

	1	−6	8	6	−9		
1		1	−5	3	9		
	1	−5	3	9	**0**	⇒	$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$
−1		−1	6	−9			
	1	−6	9	**0**		⇒	$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x+1)(x^2 - 6x + 9)$
3		3	−9				
	1	−3	**0**			⇒	$x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3)$

En resum, la factorització de P(x) és:

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x-3)}$$

Observa que el factor $(x - 3)$, associat a l'arrel 3, apareix dues vegades. Diem per això que ***l'arrel* 3 *és doble***. Com els altres factors no estan repetits, les seues arrels associades 1 i −1 s'anomenen ***simples***.

La factorització de P(x) s'expressa més agrupada:

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)^2}$$

Donada la descomposició del polinomi P(x) en producte de factors lineals

$$\mathbf{P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}$$

on les arrels $r_1, r_2, \ldots, r_n$ no són necessàriament totes distintes:

Una arrel s'anomena ***simple*** si el seu factor associat apareix només una vegada en la descomposició de P(x), ***doble*** si apareix dues vegades, ***triple*** si apareix 3 vegades, etc. En general s'anomenen ***múltiples*** si apareixen més d'una vegada.

- El polinomi $\mathbf{P(x) = (x-2)^3 (x+3)^2}$ té una arrel triple, el 2, i una doble, el −3.
- El polinomi $\mathbf{P(x) = x^3(x-2)(x+1)}$ té dues arrels simples, el 2 i el −1, i una triple, el 0, perquè $\mathbf{x^3 = (x-0)^3}$.

27 Comprova que les arrels de $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$ són 1 (triple) i −2 (doble) i escriu la seua descomposició en factors lineals.

28 Escriu un polinomi de grau 4 amb arrel triple 0 i arrel simple 3.
Escriu polinomis de grau 4 que només tinguen per arrels els nombres 1 i −1.

Exemple 16

En ocasions la recerca d'arrels enteres o fraccionàries no és prou per a obtenir la factorització d'un polinomi, perquè algunes de les seues arrels poden ser nombres irracionals.

Trobem les arrels i la factorització de:

$$\mathbf{P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x - 4}$$

Les arrels enteres de P(x) només poden ser els divisors del terme independent –4, que són { ±1, ±2, ±4 }.

Comprovem que P(1) = P(2) = 0, per la qual cosa els nombres 1 i 2 són arrels de P(x). La factorització corresponent l'obtenim amb la regla de Ruffini.

	1	–3	0	6	–4		
1		1	–2	–2	4		
	1	–2	–2	4	**0**	⇒	$P(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$
2		2	0	–4			
	1	0	–2	**0**		⇒	$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x-2)(x^2-2)$

Tenim la següent factorització de P(x), en dos factors de grau 1 i un altre de grau 2:

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(x-2)(x^2-2)}$$

Arribats a aquest punt no podem continuar perquè no hi ha cap altra arrel entera ni fraccionària. (No hi ha arrels fraccionàries perquè el coeficient principal de P(x) és 1).

Però el polinomi $Q(x) = x^2 - 2$ té dues arrels irracionals, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, que obtenim de resoldre l'equació

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

i es pot factoritzar com $\mathbf{x^2 - 2} = \left(\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{2}}\right)\left(\mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{2}}\right)$.

D'aquesta manera obtenim la descomposició en 4 factors lineals del polinomi P(x):

$$\mathbf{P(x)} = (\mathbf{x-1})(\mathbf{x+1})\left(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}}\right)\left(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}\right)$$

El polinomi P(x) té dues arrels enteres, **1** i **2**, i dues arrels irracionals, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

Observem que quan no hi ha arrels fraccionàries, però algun dels factors del polinomi (o el mateix polinomi) és de grau 2, la resolució d'equacions de segon grau permet obtenir arrels irracionals. En l'apartat següent resolem equacions de primer i segon grau, i altres reductibles a equacions de segon grau.

29 Obtén les arrels i la factorització dels polinomis:

(A) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ (B) $P(x) = 6x^2 - x - 1$ (C) $P(x) = 6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + x - 1$
(D) $P(x) = x^4 - x^2 - 12$ (E) $P(x) = x^5 - x^3 - 6x$ (F) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$
(G) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ (H) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ (I) $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
(J) $P(x) = 2x^4 - x^2$ (K) $P(x) = x^3 - 3x + 2$ (L) $P(x) = -8x^6 + 9x^3 - 1$
(M) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (N) $P(x) = x^4 - 7x^2 + 12$ (Ñ) $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$
(O) $P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ (P) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$

30 Tenint en compte la propietat $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, molts polinomis es poden factoritzar ràpidament, sense necessitat de recórrer a la divisió euclidiana. Aplica-ho als polinomis següents:

(A) $P(x) = x^2 - 4$ (B) $P(x) = 3x^2 - 2$ (C) $P(x) = x^3 - 4x$ (D) $P(x) = x^4 - x^2$
(E) $P(x) = x^4 - 9$ (F) $P(x) = 9x^2 - 4$ (G) $P(x) = x^3 - x$ (H) $P(x) = x^3 - 3x$
(I) $P(x) = 10x^5 - 160x$ (J) $P(x) = 2x^4 - x^2$ (K) $P(x) = 4x^2 - 1$ (L) $P(x) = -2x^4 + 8x^2$

Problemes del capítol 2

1 Efectua les següents operacions amb els polinomis $P(x) = 3x^4 - x^3 + x^2$ i $Q(x) = -x^2 + 2$:

(A) $P(x) + Q(x)$ (B) $P(x) - Q(x)$ (C) $P(x) \cdot Q(x)$ (D) $P(x) : Q(x)$

(E) $(P(x))^2$ (F) $(Q(x))^2$ (G) $(Q(x))^3$ (H) $(Q(x))^4$

2 Calcula les següents potències:

(A) $(x + 7y)^2$ (B) $(x^2 + 4y)^2$ (C) $(x^2 + 2y)^3$ (D) $(x - y)^4$

(E) $(x + \sqrt{3})^5$ (F) $(2x - 1)^5$ (G) $\left(\sqrt{2}x^4 - \sqrt{8}x^3\right)^2$ (H) $\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right)^6$

3 Efectua les següents operacions amb polinomis:

(A) $(2x + 3)^2 - (3x - 4)^2 + (5 + 2x)(5 - 2x)$ (B) $(3x + 4)^2 + (2x + 5)^2 - (5x + 1)(5x - 1)$

(C) $(3x + 2)^2 + (2x - 5)^2 - 12(x - 1)(x + 1)$ (D) $(a + b)^2 + (a + 2b)^2 + (2a + b)^2$

(E) $(x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$ (F) $(2a - b)^2(2a + b)^2$

(G) $(x + 2)^4 - (x - 2)^4$ (H) $(2x - 1)(2x + 1)(3x - 2)$

(I) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ (J) $(2x - 1)(2x + 1)(3x - 2)(3x + 2)$

4 Obtén el terme de grau 4 dels següents polinomis:

(A) $(3x - 2)^4$ (B) $(3x - 2)^5$ (C) $(3x - 2)^6$ (D) $(3x^2 - 2)^6$ (E) $(3x^2 + 4x)^3$

5 Obtén el quocient i el residu de les següents divisions de polinomis:

(A) $P(x) = 5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 5$, $Q(x) = x^2 + x - 1$.

(B) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 5$, $Q(x) = 3x - 1$.

(C) $P(x) = x^4 - x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$.

(D) $P(x) = 2x^5 - x^3$, $Q(x) = x^2 + 1$.

(E) $P(x) = x^7 + 1$, $Q(x) = x^3 - 1$.

6 Obtén el valor de m perquè el residu de la divisió de $P(x) = (x^3 - 7x^2 + 3x + m)$ entre $Q(x) = x^2 - x + 2$ siga $r(x) = -5x + 2$.

7 Obtén m perquè el residu de la divisió de $P(x) = (x^5 + x^4 + 2x^3 + mx^2 - 5)$ entre $Q(x) = x^3 - x + 2$ siga un polinomi de primer grau.

8 Obtén m i n perquè el residu de la divisió de $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx + n$ entre $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ siga $2x + 1$.

9 Aplicant la Regla de Ruffini obtén el quocient i el residu de les divisions:

(A) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $Q(x) = x + 1$.

(B) $P(x) = 4x^3 - 68x^2 - 5$, $Q(x) = x$.

(C) $P(x) = x^{10} - x^7 + x^2 + x$, $Q(x) = x - 1$.

(D) $P(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^4$, $Q(x) = x + a$.

(E) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 3x - 4$, $Q(x) = 2x - 1$.

(F) $P(x) = 9x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 15x + 3$, $Q(x) = 3x + 2$.

10 Obtén el valor de m perquè el residu de la divisió de $x^5 - x^4 + x + 3m$ entre $x - 2$ siga 9.

11 Obtén el valor de m perquè la divisió de $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + mx + 6$ entre $x + 3$ siga exacta.

12 Pel teorema del residu, obtén el residu de la divisió de $P(x) = x^4 – 7x^3 + 10x^2 + 9x + 3$ entre el binomi $x – 4$.

13 Obtén els valors de m i n perquè el polinomi $P(x) = x^3 – 5x^2 + mx + n$ siga divisible, al mateix temps, per $x + 1$ i per $x – 1$.

14 Obtén el valor de m perquè el polinomi $x^4 + mx^3 – 2x^2 + 3x + 6$ siga divisible per $x + 2$.

15 Obtén les arrels i la factorització dels següents polinomis de grau 2:

(A) $x^2 – 3x + 2$ (B) $x^2 + 3x + 2$ (C) $x^2 – 5x + 4$ (D) $x^2 + 4x + 4$

(E) $2x^2 + x – 3$ (F) $2x^2 + x – 1$ (G) $6x^2 – 5x + 1$ (H) $x^2 – 2x + 1$

(I) $x^2 + 3x$ (J) $2x^2 + 4x$ (K) $3x^2 – 4x$ (L) $x^2 + x$

16 Obtén les arrels i la factorització dels següents polinomis de grau 3:

(A) $x^3 – 4x$ (B) $x^3 + 4x$ (C) $x^3 – 4x^2$ (D) $x^3 + 4x^2$

(E) $2x^3 – 3x^2$ (F) $x^3 – 3x$ (G) $x^3 – 3x^2 + 2x$ (H) $x^3 + 5x^2 + 4x$

(I) $x^3 + 1$ (J) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (K) $x^3 – 3x^2 + 3x – 2$ (L) $x^3 – 1$

(M) $x^3 – 3x + 2$ (N) $x^3 – 3x – 2$ (Ñ) $x^3 – 7x + 6$ (O) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

17 Obtén les arrels i la factorització dels següents polinomis de grau 4 o més:

(A) $x^4 – x^3$ (B) $x^4 – x^2$ (C) $x^4 – x$ (D) $x^4 – 8x$

(E) $x^4 – 1$ (F) $x^4 – 4$ (G) $x^4 – 4x^2$ (H) $x^4 + 8x^2$

(I) $x^4 + 2x^2 + 1$ (J) $x^4 – 2x^2 + 1$ (K) $x^4 – 5x^2 + 4$ (L) $x^4 – 3x^2 + 2$

(M) $x^4 – 8x^2 – 9$ (N) $x^4 + x^2 – 2$ (Ñ) $x^4 – x^2 – 2$ (O) $x^4 + 3x^2 + 2$

18 Descompon factorialment els següents polinomis:

(A) $P(x) = 3x^2 – 5x^3 + 2x^4$ (B) $P(x) = 3x^3 – 28x^2 + 63x – 18$

(C) $P(x) = 75x^4 – 30x^3 + 3x^2$ (D) $P(x) = x^2 + 2x – 3$

(E) $P(x) = 6x^4 + 7x^3 – 36x^2 – 7x + 6$ (F) $P(x) = x^4 + x^2 – 2$

(G) $P(x) = 2x^5 – 15x^4 + 14x^3 + 75x^2 – 88x – 60$ (H) $P(x) = 4x^5 – 5x^3 + x$

(I) $P(x) = x^4 + x^3 – 3x^2 – 4x – 4$ (J) $P(x) = x^3 – 7x + 6$

(K) $P(x) = x^3 – 6x^2 + 5x + 12$ (L) $P(x) = 3x^3 + 10x^2 – 23x + 10$

(M) $P(x) = x^3 + x^2 – 8x – 12$ (N) $P(x) = 4x^3 – 37x^2 + 70x + 75$

(Ñ) $P(x) = x^4 – 2x^3 + 2x – l$ (O) $P(x) = x^3 + 3x^2 + l0x + 8$

(P) $P(x) = 2x^2 – llx – 40$ (Q) $P(x) = x^4 – 2x^3 – 8x^2$

19 Factoritza, utilitzant la diferència de quadrats, els següents polinomis:

(A) $x^2 – 25$ (B) $x^2 – 5$ (C) $4x^2 – 1$ (D) $3x^2 – 5$

(E) $x^2 – m^2$ (F) $2x^2 – 1$ (G) $x^4 – 1$ (H) $x^4 – 9$

(I) $2x^3 – 4x$ (J) $2x^3 – 4x^2$ (K) $4a^2 – 9b^2$ (L) $x^4 – 4x^2$

(M) $x^5 – 4x$ (N) $x^5 – 4x^3$

Solucions de les activitats del capítol 2

1. $5x + 10y + 15z$. **2.** $C_1 = 1.1x$; $C_2 = 1.1^2x$; $C_3=1.1^3x$. **3.** $C_n = 1.1^nx$; n=7.27 anys. **4.** (A) $\sqrt{404}$; $\sqrt{1604}$; (B) $\sqrt{x^2+4}$. **5.** $V = 4x + 6y + 12z$. **6.** Respectivament, -3 i 4; 4 i -1; 0 i 1. **7.** $a = -4$, $b = -3$, $c = 0$.
8. (A) $9x^2$. (B) $15x^3$. (C) $10x^6$. (D) 0. (E) $2x^5 - 4x^3$. (F) $2x^2 + 5x$. (G) $-9x^7 + 6x^6 + 18x^5$. (H) 0. **9.** (A) $3x^2 + 1$. (B) $x^2 + 2x - 3$. (C) $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$. **10.** $P(x)Q(x)R(x) = x^6 - x^4 - 5x^2 + 2$; $P(x)(Q(x)+R(x)) = 2x^4 + 2x^2 - 4$.
11. (A) $9x^4 + 12x^2 + 4$. (B) $9x^4 - 12x^2 + 4$. (C) $9x^4 - 4$. (D) $25x^2 - 16$. (E) $2x^5 + 6x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x - 2$. (F) $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 9x - 12$. **12.** (A) $4x^2 + 12x + 9$. (B) $4x^2 - 12x + 9$. (C) $x^4 + 2x^2 + 1$. (D) $x^4 - 2x^2 + 1$. (E) 0. (F) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. (G) $x^3 + 3x^2 + 3x+1$. (H) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
(I) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$. (J) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1$. **13.** (A) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$.
(B) $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$. (C) $x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16$. (D) $10x^4 + 20x^2 + 2$.
(E) $x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2 + 1458x + 729$. (F) $32x^5 - 320x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 2560x - 1024$. (G) $x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 108x^6 + 81x^4$. (H) $16x^{12} + 16x^{11} + 6x^{10} + x^9 + (1/16)x^8$. **14.** (A) $4860x^4$. (B) $448x^3$. (C) $-160x^2$. (D) $-8064x^{10}$. **15.** (A) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2$. (B) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$. (C) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$.
(D) $(x^2 - 1) \cdot 1 + 2$. (E) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1)$. (F) $(x - 1)(x - 4) + 2$. (G) $(4x^2 + 2)(x^2/2 + 1) + (x + 1)$.
(H) $(0.5x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1) + (x + 1)$. **16.** (A) $C(x) = x^2 + x - 2$, $R = 0$. (B) $C(x) = x^2 - x - 2$, $R = 4$.
(C) $C(x) = x^2 + 2x + 1$, $R = 4$. (D) $C(x) = x^2 - 2x + 1$, $R = 0$. (E) $C(x) = x^2 - 3$, $R = 2$. **17.** $-63/8$. **18.** 0 y -4.
19. 5. **20.** $m = n = -1$. **21.** (A) $-3, -2$. (B) $0, -1, 1, 2$. (C) $0, -1$. **22.** (A) 1, 2, 3. (B) 1. (C) -1. (D) $-2, -1, 1, 2$. (E) $-1/2, 1/2, 1$(F) $-1/2, 1/2, 1/3$. **23.** $4(x + 3)(x - 2)(x - 1/2)(x + 1/2)$.
24. $-3x^3 + 24x^2 - 12x - 144$. $x^3 - 8x^2 + 4x + 48$. **25.** $x^3 - x$. **26.** (A) $(x - 3)(x + 3)$. (B) $9(x + 2/3)(x - 2/3)$. (C) $3x(x + 1/3)$. (D) $2(x + 5)(x - 1)$. (E) $6(x - 2/3)(x + 1/2)$. (F) $3x(x + 2/3)$, (G) $3x(x + 3)(x - 1)$.
(H) $4(x - 2)(x + 1/2)(x - 1/2)$. (I) $18(x - 1/3)(x + 1/2)(x + 1/3)$. (J) $(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)$. (K) $(x + 2)(x - 1)$. (L) $2x(x - 1)(x + 1/2)$. (M) $(x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 1)$. (N) $(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$. (Ñ) $-2x(x - 3/2)$.
27. $(x - 1)^3(x + 2)^2$. **28.** $x^4(x - 3)$; $(x^2-1)(ax^2 + bx + c)$. **29.** (A) $(x - 1)(x + 4)$. (B) $6(x - 1/2)(x + 1/3)$.
(C) $6(x - 1)^2(x + 1/3)(x - 1/2)$. (D) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$. (E) $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)$.
(F) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (G) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. (H) $(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
(I) $x^2(x + 1)(x - 1)^2$. (J) $2x^2(x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)$. (K) $(x + 2)(x - 1)^2$.
(L) $-8(x - 1)(x - 1/2)(x^2 + x + 1)(x^2 + x/2 + 1/4)$. (M) $(x - 3)(x - 2)(x + 1)$. (N) $(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
(Ñ) $(x + 2)(x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (O) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$. (P) $(x + 4)(x - 1)(x + 1)^2$.
30. (A) $(x + 2)(x - 2)$. (B) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2})$. (C) $x(x - 2)(x + 2)$. (D) $x^2(x + 1)(x - 1)$.
(E) $(x^2 + 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (F) $(3x + 2)(3x - 2)$. (G) $x(x + 1)(x - 1)$. (H) $x(x- \sqrt{3})(x+ \sqrt{3})$.
(I) $10x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$. (J) $x^2(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$. (K) $(2x - 1)(2x + 1)$. (L) $-2x^2(x + 2)(x - 2)$.

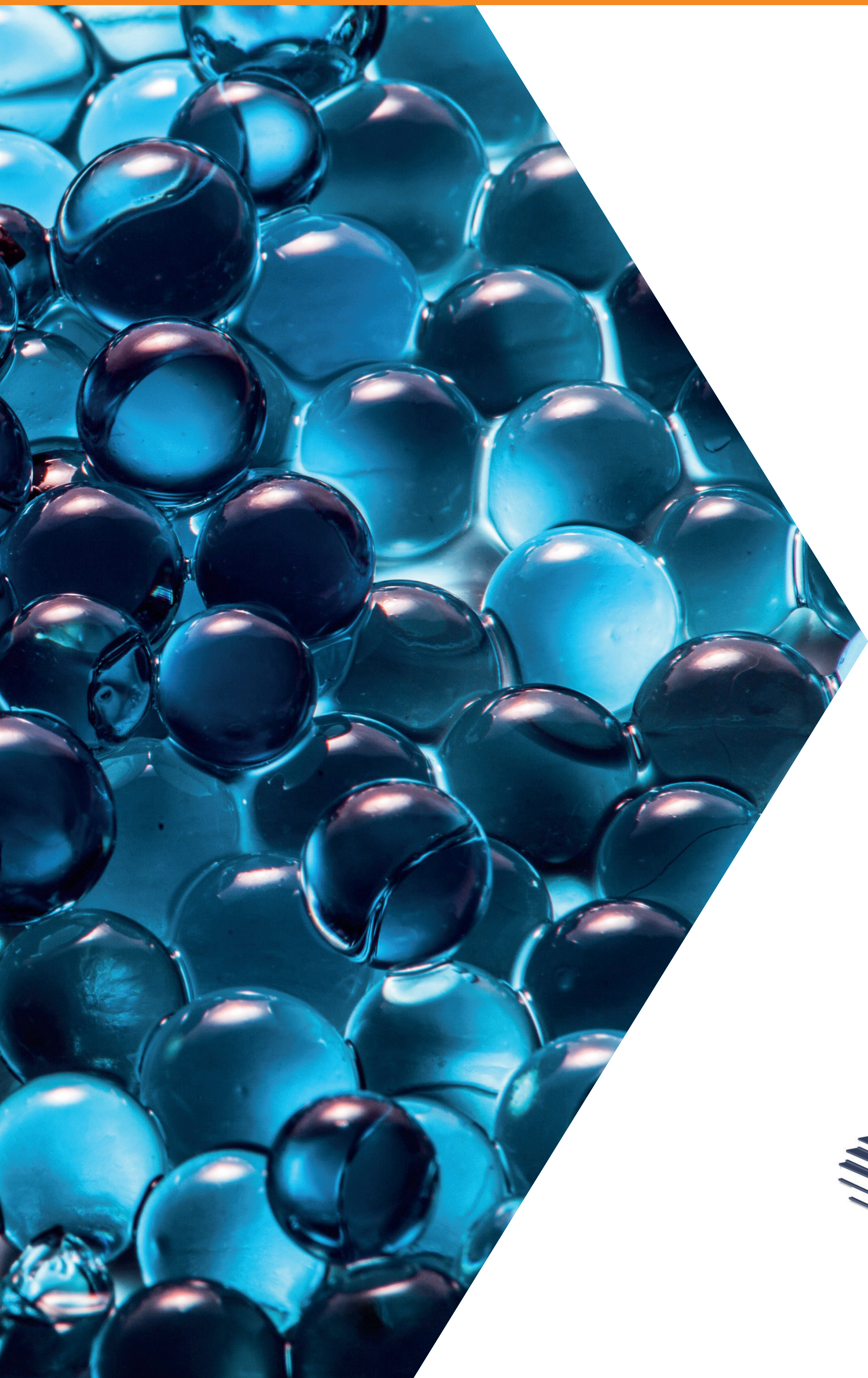
Solucions dels problemes del capítol 2

1. (A) $3x^4 - x^3 + 2$. (B) $3x^4 - x^3 + 2x^2 - 2$. (C) $-3x^6 + x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2$. (D) Quocient: $-3x^2 + x - 7$, Residu: $-2x + 14$. (E) $9x^8 - 6x^7 + 7x^6 - 2x^5 + x^4$. (F) $x^4 - 4x^2 + 4$. (G) $-x^6 + 6x^4 - 12x^2 + 8$. (H) $x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16$. **2.** (A) $x^2 + 14xy + 49y^2$. (B) $x^4 + 8x^2y + 16y^2$. (C) $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$. (D) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$. (E) $x^5 + 5\sqrt{3}x^4 + 30x^3 + 30\sqrt{3}x^2 + 45x + 9\sqrt{3}$. (F) $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$. (G) $2x^8 - 8x^7 + 8x^6$. (H) $(1/64)x^{24} - (3/8)x^{23} + (15/4)x^{22} - 20x^{21} + 60x^{20} - 66x^{19} + 64x^{18}$. **3.** (A) $-9x^2 + 36x + 18$. (B) $-12x^2 + 44x + 42$. (C) $x^2 - 8x + 41$. (D) $6a^2 + 6b^2 + 10ab$. (E) $x^4 - 18x^2 + 81$. (F) $16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$. (G) $16x^3 + 64x$. (H) $12x^3 - 8x^2 - 3x + 2$. (I) $x^3 - 7x + 6$. (J) $36x^4 - 25x^2 + 4$. **4.** (A) $81x^4$. (B) $-810x^4$. (C) $4860x^4$. (D) $2160x^4$. (E) $144x^4$. **5.** (A) $C(x) = 5x^2 - 11x + 14$, $R(x) = -24x + 9$. (B) $C(x) = x^2 + 2x + 1$, $R(x) = -4$. (C) $C(x) = x^2 - 2x + 4$, $R(x) = -10x + 5$. (D) $C(x) = 2x^3 - 3x$, $R(x) = 3x$. (E) $C(x) = x^4 + x$, $R(x) = x + 1$. **6.** -10. **7.** 1. **8.** $m = 15$, $n = -3$. **9.** (A) $C(x) = x^2 + 1$, $R = 0$. (B) $C(x) = 4x^2 - 68x$, $R = -5$. (C) $C(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x + 2$, $R = 2$. (D) $C(x) = x^2 - 2ax + a^2$, $R = 0$. (E) $C(x) = 3x^2 - 2x + 1/2$, $R = -7/2$. (F) $C(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 3$, $R = -3$. **10.** 3. **11.** -10. **12.** 7. **13.** $m = -1$, $n = 5$. **14.** 1. **15.** (A) 1 i 2; $(x - 1)(x - 2)$. (B) -1 i -2; $(x + 1)(x + 2)$. (C) 1 i 4; $(x - 1)(x - 4)$. (D) -2 doble; $(x + 2)^2$. (E) 1 i $-3/2$; $(x - 1)(2x + 3)$. (F) -1 i $1/2$; $(x + 1)(2x - 1)$. (G) 1/2 i 1/3; $(2x - 1)(3x - 1)$. (H) 1 doble; $(x - 1)^2$. (I) 0 i -3; $x(x + 3)$. (J) 0 i -2; $2x(x + 2)$. (K) 0 i 4/3; $x(3x - 4)$. (L) 0 i -1; $x(x + 1)$. **16.** (A) 0, 2 i -2; $x(x - 2)(x + 2)$. (B) 0; $x(x^2 + 4)$. (C) 0 doble i 4; $x^2(x - 4)$. (D) 0 doble i -4; $x^2(x + 4)$. (E) 0 doble i 3/2; $x^2(2x - 3)$. (F) 0, $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$; $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (G) 0, 1 i 2; $x(x - 1)(x - 2)$. (H) 0, -1 i -4; $x(x + 1)(x + 4)$. (I) -1; $(x + 1)(x^2 - x + 1)$. (J) -2; $(x + 2)(x^2 + x + 1)$. (K) 2; $(x - 2)(x^2 - x + 1)$. (L) 1; $(x - 1)(x^2 + x + 1)$. (M) 1 doble i -2; $(x - 1)^2(x + 2)$. (N) -1 doble i 2; $(x + 1)^2(x - 2)$. (Ñ) 1, 2 i -3; $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. (O) -1, -2 i -3; $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.
17. (A) 0 triple i 1; $x^3(x - 1)$. (B) 0 doble, 1 i -1; $x^2(x - 1)(x + 1)$. (C) 0 i 1; $x(x - 1)(x^2 + x + 1)$. (D) 0 i 2; $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. (E) 1 i -1; $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. (F) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$; $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. (G) 0 doble, 2 i -2; $x^2(x - 2)(x + 2)$. (H) 0 doble; $x^2(x^2 + 8)$. (I) No té arrels; $(x^2 + 1)^2$. (J) 1 i -1 dobles; $(x - 1)^2(x + 1)^2$. (K) 1, 2, -1 i -2; $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$. (L) 1, -1, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$; $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (M) 3 i -3; $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$. (N) 1 i -1; $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$. (Ñ) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$; $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$. (O) No té arrels; $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$. **18.** (A) $2x^2(x - 1)(x - 3/2)$. (B) $3(x - 3)(x - 1/3)(x - 6)$. (C) $75x^2(x - 1/5)^2$. (D) $(x + 3)(x - 1)$. (E) $6(x + 3)(x - 2) \cdot (x + 1/2)(x - 1/3)$. (F) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$. (G) $2(x - 5)(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x + 1/2)$. (H) $4x(x - 1)(x - 1/2)(x + 1) \cdot (x + 1/2)$. (I) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 1)$. (J) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. (K) $(x - 4)(x - 3)(x + 1)$. (L) $3(x + 5)(x - 1)(x - 2/3)$. (M) $(x - 3)(x + 2)^2$. (N) $4(x - 5)^2(x + 3/4)$. (Ñ) $(x + 1)(x - 1)^3$. (O) $(x + 1)(x^2 + 2x + 8)$. (P) $2(x - 8)(x + 5/2)$. (Q) $x^2(x - 4)(x + 2)$.
19. (A) $(x - 5)(x + 5)$. (B) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. (C) $(2x - 1)(2x + 1)$. (D) $(\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5})$. (E) $(x - m)(x + m)$. (F) $(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$. (G) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. (H) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$. (I) $2x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (J) $2x^2(x - 2)$. (K) $(2a - 3b)(2a + 3b)$. (L) $x^2(x - 2)(x + 2)$. (M) $x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. (N) $x^3(x - 2)(x + 2)$.

1 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials



Funcions

educàlia editorial

BATXILLERAT

1

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Funcions

educàlia
editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-09-1

Depòsit legal: V-3245-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Tots els drets reservats. No està permesa la reimpressió de cap part d'aquest llibre, ni d'imatges ni de text, ni tampoc la seva reproducció, ni utilització, en qualsevol forma o per qualsevol mitjà, ja sigui electrònic, mecànic o d'una altra manera, tant coneguda com els que puguin inventar-se, incloent el fotocopiat o gravació, ni està permès emmagatzemar-lo en un sistema d'informació i recuperació, sense el permís anticipat i per escrit de l'editor.

Alguna de les imatges que inclou aquest llibre són reproduccions que s'han realitzat acollint-se al dret de cita que apareix en l'article 32 de la Llei 22/18987, de l'11 de novembre, de la Propietat intel·lectual. Educàlia Editorial agraeix a totes les institucions, tant públiques com privades, citades en aquestes pàgines, la seva col·laboració i demana disculpes per la possible omissió involuntària d'algunes d'elles.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 5

Funcions exponencials i logarítmiques
Aplicacions financeres

5.1 Interès simple

Exemple 1

Albert vol comprar una motocicleta de 1 000 €. No té diners però el seu amic Jordi accepta prestar-li els diners a condició d'obtenir un benefici del 5%. Quants diners donarà finalment Albert a Jordi?

El capital prestat al principi (capital inicial) C_0 és de 1000 €.
El benefici o interès B que obtindrà Jordi és:

$$B = 5\% \text{ de } 1000 = \frac{1000 \cdot 5}{100} = 50 \text{ €}.$$

El capital final C_F que Albert haurà de tornar és $\mathbf{C_F = C_0 + B} = 1000 + 50 = 1050$ €.

El benefici es calcula com a percentatge del capital inicial prestat.

Però no és indiferent que Albert cancel·le el seu deute en un any o en un mes, Jordi rebria la mateixa quantitat de diners però preferirà obtenir-lo en menys temps. Apareix així el període de temps necessari per a aplicar aquest percentatge al capital.

- El **percentatge aplicat al capital** per a obtenir el benefici s'anomena ***rèdit o tipus d'interès* R**, al que afegim un adjectiu que indica el **temps de generació del benefici**; potser **anual**, **mensual R_m, semestral R_s, diari R_d** ...
- La característica de l'***interès simple*** és que **el benefici es genera, i correspon ser entregat, al finalitzar cada període de temps que indica el tipus d'interès**. En cas de no concloure tot el període, correspon abonar la part proporcional al temps transcorregut.

Exemple 2

Disposem de 5 000 euros que dipositem en un banc que ofereix un tipus d'interès simple del 5.25% anual. Calculem el benefici i el capital final que obtindrem si el dipòsit es manté durant 3 anys i 6 mesos.

Com que el tipus d'interès R = 5.25% és anual, el benefici que ens correspon al cap de l'any és:

$$B_1 = 5.25\% \text{ de } 5000 = \frac{5000 \cdot 5.25}{100} = 262.5 \text{ €}$$

Com que el capital continua dipositat en el banc (estarà 3 anys i mig), al finalitzar el segon any ens correspondrà de nou un benefici de

$$B_2 = B_1 = 5.25\% \text{ de } 5000 = 262.5 \text{ €}$$

Al finalitzar el tercer any el banc ens donarà de nou un benefici $B_3 = 262.5$ €.

Si el dipòsit es manté 6 mesos més, es produirà una nova entrega de beneficis B* corresponent a eixos 6 mesos, la proporció 6 a 12 del benefici anual:

$$B^* = \frac{6}{12} B_1 = 0.5B_1 = 131.15 \text{ €}$$

El benefici total B i el capital final obtingut, transcorreguts els 3.5 anys, seran:

$$B = \frac{5000 \cdot 5.25 \cdot 3.5}{100} = \mathbf{918.75 \text{ €}} \quad \text{i} \quad C_F = C_0 + B = 5000 + 918.75 = \mathbf{5918.75 \text{ €}}$$

Observant l'última expressió del càlcul del benefici total de l'exemple 2 obtenim l'expressió que proporciona el benefici per al cas de l'interès simple.

El benefici total generat per un capital inicial $\mathbf{C_0}$, al tipus d'interès simple anual **R**, invertit durant un temps **t**, mesurat en anys, ve donat per:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C_0 \cdot R \cdot t}}{\mathbf{100}} = \mathbf{C_0 \cdot r \cdot t}$$

En la segona expressió **r = R/100** és el tipus d'interès anual expressat en tant per un.

Les mateixes expressions són vàlides per a tipus d'interès semestrals, trimestrals, mensuals..., tenint en compte que el temps t, o les seues parts, vindran mesurats en semestres, trimestres...; al mateix temps el benefici es generarà cada semestre, trimestre..., vençut, o les seues parts proporcionals.

Exemple 3

Volem dipositar 6000 € en el banc durant 3 anys. El banc A ofereix un interès simple anual R = 6% i el banc B un interès simple mensual $R_m = 0.5\%$. En quin banc interessarà dipositar els nostres diners?

Benefici en el banc A

$\mathbf{B} = C_0 \cdot r \cdot t = 6000 \cdot 0.06 \cdot 3 = \mathbf{1080\ €}$

$r = R/100 = 6/100 = 0.06$ i $t = 3$ anys

Benefici en el banc B

$\mathbf{B} = C_0 \cdot r_m \cdot 36 = 6000 \cdot 0.005 \cdot 36 = \mathbf{1080\ €}$.

$r_m = R_m/100 = 0.5/100 = 0.005$ i $t = 36$ mesos

Com que el benefici final és el mateix, dona igual l'elecció; però és preferible rebre els diners abans.

El banc A pot oferir un tipus d'interès anual amb venciment mensual (o qualsevol altre termini); significa que cada mes entrega la part proporcional (1/12) del benefici anual:

$$B^* = \frac{1}{12} \cdot 6000 \cdot 0.06 \cdot 1 = 30\ €$$

El benefici al cap dels 3 anys (36 mesos) és el mateix: $B = 36B^* = 36 \cdot 30 = \mathbf{1080\ €}$

El benefici, generat durant un any, corresponent a un tipus d'interès anual **R** (o **r** en tant per un) amb venciment mensual és equivalent al benefici generat durant 12 mesos corresponent a un tipus de interès mensual $\mathbf{R_m = R/12}$ (o $\mathbf{r_m = r/12}$, en tant per un).

1 El banc A ofereix dipòsits al tipus d'interès simple del 4.75%. Joan realitza un dipòsit de 4000 € per un període de 5 anys i 3 mesos. Quin benefici total i quin capital final obtindrà? Quan rep els interessos?

2 Quin capital cal posar perquè, a un interès simple del 4% anual, produisca 6000 € en 3 anys?

3 En un banc posem 5000 € que produeixen 150 € a l'any de benefici. A quin rèdit es van col·locar?

4 Quants mesos van estar col·locats 24000 €, al 2% d'interès simple anual, si van produir 4000 € d'interessos?

5 Hem fet un dipòsit de 4500 € al tipus d'interès simple del 4% trimestral. Quin capital final obtindrem d'ací a 3 anys i un mes?

6 Quin benefici s'obté al invertir durant un any 1000 € al 10% anual amb venciment mensual d'interessos? I al 0.6% mensual amb venciment diari?

5.2 Interès compost

Quan els interessos o beneficis periòdics generats per un capital NO s'abonen al venciment de cada període sinó que s'acumulen al capital inicial (***capitalització***), per a produir també beneficis en els següents períodes, durant la vigència del contracte, apareix l'anomenat ***interès compost***.

Veiem com es produeix la capitalització en el següent exemple.

Exemple 4

En quina quantitat es convertirà un capital de 1 000 €, en 3 anys, al tipus d'interès compost anual del 7%?

1. Com en el interès simple, al cap del primer any (en general, primer període) el benefici generat i el capital final seran:

$$B_1 = C_0 \cdot r \cdot t = 1000 \cdot 0.07 \cdot 1 = 70 \text{ €} \quad \text{i} \quad C_{F1} = C_0 + B_1 = 1070 \text{ €}$$

2. Al començar el segon any, el nou capital inicial és C_{F1}; al acabar el segon any el benefici d'aquest període i el nou capital final seran:

$$B_2 = C_{F1} \cdot r \cdot 1 = 1070 \cdot 0.07 \cdot 1 = 74.9 \text{ €} \quad \text{i} \quad C_{F2} = C_{F1} + B_2 = 1070 + 74.9 = 1144.9 \text{ €}$$

3. Al començar el tercer any, el nou capital inicial és C_{F2}; al acabar el tercer any el benefici d'aquest període i el nou capital final seran:

$$B_3 = C_{F2} \cdot r \cdot 1 = 1144.9 \cdot 0.07 = 80.143 \text{ €} \quad \text{i} \quad C_{F3} = C_{F2} + B_3 = 1144.9 + 80.143 = 1225.043 \text{ €}$$

4. El benefici total és $B = C_{F3} - C_0 = B_1 + B_2 + B_3 = 225.043$ €.

Un capital inicial $\mathbf{C_0}$, al tipus d'interès compost anual $\mathbf{r}$, en tant per un, invertit durant un temps $\mathbf{t}$, mesurat en anys, produeix un capital final i un benefici donats per les expressions:

$$\mathbf{C_F = C_0\,(1 + r)^t} \quad \text{i} \quad \mathbf{B = C_F - C_0}$$

Seguint els passos de l'exemple anterior obtenim que al cap del primer any, el capital final acumulat és:

$$C_{F1} = C_0 + B_1 = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0\,(1 + r)$$

Al cap del segon any, el capital final acumulat és:

$$C_{F2} = C_{F1} + B_2 = C_{F1} + C_{F1} \cdot r = C_{F1}\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)(1 + r) = C_0\,(1 + r)^2$$

Al finalitzar el tercer any, el capital acumulat és:

$$C_{F3} = C_{F2} + B_3 = C_{F2} + C_{F2} \cdot r = C_{F2}\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)(1 + r)\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)^3$$

En general, transcorreguts t anys el capital acumulat és:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t$$

Comprovem la validesa de l'expressió amb les dades de l'exemple anterior:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t \Rightarrow C_F = 1000\,(1 + 0.07)^3 = 1000 \cdot 1.07^3 = 1000 \cdot 1.225043 = 1225.043 \text{ €}$$

➢ Venciment d'interessos en altres períodes

Quan el tipus d'interès compost és mensual, semestral..., les capitalitzacions es produeixen en eixos intervals de temps, i s'obtenen expressions corresponents anàlogues, tenint en compte que el temps es mesurarà en mesos, semestres...; per exemple, en el cas mensual seria:

$$C_F = C_0\,(1 + r_m)^m \quad \text{m és el nombre de mesos invertit} \qquad (1)$$

Al igual que l'interès simple, l'interès compost anual pot tenir venciments diferents (per exemple mensual). La proporcionalitat allí indicada per a calcular el benefici es manté i produeix la proporcionalitat dels tipus d'interès composts per a diferents períodes; així per exemple

$$r_m = \frac{r}{12} \qquad (2)$$

i l'expressió del capital final que s'obté a partir d'un capital inicial C_0, al tipus d'interès compost anual r, amb venciment mensual, invertit t anys és

$$\boxed{\mathbf{C_F = C_0 \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}}}$$

Aquesta expressió és idèntica a la (1) ja que es verifica (2), i 12t són els mesos que hi ha en t anys, que és el temps que el capital està invertit.

Exemple 5

Un banc ofereix uns dipòsits especials al 3.5% d'interès. Invertim 4 000 € durant 5 anys i 3 mesos i calculem el capital final que obtindrem si el tipus d'interès és compost anual amb:

(A) Venciment anual. (B) Venciment mensual. (C) Venciment diari.

(A) En aquest cas utilitzem l'expressió $C_F = C_0\,(1+r)^t$, amb r = 0.035, t = 5.25 anys:

$$C_F = 4000\,(1+0.035)^{5.25} = 4000\,(1.035)^{5.25} = 4000 \cdot 1.197944882 = 4791.78\ €$$

(B) L'expressió serà $C_F = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$, amb r = 0.035, t = 5.25 anys (12t = 63 mesos):

$$C_F = 4000\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12\cdot 5.25} = 4000\,(1.0029167)^{63} = 4000 \cdot 1.201394 = 4805.58\ €$$

(C) L'expressió serà $C_F = C_0\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365t}$, amb r = 0.035, t = 5.25 anys (365t = 1916.25 dies):

$$C_F = 4000\left(1+\frac{0.035}{365}\right)^{365\cdot 5.25} = 4000\,(1.00009589)^{1916.25} = 4000 \cdot 1.201704768 = 4806.82\ €$$

7 Calcula el valor final d'una inversió de 1 euro, al tipus d'interès compost anual del 2% i capitalitzat diàriament.

8 Suposem que les vivendes incrementen el seu valor a una taxa anual del 8%. Quant valdrà hui una vivenda si d'ací a 10 anys tindrà un valor de 250000 €? (El seu preu hui és el **valor actual** de la vivenda.)

9 Els pagarés d'empresa se emeten al descompte. Això vol dir que si el seu valor nominal és de 1000 euros, es paga una quantitat menor per ell, tenint en comte que, transcorregut el termini indicat, el seu valor final serà el nominal. Comprem un pagaré, de valor nominal 100 000 euros, per 95 500 €. Si el seu venciment és d'ací a un any, quin tipus d'interès compost anual aplica? (Aquest tipus d'interès s'anomena **tipus de descompte**.)

5.3 Funcions exponencials

La diferència entre creixement lineal i exponencial s'observa clarament en el següent exemple.

Exemple 6

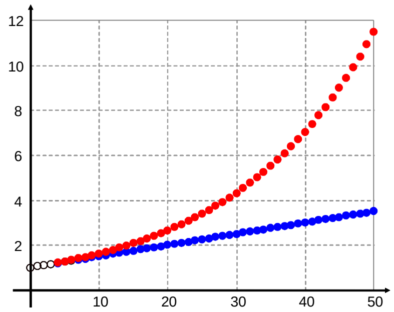
- Un capital inicial C_0 d'**un euro** col·locat a un **interès simple anual** del 5% creix linealment, respecte del temps t que roman invertit, produint un capital final:

$$C(t) = C_0 + B = C_0 + C_0 \cdot r \cdot t = 1 + 1 \cdot 0.05 \cdot t = \mathbf{1 + 0.05\ t}$$

- Si el mateix capital inicial és invertit al tipus d'interès compost anual del 5%, el capital final obtingut és:

$$C(t) = C_0\,(1 + r)^t = 1 \cdot (1 + 0.05)^t = \mathbf{1.05^t}$$

Observa que, en el segon cas, el creixement és molt major i s'anomena creixement exponencial:



n	0	1	2	3	5	10	4	50
C(t)	1	1.05	1.10	1.15	1.25	1.50	1.20	3.5
C(t)	1	1.05	1.102	1.158	1.28	1.63	1.22	11.56

Siga **a > 0, a ≠ 1**, la ***funció exponencial de base a*** es defineix com:

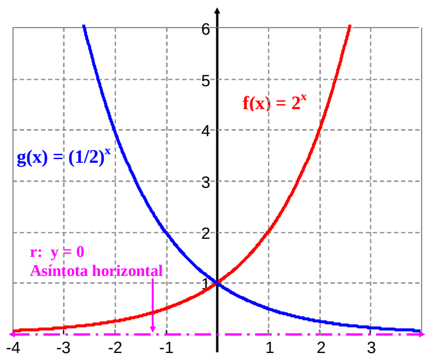
$$\mathbf{f:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \mathbf{f(x) = a^x}$$

Exemple 7

Obtenim una taula de valors i les gràfiques de les funcions exponencials:

$\mathbf{f(x) = 2^x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbf{g(x) = (1/2)^x = 2^{-x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

x	**f(x)**
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



x	**g(x)**
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

Observa que per a valors de x negatius, molt grans, els valors de la funció $\mathbf{f(x) = 2^x}$ s'acosten a 0, mentre que el mateix ocorre amb valors de x positius molt grans en la funció $\mathbf{g(x) = (1/2)^x}$. Per exemple:

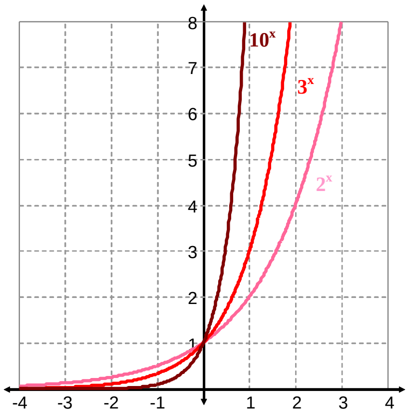
$$f(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} \simeq 0.00097 \qquad g(10) = (1/2)^{10} \simeq 0.00097$$

La recta **r: y = 0** és **asímptota horitzontal** de les gràfiques de les dues funcions, però només en una direcció.

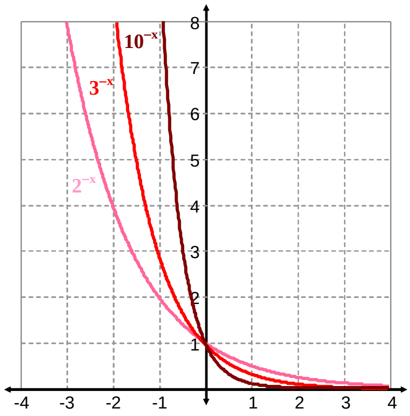
➢ Propietats de les funcions exponencials

Exemple 8

Amb ajuda de la calculadora obtenim les gràfiques de les següents funcions exponencials:



$f(x) = a^x$, amb $a > 1$



$f(x) = a^x$, amb $0 < a < 1$

La funció exponencial $f(x) = a^x$ verifica les següents propietats:

- $\mathbf{f(0) = a^0 = 1}$ i $\mathbf{f(1) = a^1 = a}$ $\Rightarrow$ la gràfica passa pels punts **(0, 1)** i **(1, a)**
- El domini és $\mathbf{D_f = \mathbb{R}}$, i com que $f(x) = \mathbf{a^x > 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, el rang és $\mathbf{R_f =]0, +\infty[}$.
- La funció exponencial $f(x) = a^x$ **és injectiva**, la qual cosa significa que l'equació:

  $\mathbf{a^x = b}$ té solución única, per a $\forall$ b > 0
- Si **a > 1**, $f(x) = a^x$ és una **funció creixent**.
- Si **0 < a < 1**, $f(x) = a^x$ és una **funció decreixent**.
- La recta **r: y = 0 és asímptota horizontal** de totes les funcions exponencials.

A més deduïm que:

- **Si a > 1,** els valors de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a^x}$ tendeixen a $+\infty$ quan els valors de x tendeixen a $+\infty$.
- **Si a > 1,** els valors de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a^x}$ tendeixen a 0 quan els valors de x tendeixen a $-\infty$.
- **Si a < 1,** els valors de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a^x}$ tendeixen a 0 quan els valors de x tendeixen a $+\infty$.
- **Si a < 1,** els valors de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a^x}$ tendeixen a $+\infty$ quan els valors de x tendeixen a $-\infty$.

10 Representa gràficament les funcions $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 3^{-x}$.

11 Considera els valors de x = 10, x = 100 i x = 1000. Comprova per a la funció $f(x) = 1.1^x$ que les imatges tendeixen a $+\infty$. De la mateixa manera, per a x = –10, x = –100 i x = –1000, comprova que les imatges tendeixen a 0. Fes el mateix amb la funció $g(x) = 0.9^x$.

5.4 El nombre e i la funció exponencial de base e

Exemple 9

Suposem de nou un capital inicial C_0 d'un euro que invertim a un tipus d'interès compost anual del 100%. Si la capitalització es realitza al any, obtindrem un capital final:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t = 1 \cdot (1 + 1)^1 = (1 + 1)^1 = 2\ €$$

Si la capitalització es fa al mes durant tot l'any, es tindria:

$$C_F = C_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035\ €$$

Si la capitalització fora diària:

$$C_F = C_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567\ €$$

Si la capitalització fora a cada segon de l'any:

$$C_F = C_0\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = \left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = 2.718281778\ €$$

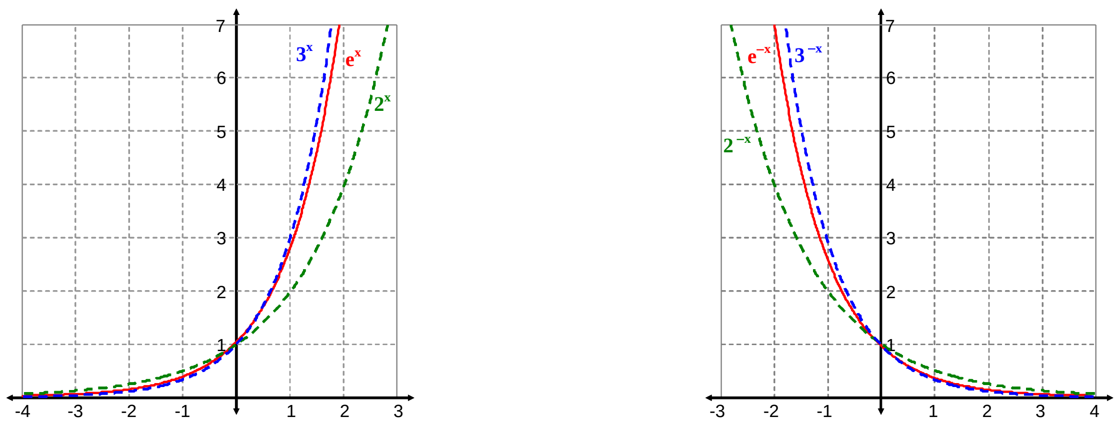
El valor de $\mathbf{C_F}$ correspon al valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on n indica el nombre de capitalitzacions realitzades durant l'any i creix conforme n augmenta durant l'any. En cas d'una acumulació instantània dels interessos (passem de l'interès compost a l'anomenat ***interès continu***) el capital final aconseguit és un nombre irracional anomenat **nombre e**; matemàticament és el límit dels termes $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quan n tendeix a $+\infty$.

- El ***nombre* e** és un nombre irracional (de valor aproximat **2.71828182845905**) al que tendeix la successió de nombres $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quan n tendeix a $+\infty$, i s'escriu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e}$.
- La funció exponencial per excel·lència és aquella que té per base el nombre irracional e:

$$\mathbf{f(x) = e^x},\quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Representem comparativament les següents gràfiques de funcions exponencials:

$f_1(x) = \mathbf{2^x},\ f_2(x) = \mathbf{e^x},\ f_3(x) = \mathbf{3^x}$ $\qquad$ $g_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \mathbf{3^{-x}},\ g_2(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x = \mathbf{e^{-x}},\ g_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathbf{2^{-x}}$



➢ Equacions exponencials

Les ***equacions exponencials*** són aquelles en què la incògnita apareix en l'exponent. La propietat que permet resoldre moltes equacions és la injectivitat de la funció exponencial:

$$\mathbf{a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y}$$

Exemple 10

Per a resoldre les següents equacions, expressem les potències dels dos membres en la mateixa base, per a després igualar els exponents. Finalment, obtenim la solució al resoldre una equació polinòmica.

- Les potències de la següent equació es poden expressar en la base comuna 2:

$$\mathbf{2^x = \frac{1}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{2^3} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -3}$$

- Les potències de la següent equació es poden expressar en la base comuna 3:

$$\mathbf{9^{x+7} = 3^{2-x}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^2\right)^{x+7} = 3^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x+14} = 3^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 14 = 2 - x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -4}$$

- Les potències de la següent equació es poden expressar en la base comuna 2:

$$\mathbf{8^{3x^2-5} = 64^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^{3x^2-5} = \left(2^6\right)^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{9x^2-15} = 2^{-6x} \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 - 15 = -6x$$

$$9x^2 - 15 = -6x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 1,\ x = -\frac{5}{3}}$$

Exemple 11

Per a resoldre les següents equacions, primer aïllem la part exponencial:

- $$\mathbf{\frac{500}{40+15\cdot 2^x} = 5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{500}{5} = 40 + 15 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 100 = 40 + 15 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 60 = 15 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 = 2^x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$$

- $$\mathbf{10 \cdot 5^{x+2} + 20 \cdot 5^{x+3} = 550} \quad \Leftrightarrow \quad 10 \cdot 5^x \cdot 5^2 + 20 \cdot 5^x \cdot 5^3 = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 250 \cdot 5^x + 2500 \cdot 5^x = 550$$

$$2750 \cdot 5^x = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 2750 \cdot 5^x = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \frac{550}{2750} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -1}$$

12 Si en compte d'un euro considerat en l'exemple de la pàgina anterior, parlarem de 3 euros, a quin nombre irracional arribaríem amb l'interès continu?

13 Representa gràficament les funcions $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^{2x}$ i $t(x) = 2^{\frac{x}{2}}$, i mostra l'efecte que es produeix sobre les gràfiques de les funcions exponencials bàsiques corresponents.

14 Troba els valors de m i n perquè la funció $f(x) = 16 \cdot 8^x$ s'expresse en la forma $f(x) = 2^{mx+n}$.

15 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $2^{x^2+1} = 4^{-x}$ (B) $7^{x^3-1} = 1$ (C) $2^{9x-21} = \sqrt{2^{39}}$ (D) $5^{3x-2} = 5$ (E) $4^{-x+3} = 2^{-3x+4}$

(F) $5 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{x-1} = 24$ (G) $9^x - 7 \cdot 3^x = 18$ (H) $\dfrac{1000}{80(1+2^x)} = 10$ (I) $\dfrac{45}{5+90\cdot 3^x} = 3$

5.5 Funcions logístiques

Les ***funcions logístiques o de creixement frenat*** són aquelles d'expressió general:

$$\mathbf{f(x) = \frac{C}{1 + k \cdot a^{x}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ sent C i k constants positives.}$$

Són funcions molt utilitzades per a modelitzar el creixement de poblacions biològiques o en Demografia.

Les poblacions biològiques de tota classe (inclosa la humana) experimenten grans creixements, de tipus exponencial, quan es donen condicions favorables. Però la Terra és un espai limitat de recursos per a totes les espècies, i l'augment d'un tipus de població comporta al final una disminució de les condicions favorables, amb la qual cosa el creixement es frena.

Les funcions logístiques tenen un creixement "amb fre" no superant mai el valor de la constant **C**.

Exemple 12

Obtenim una taula de valors i la representació gràfica de la corba logística donada per la funció

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1+3\cdot(1/2)^{x}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	10	$+\infty$
f(x)	**0**	0.04	0.32	0.61	1.14	2	3.2	4.57	5.81	7.64	7.97	**8**

Aquesta funció és sempre creixent, no obstant això:

- Els valors de la funció estan limitats superiorment per 8:

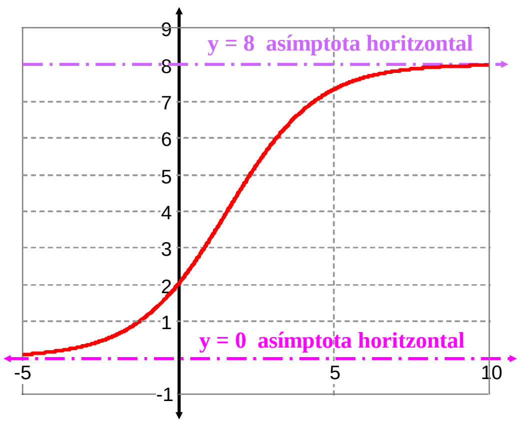
  Quan x tendeix a $+\infty$, les imatges tendeixen a 8. Matemàticament s'escriu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{1+3\cdot(1/2)^{x}} = \mathbf{8}$.

  La recta $y = 8$ és asímptota horitzontal de la corba, limitant-la superiorment.

- De la mateixa manera els valors estan limitats inferiorment per 0:

  Quan x tendeix a $-\infty$, les imatges tendeixen a 0. Diem que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8}{1+3\cdot(1/2)^{x}} = \mathbf{0}$.

  La recta $\mathbf{y = 0}$ és també asímptota horitzontal de la corba, i la limita per baix.



Exemple 13

La població humana mundial segueix un creixement exponencial que necessàriament tindrà un fre. Suposem que la capacitat poblacional de la Terra és de 12000 milions d'habitants (límit superior que assumim) i que la població mundial, en milions d'habitants, s'ajusta a una ***funció logística***:

$$\mathbf{C(x)} = \frac{\mathbf{12\,000}}{\mathbf{1 + k \cdot a^{x}}}, \quad \text{per a } \mathbf{x} \geq 0$$

sent **x** el nombre d'anys des de 1960.

(A) Obtenim els valors de k i de a perquè aquesta funció s'ajuste als 3 000 milions de persones de 1960 i als 4000 milions de 1975.

(B) Amb la funció obtinguda, quina és la població per a l'any 2020?

Segons el significat de la variable x, l'any 1960 és x = 0, l'any 1975 és x = 15 i el 2020 és x = 60.

(A) Volem que C(0) = 3000 i que C(15) = 4000:

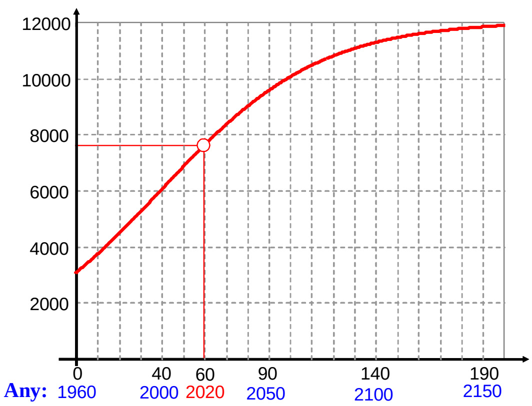
$$C(0) = 3000 \iff \frac{12\,000}{1 + k\,a^0} = 3000 \iff \frac{12000}{3000} = 1 + k\,a^0 \iff 4 = 1 + k \iff \mathbf{k = 3}$$

$$C(15) = 4000 \overset{\mathbf{k=3}}{\iff} \frac{12\,000}{1 + 3a^{15}} = 4000 \iff \frac{12000}{4000} = 1 + 3\,a^{15} \iff 3 = 1 + 3\,a^{15}$$

$$\iff 3\,a^{15} = 2 \iff a^{15} = \frac{2}{3} \iff \mathbf{a} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\mathbf{1/15}}$$

La funció logística que s'ajusta a les dades és:

$$\mathbf{C(x)} = \frac{\mathbf{12\,000}}{\mathbf{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{x/15}}}, \quad \forall \mathbf{x} \geq 0$$



(B) La població en 2020 és el valor de C(x) en x = 60:

$$C(60) = \frac{12\,000}{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{60/15}} = \frac{12\,000}{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}$$

$$= \frac{12\,000}{1 + \frac{16}{27}} = \frac{12\,000}{\frac{43}{27}} \simeq \mathbf{7534\ milions}$$

Aquestes funcions logístiques solen anomenar-se també ***funcions de creixement frenat***.

16 Quina és l'asímptota que limita superiorment la funció de l'exemple anterior? Quin significat poblacional té? Quina població hi haurà l'any 2100?

17 Troba el valor de la constant k i de la base a perquè la funció $f(x) = \frac{12\,000}{1 + k \cdot a^{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ verifique que f(0) = 2000 i f(8) = 11770.11494.

18 Modelitza una funció logística f(x) que tinga un límit superior de 250, f(0) = 20 i f(10) = 111.8666787.

5.6 Els logaritmes

Exemple 14

- En apartats anteriors hem resolt equacions exponencials, com per exemple:

$$2^x = 16 \iff 2^x = 2^4 \to \mathbf{x = 4}$$

La solució x = 4 és l'exponent a què cal elevar la base 2 per a obtenir el nombre 64. S'anomena també ***logaritme en base* 2 *del nombre* 16**, i s'expressa $\mathbf{\log_2 16} = \mathbf{4}$.

- De la mateixa manera, la solució de l'equació

$$2^x = 64 \iff 2^x = 2^6 \Rightarrow \mathbf{x = 6 = \log_2 64} \quad \textbf{\textit{logaritme en base 2 del nombre 64}}$$

- També la solució de l'equació

$$2^x = \frac{1}{2} \iff 2^x = 2^{-1} \to \mathbf{x = -1 = \log_2 \frac{1}{2}} \quad \textbf{\textit{logaritme en base 2 del nombre 1/2}}$$

- La solució de l'equació

$$2^x = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \iff 2^x = 2^{\frac{-2}{5}} \to \mathbf{x = -\frac{2}{5} = \log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{4}}} \quad \textbf{\textit{logaritme en base 2 del nombre}}\ \mathbf{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}$$

- Però no sempre podem expressar la solució d'una equació d'aquest tipus per mitjà d'un nombre enter o fraccionari. Per exemple, l'equació següent té solució, però és un nombre irracional:

$$2^x = 3 \iff \mathbf{x = \log_2 3} \quad \textbf{\textit{logaritme en base 2 del nombre 3}}$$

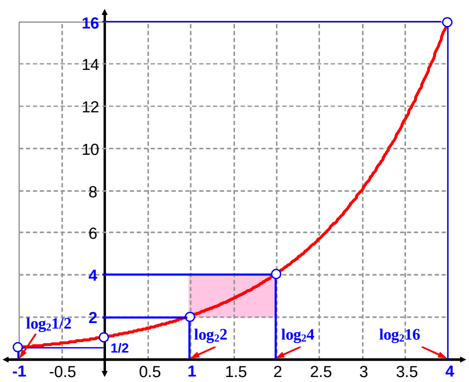
Calculem un valor aproximat d'aquest nombre a partir de la gràfica de la funció exponencial de base 2 i amb ajuda de la calculadora:

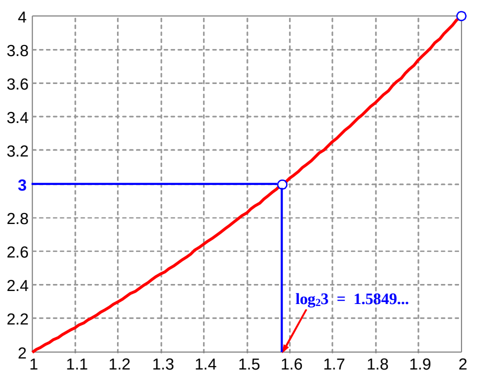
(1) $\left.\begin{array}{l} 2^0 = 1 \\ 2^1 = 2 \end{array}\right\} \to \log_2 3 \in \left]1, 2\right[$

(2) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.5} \cong 2.8284 \\ 2^{1.6} \cong 3.0314 \end{array}\right\} \to \log_2 3 \in \left]1.5, 1.6\right[$

(2) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.58} \cong 2.9897 \\ 2^{1.59} \cong 3.0105 \end{array}\right\} \to \log_2 3 \in \left]1.58, 1.59\right[$

(4) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.584} \cong 2.99799 \\ 2^{1.585} \cong 3.00007 \end{array}\right\} \to \log_2 3 \in \left]1.584, 1.585\right[$





Un valor aproximat per defecte és $\mathbf{\log_2 3} \simeq \mathbf{1.5849625}$ amb el qual obtenim $\mathbf{2^{1.5849625}} \simeq \mathbf{2.99999999985}$.

El nombre logarítmic

Donat b > 0, l'única solució de l'equació $\mathbf{a^x = b}$, amb a > 0 i a ≠ 1, és un nombre real, anomenat ***logaritme en base* a *de* b**, representat per $\mathbf{\log_a b}$:

$$\mathbf{x = \log_a b} \quad \text{si i només si} \quad \mathbf{a^x = b}$$

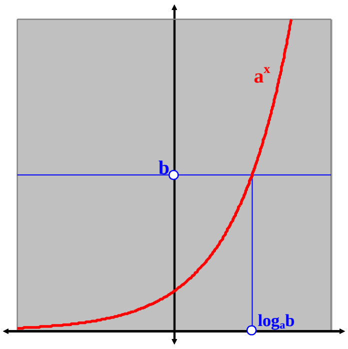
Si la base és **a = 10**, s'anomena ***logaritme decimal*** i es representa per $\mathbf{\log b = \log_{10} b}$.

Si la base és **a = e**, s'anomena ***logaritme neperià*** i es representa per $\mathbf{\ln b = \log_e b}$.

La definició del nombre logaritme és possible perquè la funció exponencial $f(x) = a^x$ **és injectiva**:

$\forall b > 0$ l'equació $\mathbf{a^x = b}$ **té solució única** (el logaritme en base a de b)

Les rectes horitzontals només tallen una vegada la gràfica d'una funció injectiva.



Exemple 15

Calculem el valor exacte dels següents logaritmes resolent l'equació exponencial equivalent:

- $\log_3 27 = x \iff 3^x = 27 \iff 3^x = 3^3 \Rightarrow \mathbf{x = 3} \Rightarrow \mathbf{\log_3 27 = 3}$
- $\ln e^{-3} = x \iff e^x = e^{-3} \iff \mathbf{x = -3} \Rightarrow \mathbf{\ln e^{-3} = -3}$
- $\log_5 \frac{1}{625} = x \iff 5^x = \frac{1}{625} \iff 5^x = 5^{-4} \Rightarrow \mathbf{x = -4} \Rightarrow \mathbf{\log_5 \frac{1}{625} = -4}$
- $\log 0.00001 = x \iff 10^x = 0.00001 \iff 10^x = 10^{-5} \Rightarrow \mathbf{x = -5} \Rightarrow \mathbf{\log 0.00001 = -5}$
- $\log \sqrt[3]{100} = x \iff 10^x = \sqrt[3]{100} \iff 10^x = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathbf{x = \frac{2}{3}} \Rightarrow \mathbf{\log \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}}$
- $\log_{1/2} 256 = x \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x = 256 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^8 \iff 2^{-x} = 2^8 \Rightarrow \mathbf{x = -8 = \log_{1/2} 256}$

19 Calcula els següents logaritmes:

(A) $\log_2 1024$	(B) $\log_4 2$	(C) $\log_2 \sqrt[5]{8}$	(D) $\log_5 0.04$	(E) $\log_8 16$	(F) $\log_{1/4} 2$
(G) $\log 10000$	(H) $\log 0.001$	(I) $\log_2 \sqrt[3]{4}$	(J) $\log_3 \sqrt[5]{9}$	(K) $\log_{1/10} 0.001$	(L) $\ln e^4$
(M) $\ln e^{-3}$	(N) $\log_{1/e} e^{-4}$	(Ñ) $\log_5 5^{-16}$	(O) $\log_5 625^{-2}$	(P) $\log_{1/5} 125$	(Q) $\log_a a^2$

5.7 Propietats dels logaritmes

(P1) $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ (P2) $\mathbf{\log_a a = 1}$ (P3) $\mathbf{\log_a \frac{1}{a} = -1}$ (P4) $\mathbf{\log_a a^p = p}$

Són conseqüències immediates de la definició. Plantegem les equacions equivalents per a demostrar-les:

(1) $\log_a 1 = x \iff a^x = 1 \iff a^x = a^0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \mathbf{\log_a 1 = 0}$

(2) $\log_a a = x \iff a^x = a \iff a^x = a^1 \rightarrow x = 1 \rightarrow \mathbf{\log_a a = 1}$

(3) $\log_a \frac{1}{a} = x \iff a^x = \frac{1}{a} \iff a^x = a^{-1} \rightarrow x = -1 \rightarrow \mathbf{\log_a \frac{1}{a} = -1}$

(4) $\log_a a^p = x \iff a^x = a^p \rightarrow x = p \rightarrow \mathbf{\log_a a^p = p}$

(P5) Del logaritme del producte: $\mathbf{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

(P6) Del logaritme del quocient: $\mathbf{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

(P7) Del logaritme d'una potència: $\mathbf{\log_a x^y = y \cdot \log_a x}$

Les demostracions es dedueixen a partir de les propietats de les potències.

Anomenem u al nombre logaritme $\log_a x$, i anomenem v al nombre logaritme $\log_a y$. Tenim:

$$u = \log_a x \iff a^u = x \qquad v = \log_a y \iff a^v = y$$

(P1) Com que $x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \rightarrow x \cdot y = a^{u+v}$

aleshores u + v és el logaritme en base a de x · y:

$$u + v = \log_a (x \cdot y) \iff \mathbf{\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)}$$

(P2) Com que $\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$

per la qual cosa u – v és el logaritme en base a de $\frac{x}{y}$:

$$u - v = \log_a \frac{x}{y} \iff \mathbf{\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}}$$

(P3) $u = \log_a x \iff a^u = x \iff \left(a^u\right)^y = x^y \iff \mathbf{a^{y \cdot u} = x^y}$

aleshores y · u és el logaritme en base a de $\mathbf{x^y}$:

$$y \cdot u = \log_a x^y \iff \mathbf{y \cdot \log_a x = \log_a x^y}$$

Exemple 16

Les propietats anteriors permeten calcular, d'una altra manera, logaritmes:

- $\log_3 729 = \log_3 3^6 \overset{(P4)}{=} 6\ \log_3 3 \overset{(P2)}{=} 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $\log 1000000 = \log 10^6 \overset{(P4)}{=} 6 \cdot \log 10 \overset{(P2)}{=} 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $\log_5 \frac{1}{25} \overset{(P6)}{=} \log_5 1 - \log_5 5^2 \overset{(P1/P2)}{=} 0 - 2 \cdot \log_5 5 \overset{(P2)}{=} \mathbf{-2}$
- $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \overset{(P6)}{=} \ln 1 - \ln \sqrt[3]{e^2} \overset{(P1/P2)}{=} 0 - \ln e^{2/3} \overset{(P4)}{=} -\frac{2}{3} \ln e \overset{(P2)}{=} -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\mathbf{\frac{2}{3}}$

➢ Propietat del canvi de base

La calculadora només proporciona un valor aproximat del logaritme decimal o del logaritme neperià de qualsevol nombre, però no en altres bases. Per a fer açò, utilitzem la ***propietat del canvi de base***:

Per a qualssevol dues bases a > 0, b > 0, es verifica $\mathbf{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$

Si anomenem $y = \log_b x$ tenim $b^y = x$ d'on $\log_a b^y = \log_a x$. Per la propietat (P6):

$$y \cdot \log_a b = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Exemple 17

Calculem el valor $\log_5 12$. El canvi de base permet fer-ho amb la calculadora, tant en base 10 com e:

Canviant de la base b = 5 a la base a = 10	Canviant de la base b = 5 a la base a = e
$\log_5 12 = \frac{\log 12}{\log 5} = \frac{1.079181}{0.698970} = 1.543959$	$\log_5 12 = \frac{\ln 12}{\ln 5} = \frac{2.484906}{1.609437} = 1.543959$

20 Aplicant les propietats de les potències calcula els següents logaritmes:

(A) $\log_8 4096$ (B) $\log_3 \frac{1}{729}$ (C) $\ln \frac{1}{e^5}$ (D) $\log_{1/4} 256$ (E) $\log_5 \sqrt[4]{125}$ (F) $\log_{1/16} \sqrt[7]{256}$

21 Aplicant el canvi de base calcula els següents logaritmes: (A) $\log_6 34$ (B) $\log_{1/2} 50$ (C) $\log_{2/3} \sqrt[4]{125}$

22 Comprova la falsedat de les següents igualtats:

(A) $\log(x+y) = \log x \cdot \log y$ (B) $\log(x+y) = \frac{\log x}{\log y}$ (C) $\log(nx) = n \log x$

➢ Resolució de l'equació exponencial $a^x = b$

Si $a > 0$ i $a \neq 1$ $\Rightarrow$ l'equació $a^x = b$ només té solució (que és única) per a $b > 0$:

$$x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

- Com que $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, és impossible que l'equació $a^x = b$ tinga solució si $b \leq 0$.
- Com que $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ és injectiva, aleshores si $b > 0$, l'equació $a^x = b$ té solució única. Aquesta solució s'expressa com

$$x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Vegem en el següent exemple com obtenim el valor de la incògnita d'una equació exponencial.

Exemple 18

Quant de temps hem de tenir invertit un capital de 6000 €, al tipus d'interès compost anual del 3.5%, amb venciment mensual, per a obtenir un capital final de 8510 €?

L'expressió que permet obtenir el capital final és

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$$

on C_0 és el capital inicial (6.000 €), r és el tipus d'interès en tant per un (r = 0.035) i t és el temps mesurat en anys.

Substituint tenim

$$8510 = 6000\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12t} \quad \Rightarrow \quad \frac{8510}{6000} = \left(\frac{12.035}{12}\right)^{12t}$$

Prenem logaritmes neperians en els dos membres i apliquem la propietat P4 per a aïllar t:

$$\ln\frac{8510}{6000} = \ln\left(\frac{12.035}{12}\right)^{12t} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{8510}{6000} = 12t \cdot \ln\frac{12.035}{12} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{12}\frac{\ln\frac{8510}{6000}}{\ln\frac{12.035}{12}}$$

$$t = \frac{1}{12}\frac{1.418333}{0.002912} \simeq \frac{1}{12}\cdot 120 = \mathbf{10\ anys}$$

23 Quan aconseguirà la Terra una població de 11000 milions d'habitants? Utilitza la funció logística de l'exemple 13, $P(x) = \dfrac{12000}{1+3\left(\frac{2}{3}\right)^{x/15}}$.

24 Quant de temps hem de tenir invertit un capital de 11 000 €, al tipus d'interès compost anual del 5% i venciment mensual, per a obtenir un capital final de 15598.4€? I si el venciment d'interessos es produeix setmanalment?

➤ Equacions logarítmiques

Exemple 19

La definició de logaritme, les seues propietats i la relació amb les exponencials permeten resoldre determinades equacions, les logarítmiques.

- $4\log x = 5 + \log \frac{x}{100} \Leftrightarrow \log x^4 - \log \frac{x}{100} = 5 \Leftrightarrow \log \frac{100x^4}{x} = 5 \Leftrightarrow \log(100x^3) = 5$

$$10^5 = 100x^3 \Leftrightarrow 10^3 = x^3 \Leftrightarrow x = 10$$

- $\log(5x + 2) - \log 2 = \log(x + 4) \Leftrightarrow \log \frac{5x+2}{2} = \log(x + 4) \Leftrightarrow \frac{5x+2}{2} = x + 4$

$$5x + 2 = 2x + 8 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

Les propietats també permeten resoldre sistemes d'equacions en què alguna de les equacions és logarítmica:

- $\left.\begin{matrix} x - y = 9 \\ \log x - 2\log y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ \log x - \log y^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ \log \frac{x}{y^2} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ \frac{x}{y^2} = 10^1 \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ x = 10y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ 9 + y = 10y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ 10y^2 - y - 9 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9 + y \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Observa que l'equació de segon grau $10y^2 - y - 9 = 0$ té una altra solució, $y = -9/10$, però no és vàlida perquè no existeix $\log(-9/10)$.

- $\left.\begin{matrix} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 75 \\ 2^x : 2^y = 32 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 75 \\ 2^{x-y} = 2^5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 75 \\ 2^{x-y} = 2^5 \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 75 \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x + y) + \log 5 = \log 75 \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x + y) = \log 75 - \log 5 \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \log(x + y) = \log \frac{75}{5} \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x + y) = \log 15 \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 5 \end{matrix}\right\}$$

25 Resol les següents equacions i sistemes:

(A) $\log x + \log 4 = 1$ (B) $\log(x + 1) - \log(x - 1) = 2$ (C) $\log x - \log 2 = 2\log(x - 3)$

(D) $\log(x + 3) - \log(4 - x) = 1$ (E) $\log(3x - 1) + \log 2 = 2\log(x + 1)$ (F) $\log_2(x + 2) - \log_2 2 = 5$

(G) $\left.\begin{matrix} x - y = 9 \\ \log x - \log y = 1 \end{matrix}\right\}$ (H) $\left.\begin{matrix} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{matrix}\right\}$ (I) $\left.\begin{matrix} 2\log x + 3\log y = 5 \\ 3\log x - 2\log y = 1 \end{matrix}\right\}$ (J) $\left.\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{matrix}\right\}$

(K) $\left.\begin{matrix} \log x + 3\log y = 8 \\ \log(x^2 : y) = \log 100 \end{matrix}\right\}$ (L) $\left.\begin{matrix} 2^{x+1} = 2^{y-1} \\ \log x - \log y = \log 2 \end{matrix}\right\}$ (M) $\left.\begin{matrix} 2^{x+1} = 2^{y-1} \\ \log(x : y) = \log 2 \end{matrix}\right\}$ (N) $\left.\begin{matrix} 2^{x+1} = 8^{y-1} \\ \log(x : y) = \log 15 \end{matrix}\right\}$

5.8 Funcions logarítmiques

Sabem que la funció exponencial $f(x) = a^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ és injectiva i, per tant, la seua correspondència recíproca és una funció. Aquesta funció recíproca s'obté al aïllar x en l'equació y = f(x):

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = \log_a y}$$

Per tant, mentre la funció exponencial associa a cada nombre real **x** la potència a^x, la seua recíproca associa a cada nombre positiu **y** el seu logaritme en base a. Per això l'anomenem ***funció logarítmica***.

Anomenem ***funció logarítmica de base* a** (amb a > 0, a ≠ 1) a la funció que a cada nombre positiu x li associa el seu logaritme en base a:

$$\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \mathbf{g(x) = \log_a x}, \ \forall \mathbf{x > 0}$$

És la funció recíproca de la funció exponencial de base a.

Exemple 20

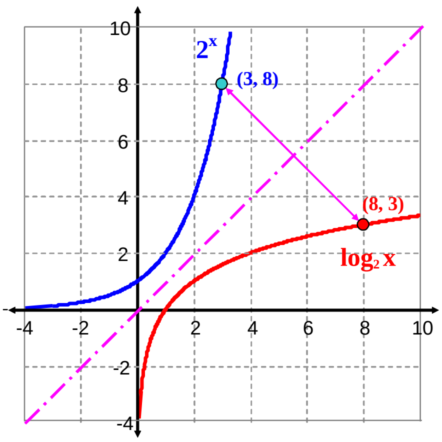
Obtenim dues taules de valors comparatives de funcions exponencials amb les seues recíproques, les funcions logarítmiques. Observa com els orígens d'una funció són les imatges de l'altra, i al revés. Per això les seues gràfiques són simètriques respecte de la recta y = x.

$\mathbf{f(x) = 2^x, \forall x \in \mathbb{R}}$

x	f(x)
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

$\mathbf{g(x) = \log_2 x, \forall x > 0}$

x	g(x)
1/8	–3
1/4	–2
1/2	–1
1	0
2	1
4	2
8	3

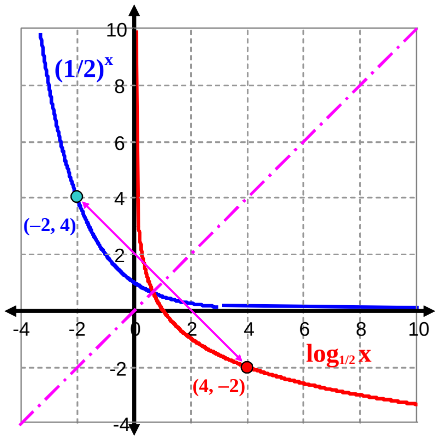


$\mathbf{f(x) = (1/2)^x, \forall x \in \mathbb{R}}$

x	g(x)
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

$\mathbf{g(x) = \log_{1/2} x, \forall x > 0}$

x	g(x)
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
1/2	1
1/4	2
1/8	3



➢ Propietats de les funcions logarítmiques

Exemple 21

Comparem les gràfiques d'algunes funcions logarítmiques per a observar les propietats donades a continuació.

x	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log_{10} x$	–2	–1	0	1	2	3

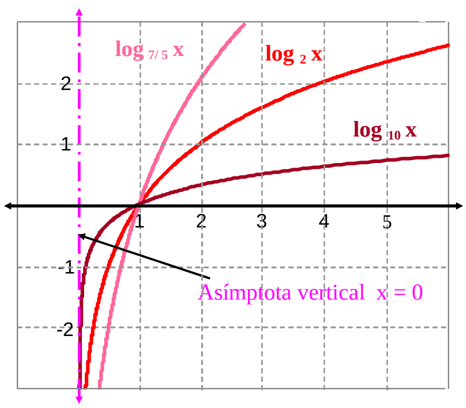
x	100	10	1	0.1	0.01	0.001
$\log_{1/10} x$	–2	–1	0	1	2	3

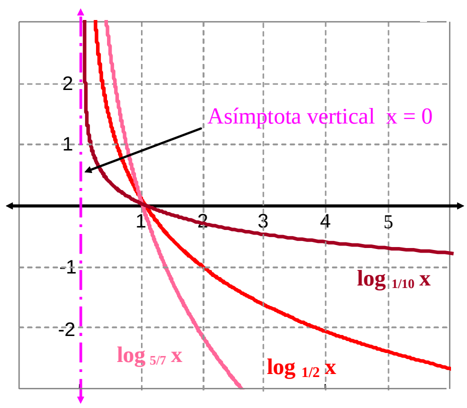
x	1/4	1/2	1	2	4	8
$\log_2 x$	–2	–1	0	1	2	3

x	4	2	1	1/2	1/4	1/8
$\log_{1/2} x$	–2	–1	0	1	2	3

x	$(5/7)^2$	5/7	1	7/5	$(7/5)^2$	$(7/5)^2$
$\log_{7/5} x$	–2	–1	0	1	2	3

x	$(7/5)^2$	7/5	1	5/7	$(5/7)^2$	$(5/7)^3$
$\log_{5/7} x$	–2	–1	0	1	2	3





La funció logarítmica $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ verifica les següents propietats:

- $\mathbf{g(1) = \log_a 1 = 0}$ i $\mathbf{g(a) = \log_a a = 1} \Rightarrow$ **la gràfica passa pels punts (1, 0) i (a, 1)**
- El domini és $\mathbf{D_g =]\ 0, +\infty\ [}$ i el rang és $\mathbf{R_f} = \mathbb{R}$.
- $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ **és creixent si a > 1**, i **decreixent si a < 1**.
- La recta **r: x = 0 és asímptota vertical**.

26 De la mateixa forma que en l'exemple anterior, representa gràficament sobre els mateixos eixos de coordenades els següents grups de funcions, i obtén el domini de totes elles:

(A) $f(x) = \log_{3/2} x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \log_5 x$

(B) $f(x) = \log_{2/3} x$, $g(x) = \log_{1/e} x$, $h(x) = \log_{1/5} x$

(C) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x + 1)$, $h(x) = \ln(x – 1)$

(D) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(2x)$, $h(x) = \ln(x/2)$

(E) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(–x)$

(F) $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \ln|x|$

5.9 Taxa anual equivalent TAE

Diferents tipus d'interès, distints venciments dels mateixos, etc. condueixen a que el consumidor habitual tinga una gran confusió a l'hora de valorar allò que li convé. La ***taxa anual equivalent*** homogeneïtza tota la casuística per a facilitar la comparació.

Anomenem ***taxa anual equivalent*** d'una inversió al tipus d'interès anual a què equival la inversió realitzada si els interessos (que inclouen comissions per estudi, obertura o cancel·lació) capitalitzaren anualment.

Exemple 22

Una caixa d'estalvis estableix que el tipus d'interès carregat al client pels seus descoberts (estar sense saldo quan es presenten rebuts al cobrament) és del 24% anual compost mensualment.
A quin tipus d'interès compost anual equival?, o d'altra forma, quin és el seu TAE?

Cada euro es converteix en un mes en $1+\frac{0.24}{12} = 1.02$ €.

I al cap d'un any en $\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{12} = (1.02)^{12} = 1.26824$ €.

Un tipus d'interès TAE que donara el mateix capital final, a partir de 1 euro, amb venciment anual, seria:

$$(1 + \text{TAE})^1 = (1.02)^{12} = 1.26824 \quad \Rightarrow \quad 1 + \text{TAE} = 1.26824 \quad \Rightarrow \quad \text{TAE} = 0.26824$$

En tant per cent: **TAE = 26.824%**.

L'exemple anterior permet obtenir l'expressió per a calcular el TAE d'una inversió fàcilment.

El TAE d'una inversió s'obté de l'expressió

$$1 + \text{TAE} = \left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$$

on r és el tipus d'interès compost anual, amb n capitalitzacions al cap de l'any.

Trobem el TAE de dues inversions, al tipus d'interès compost anual del 6%, però en el banc A es capitalitza trimestralment i en el banc B mensualment.

Banc A

$$1 + \text{TAE} = \left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \textbf{TAE = 6.136\%}$$

r = R/100 = 6/100 i n = 4

Banc B

$$1 + \text{TAE} = \left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12} \quad \Rightarrow \quad \textbf{TAE = 6.167\%}$$

r = R/100 = 0.06/100 = 0.06 i n = 12

27 Troba el TAE d'una inversió realitzada a interès compost semestral del 3% i venciment mensual.

28 Què prefereixes, dipositar els teus diners al 12% anual i venciment mensual o al 1% mensual i venciment diari?

29 El TAE d'una inversió és el 5%. Quin tipus d'interès mensual té?

5.10 Anualitats de capitalització

Exemple 23

Antoni vol estalviar per a comprar un cotxe. Pensa que cada 1 de gener, des de 2010 fins a 2014, podrà ingressar en un compte bancari 3 000 €. Si el compte ofereix un tipus d'interès compost anual del 5%, quants diners haurà capitalitzat fins l'1 de gener de 2015?

Data d'aportació	Capital aportat: anualitat	Capital final de cada aportació 01-01-2015
01-01-2010	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F1} = 3000\ (1 + 0.05)^5}$ **€**
01-01-2011	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F2} = 3000\ (1 + 0.05)^4}$ **€**
01-01-2012	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F3} = 3000\ (1 + 0.05)^3}$ **€**
01-01-2013	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F4} = 3000\ (1 + 0.05)^2}$ **€**
01-01-2014	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F5} = 3000\ (1 + 0.05)^1}$ **€**

D'aquesta forma, la capitalització total obtinguda per Antoni és

$$\mathbf{C} = C_{F1} + C_{F2} + C_{F3} + C_{F4} + C_{F5} =$$

$$= 3000\ (1 + 0.05)^5 + 3000\ (1 + 0.05)^4 + 3000\ (1 + 0.05)^3 + 3000\ (1 + 0.05)^2 + 3000\ (1 + 0.05) =$$

$$= 3000\ [(1.05)^5 + (1.05)^4 + (1.05)^3 + (1.05)^2 + (1.05)] \underset{(1)}{=} 3000\ \frac{(1.05)^6 - (1.05)^1}{1.05 - 1}$$

$$\mathbf{C} = 3000\ \frac{(1.05)^6 - (1.05)}{0.05} = 3000 \cdot 5.801912812 = \mathbf{17405.74\ €}$$

(1) Aquest quocient és la suma dels 5 termes $(1.05) + (1.05)^2 + (1.05)^3 + (1.05)^4 + (1.05)^5$ d'una progressió geomètrica amb primer terme 1.05 i raó 1.05. Pots veure la fórmula en el capítol 6.

La capitalització obtinguda per una anualitat **A** al tipus d'interès compost anual **r**, expressat en tant per un, durant t anys ve donada per l'expressió:

$$\mathbf{C = A\,\frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r}}$$

L'estalvi es pot fer en períodes de temps diferents a l'any; apareixen així, per exemple, les ***mensualitats***. L'expressió de la capitalització és la mateixa però, com en casos anteriors, el tipus d'interès seria mensual ($r_m = r/12$) i el temps es donaria en mesos (12t, si t foren anys).

30 Quin capital acumularem si trimestralment, durant 2 anys i mig, ingressem en el banc 2 000 € al tipus d'interès compost trimestral del 1.5%?

31 Quique és un apassionat de les festes de moros i cristians d'Alcoi. Necessita per a cobrir les festes del pròxim any 2000 € per la qual cosa realitza, durant 51 setmanes, un *montepío* (acumulació de capital). Quina quantitat haurà d'ingressar setmanalment per a cobrir les seues despeses al 3% d'interès compost anual?

5.11 Anualitats d'amortització

Ara tractem el que habitualment anomenem ***pagament a terminis***: Amortitzem un deute mitjançant pagaments periòdics iguals (***anualitats***, ***mensualitats***...) al llarg d'un cert temps.

Exemple 24

Yolanda va comprar el 05/02/2000 una casa per 100 000 €. Com que no disposava de diners sol·licita un préstec que és concedit immediatament a un tipus d'interès compost anual del 4%. Ha d'amortitzar-lo en 25 anualitats (fins el 05/02/2025). Quina anualitat haurà de pagar cada un dels 25 anys per a saldar el deute?

El problema es resol pensant en dos contractes diferents:

(A) Quin capital final C_F pagaria al cap de 25 anys si no tornara quantitat alguna del seu deute D (100 000 €) fins a aquest instant?

(B) Constituir una capitalització amb anualitats de A euros fins a aconseguir acumular un capital equivalent al capital final C_F que produirà el deute D de l'apartat A.

(A) El deute D generarà un capital final acumulat al cap dels 25 anys de:

$$\mathbf{C_F} = 100000\,(1+0.04)^{25} = \mathbf{266\,583.63\ €} \qquad (1)$$

(B) Hem de calcular una anualitat de forma que transcorreguts 25 anys, capitalitzem un total de 266 583.63 €:

Data de l'aportació	Capital aportat: anualitat	Capital final aportat a 05-02-2025
05-02-2000	**Cap; d'altra forma sol·licitaria un préstec menor**	....
05-02-2001	**A €**	$\mathbf{C_{F1} = A\,(1+0.04)^{24}}$ **€**
05-02-2002	**A €**	$\mathbf{C_{F2} = A\,(1+0.04)^{23}}$ **€**
....	....	....
05-02-2024	**A €**	$\mathbf{C_{F24} = A\,(1+0.04)^{1}}$ **€**
05-02-2025	**A €**	$\mathbf{C_{F25} = A}$ **€**

Observa que la capitalització realitzada per Yolanda no és exactament igual a les anualitats de capitalització vistes anteriorment; allí al començar el període ja es col·loca la primera anualitat i l'última es diposita l'any anterior al reintegrament del capital. Ací la primera anualitat es col·loca transcorregut un any (se suposa que no té diners perquè d'altra forma demanaria un préstec menor) i l'última és el pagament final amb el qual cancel·la el deute.

$$\mathbf{C_F} = C_{F1} + C_{F2} + C_{F3} + \ldots + C_{F24} + C_{F25} = A\,(1+0.04)^{24} + A\,(1+0.04)^{23} + \ldots + A\,(1+0.04) + A =$$

$$= A\,[(1.04)^{24} + (1.04)^{23} + \ldots + (1.04) + 1] \underset{(*)}{=} A\,\frac{(1.04)^{25}-1}{1.04-1} = \mathbf{A \cdot 41.64590829\ €} \qquad (2)$$

(*) El quocient anterior és la suma de 25 termes $(1.04)^0 + \ldots + (1.04)^{23} + (1.04)^{24}$ d'una progressió geomètrica amb primer terme $1 = (1.04)^0$ i raó 1.04. Pots veure la fórmula en el capítol 6.

Ara, els dos contractes s'han de cancel·lar entre sí; igualant els capitals finals C_F de (1) i (2) tenim:

$$A\,\frac{(1.04)^{25}-1}{1.04-1} = 100000\,(1+0.04)^{25} \quad \Rightarrow \quad A \cdot 41.64590829 = 266\,583.63 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 6401.20\ €}$$

Yolanda paga 25 anualitats de **6 401.20 €**, des del 05-02-2001 fins el 05-02-2025, i genera una capitalització exactament igual a la que produeix el seu deute de 100000 €, contret el 05-02-2000, al comprar la vivenda.

Un deute **D** contret a un tipus d'interès compost anual **r**, en tant per un, s'amortitza mitjançant **t** anualitats iguals **A** obtingudes de l'expressió:

$$A\frac{(1+r)^t-1}{r} = D\,(1+r)^t \quad \text{o de forma equivalent} \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{D\cdot r\cdot(1+r)^t}}{\mathbf{(1+r)^t-1}}$$

La quantitat a pagar A pot fer-se amb altres periodicitats, per exemple, en mesos, i tindríem les ***mensualitats***. L'expressió corresponent serà anàloga però, com en casos anteriors, el tipus d'interès serà mensual ($r_m = r/12$) i el temps vindrà en mesos (12t, amb t anys).

Exemple 25

Una empresa compra un equip informàtic el cost total del qual és de 7 000 €. El banc li presta els diners a un tipus d'interès compost anual del 4.8% i el deute ha d'haver-se satisfet en un termini de 2 anys i mig. Quina mensualitat ha de pagar l'empresa?

El deute contret D és de 7 000 €. El tipus d'interès en tant per un és r = 4.8/100 = 0.048. Com parlem de mensualitats el tipus d'interès mensual és $r_m = r/12 = 0.004$. El temps t = 2.5 anys, és a dir, 2.5 · 12 = 30 mesos.
La mensualitat A serà:

$$A = \frac{D\cdot r_m\cdot(1+r)^{12t}}{(1+r)^{12t}-1} = \frac{7000\cdot 0.004\cdot(1+0.004)^{30}}{(1+0.004)^{30}-1} = 248.08\ €$$

Exemple 26

Joan ha comprat un cotxe per 20 000 €. El banc li ha fet un préstec per tot el capital a un tipus d'interès compost anual del 6.6%. Si abona una mensualitat de 534.61 €, quant temps tardarà en pagar el seu préstec?

El tipus d'interès en tant per un és r = 6.6/100 = 0.066. Com que parlem de mensualitats el tipus d'interès mensual serà $r_m = r/12 = 0.0055$.

$$A = \frac{D\cdot r_m\cdot(1+r)^{12t}}{(1+r)^{12t}-1} \Rightarrow 534.61 = \frac{20000\cdot 0.0055\cdot(1+0.0055)^{12t}}{(1+0.0055)^{12t}-1} \Rightarrow 534.61 = \frac{110\cdot(1.0055)^{12t}}{(1.0055)^{12t}-1}$$

$$534.61\cdot\left[(1.0055)^{12t}-1\right] = 110\cdot(1.0055)^{12t} \Rightarrow 534.61\cdot(1.0055)^{12t} - 534.61 = 110\cdot(1.0055)^{12t}$$

$$(534.61-110)\cdot(1.0055)^{12t} = 534.61 \Rightarrow (1.0055)^{12t} = \frac{534.61}{534.61-110} = 1.2591$$

Aplicant-hi logaritmes:

$$\ln(1.0055)^{12t} = \ln 1.2591 \Rightarrow 12t\cdot\ln 1.0055 = \ln 1.2591 \Rightarrow 12t = 42 \Rightarrow \mathbf{t = 3.5\ anys}$$

32 Comprem a terminis una moto de 6 600 €. Quin capital hem d'amortitzar semestralment si el préstec es va realitzar per 5 anys al 3% d'interès compost anual?

33 Quants mesos es requereixen si volem saldar un deute de 3000 euros al tipus d'interès compost anual del 12% i amb mensualitats de 266.54 euros?

34 Necessitem 50000 euros per a comprar una vivenda, amb un préstec a 20 anys i amortització mensual. El banc A cobra un tipus d'interès compost anual del 4%; el banc B un tipus d'interès mensual del 0.3%. En quin banc convé sol·licitar el préstec i quina és l'amortització mensual?

Problemes del capítol 5

1 Calcula les següents potències:

(A) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$ (B) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (C) $\left(\frac{-1}{5}\right)^0$ (D) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ (E) $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-3}$ (F) $\left(\frac{1}{-5}\right)^{-2}$ (G) $\left(\frac{3}{-4}\right)^{-3}$

2 Efectua les següents operacions amb potències:

(A) $\left(2^4\right)^3$ (B) $\left(2^4\right)^{-3}$ (C) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^3$ (D) $\left(-\left(\frac{3^2}{4}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (E) $\left(3^3\cdot 3^4\cdot 3^{-4}\right)^5$ (F) $\left(3^3\cdot 4^3\cdot 2^3\right)^5$

3 Expressa en base 2 les següents potències:

(A) 4^3 (B) 8^4 (C) 4^{100} (D) 4^x (E) 8^x (F) $\left(\sqrt{2}\right)^4$

(G) $\left(\sqrt{2}\right)^5$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x$ (I) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ (J) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (K) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (L) $\left(\frac{1}{4}\right)^x$

4 Expressa en base 4 les següents potències:

(A) 2^4 (B) 2^5 (C) 8^4 (D) 16^x (E) 2^x (F) 8^x

(G) $\left(\sqrt{2}\right)^5$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x$ (I) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ (J) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (K) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (L) 8^{-x}

5 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $2^x = \frac{1}{8}$ (B) $4^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $5^x = 1$ (D) $9^x = 3$ (E) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5}$

(F) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 2$ (G) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \sqrt[4]{2}$ (I) $16^x = 4$ (J) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

6 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $2^{2x} = \frac{1}{8}$ (B) $4^{2x+1} = 2$ (C) $5^{3x-1} = 1$ (D) $3^{x^2} = 9$

(E) $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} = \frac{2}{5}$ (F) $7^{x^2-1} = 1$ (G) $2^{3x-2} = 16$ (H) $4^{2x} = \sqrt{2}$

7 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $3^{2x-2} = 9^{1-x}$ (B) $8^{3x^2-5} = 64^{-x}$ (C) $4^{x+7} = 2^{2-x}$ (D) $4^x = 2^x$

(E) $3^{2x-2} = 3\cdot 9^{1-x}$ (F) $4^{x^2+1} = 2^{x^2+5}$ (G) $27^{x+7} = 9^{2-x}$ (H) $4^x = 3^x$

8 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$ (B) $4^{x+2} + 2^{2x+2} = 40$ (C) $9^x - 7\cdot 3^x = 18$

(D) $4 + 3\cdot 2^{4x-1} = 100$ (E) $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0$ (F) $10\cdot 5^{x+2} + 20\cdot 5^{x+3} = 550$

9 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $\frac{450}{10+5\cdot 2^x} = 5$ (B) $\frac{150+2\cdot 5^x}{25+3\cdot 5^x} = 2$ (C) $\frac{17+2^x}{3+2^x} = 5$

(D) $\frac{300}{10+5\cdot 2^x} = 6$ (E) $\frac{45}{5+90\cdot 3^x} = 3$ (F) $\frac{5000}{8+3\cdot 2^{\frac{x}{10}}} = 25$

10 Calcula el valor exacte dels següents logaritmes:

(A) $\log_2 128$ (B) $\log_2 0.5$ (C) $\log_{0.5} 2$ (D) $\log_5 625$ (E) $\log_{64} 4$ (F) $\log 0.1$

(G) $\log_2 1024$ (H) $\log_4 2$ (I) $\log_2 \sqrt[5]{8}$ (J) $\log_5 0.04$ (K) $\log_8 16$ (L) $\log_{1/4} 2$

11 Calcula el valor exacte dels següents logaritmes:

(A) $\log 10\,000$ (B) $\log 0.001$ (C) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ (D) $\log_3 \sqrt[5]{9}$ (E) $\log_{1/10} 0.001$ (F) $\ln e^4$

(G) $\ln e^{-3}$ (H) $\log_{1/e} e^{-4}$ (I) $\log_5 5^{-16}$ (J) $\log_5 625^{-2}$ (K) $\log_{1/5} 125$ (L) $\log_a a^2$

12 Obtén el valor de x que verifica les següents equacions:

(A) $\log_2 x = 3$ (B) $\log_x 16 = 4$ (C) $\log_5 25 = x$ (D) $\log x = 2 \log x$

(E) $\log_3 x = 4$ (F) $\log_x 1000 = 3$ (G) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = x$ (H) $\log x = 1 + 2 \log x$

13 Sense utilitzar la calculadora, obtén el valor dels següents logaritmes:

(A) $\log \sqrt{10^{-3/2}}$ (B) $\log_{1/4} 16^{-4/3}$ (C) $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{27^{-2}}}$ (D) $\ln\left(\sqrt[3]{e} \cdot e^{-7/4}\right)$

14 Amb ajuda de les propietats dels logaritmes, expressa els següents logaritmes en funció de log2 y/o log3:

(A) $\log 6$ (B) $\log 12$ (C) $\log 1.5$ (D) $\log 15$ (E) $\log 72$ (F) $\log \sqrt{6}$

(G) $\log 19.2$ (H) $\log 500$ (I) $\log_2 3$ (J) $\log_3 2$ (K) $\log_6 90$

15 Expressa amb un únic logaritme, simplificant al màxim:

(A) $2\log 6 - \log 18 + \log \frac{3}{2}$ (B) $\log 24 + \log 6 - 2\log 3 - 3\log 2$.

16 Compara els nombres $\log_2 5$ i $\log_4 25$.

17 Obtén entre quins nombres enters consecutius es troben els següents logaritmes:

(A) $\log_{1/2} 150$ (B) $\log_2 150$ (C) $\log_3 150$ (D) $\ln 150$ (E) $\log 150$

18 Estableix una taula adequada de valors i representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = 4^x$ (B) $f(x) = 4^{-x}$ (C) $f(x) = 4^{x+3}$ (D) $f(x) = 4^{-x+3}$

(E) $g(x) = \log_4 x$ (F) $g(x) = \log_{1/4} x$ (G) $g(x) = \log_4(x + 2)$ (H) $g(x) = \log_{1/4}(x - 2)$

19 Resol les següents equacions exponencials i logarítmiques:

(A) $10^{2-x} = 0.001$ (B) $4^{x+2} + 2^{2x+2} = 20$ (C) $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = 0$

(D) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$ (E) $4^{x+1} + 2^{2x+2} = 2^7$ (F) $3^{2x-3} + 4 \cdot 3^{x-2} = -1$

(G) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ (H) $\log_2 x + \log_2 x^2 = 9$ (I) $\log 10^{x+1} + \log 100^{x-1} = 3$

(J) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$ (K) $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 2$

20 Resol els següents sistemes:

(A) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} \log_5 x - 3\log_5 y = 10 \\ -2\log_5 x + 4\log_5 y = 30 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x + 2\log y = 1 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$ (F) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ 3\log_2 x - 2\log_2 y = 0 \end{cases}$

21 Resol les següents equacions exponencials:

(A) $\dfrac{5000}{8+3\cdot 2^x} = 25$ (B) $\dfrac{50}{1+11\cdot 3^x} = 0.5$ (C) $\dfrac{17+2^x}{3+2^x} = 5$

22 Amb ajuda dels logaritmes, resol les següents equacions exponencials:

(A) $10^x = 5$ (B) $9^x = 5$ (C) $2+5\cdot 2^x = 10$ (D) $6+4\cdot 2^{\frac{x+1}{10}} = 90$

(E) $\dfrac{10+2^x}{1+2^x} = 5$ (F) $\dfrac{30}{5+2\cdot 3^x} = 2$ (G) $\dfrac{4-2\cdot 5^x}{2-4\cdot 5^x} = 3$ (H) $\dfrac{12000}{1+3\cdot 0.6^{x/15}} = 10000$

23 Durant un determinat període de temps, el valor d'un producte es pot modelitzar amb una funció exponencial. Inicialment, el producte valia 50 euros, i cada 3 mesos duplica el seu valor.

(A) Obtén una funció que represente el valor del producte en funció del temps transcorregut x (en mesos).

(B) Quant valdrà el producte després de dos anys?

(C) Quan valdrà el producte 5000 euros?

24 Un capital es va prestar a interès simple del R% i va produir un rendiment de 115.50 € en 7 mesos. Si, en lloc del R%, el préstec s'hagera fet al (R + 2)% haguera produït 161.70 € de interessos. Calcula el capital i el % a que es va prestar

25 El preu d'un producte al principi de ser comercialitzat era de 3 €, mentre que 3 mesos després el seu preu era de 6 €:

(A) Obtén la funció afí, $y = mx + n$, que s'ajusta a les dades anteriors.

(B) Obtén la funció quadràtica, $y = ax^2 + b$, que s'ajusta a les dades anteriors.

(C) Obtén la funció exponencial de la forma $y = Ka^x$ que s'ajusta a les dades anteriors.

(D) Obtén el preu del producte un any després de ser comercialitzat, amb cadascuna de les funcions obtingudes.

(E) Obtén el temps que ha de passar perquè el preu del producte siga de 1000 €, amb cadascuna de les funcions.

(F) Representa conjuntament les gràfiques de las tres funcions, i compara el seu creixement.

26 Un banc presta a un client baix les següents condicions:

(A) Si el banc li presta 6000 € al 3% d'interès compost anual, quina quantitat haurà de tornar transcorreguts 5 anys? I transcorreguts 10 anys?

(B) Si el banc presta al client 6000 €, al 3% d'interès compost anual durant 5 anys, quina mensualitat haurà de pagar?

(C) Si el banc deixa el client 5000 €, i 5 anys després el client torna al banc 5657 €, quin és l'interès compost anual?

(D) Quants anys han de transcórrer perquè, al 5% d'interès compost anual, un client que rep 5000 € haja de tornar 10000 €? I al 4%?

27 A quin tant per cent d'interès compost anual cal col·locar un capital perquè es triplique en 15 anys?

28 Quants anys han de passar perquè un capital col·locat al 10% d'interès compost anual es triplique? I si l'interès és del 5%?

29 La següent funció exponencial proporciona els diners que un client rep d'un banc després de t anys, quan inverteix un capital de 6000 € a l'interès compost anual r, expressat en tant per un (per exemple, r = 0.05 equival a un 5% d'interès), i venciments trimestrals

$$C(t) = 6000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t}.$$

(A) Si l'interès fora del 4%, quin capital tindrem 10 anys després?

(B) Quin seria l'interès anual que després de 10 anys proporciona un capital final de 12000€?

(C) Quants anys cal mantenir la inversió al 4% d'interès per a obtenir al final 12000€?

30 La inflació és la pèrdua del valor adquisitiu dels diners. Amb una inflació anual del 5%, productes que avui podem comprar per 1€ costarien 1.05 € un any després si no es produeixen increments per altres motius. L'expressió que proporciona el preu d'un producte x anys després, si la inflació es manté constant tots els anys, és la mateixa que la del capital per interès compost, és a dir,

$$p(x) = p_0(1 + i)^x$$

on x es mesura en anys, p_0 és el preu inicial del producte, i és la inflació en tant per un i p(x) és el preu transcorreguts x anys.

(A) Si un producte val actualment 20 €, calcula el seu preu d'ací a 10 anys, amb una inflació del 2% anual. I si és del 10% anual?

(B) Si un producte que val 15 € passa a valer 40 € transcorreguts 15 anys, calcula la inflació anual, amb el supòsit que és la mateixa tots els anys.

31 Una persona estalvia durant t anys un capital anual de 5000 € (anualitat). Si el tipus d’interès compost anual és del 3%, calcula:

(A) El capital acumulat al cap de 20 anys.

(B) Si al cap de 12 anys acumula 600 000 €, quina anualitat haurà col·locat cada any?

32 El nombre d’afectats per una malaltia depèn del temps x (en dies) transcorregut des de ser detectada amb una funció exponencial del tipus

$$f(x) = K\cdot a^{\frac{x}{10}}.$$

(A) Obtén el valor de K i de a que s’ajusta als 4000 malalts que hi havia als 10 dies de detectar la malaltia, i als 2560 malalts que quedaven als 30 dies.

(B) Quants dies han de passar perquè queden 10 malalts?

33 En una determinada regió, la quantitat y de biomassa (en kg) per unitat de superfície es pot expressar en funció del temps x (en anys) amb una funció exponencial del tipus

$$y = 1 + k\cdot a^{\frac{x}{10}}, \text{ amb } x \geq 0.$$

(A) Calcula els valors de k i de a perquè al principi hi haja 5 kg de biomassa, i als 20 anys n’hi haja 2 kg.

(B) Quants anys han de passar perquè quede només 1.25 kg de biomassa?

34 Durant un període de temps, en una determinada regió, la quantitat de biomassa C (en Kg) por unitat de superfície es pot expressar en funció del temps x (en anys) amb una funció del tipus

$$C(x) = \frac{4}{1+K\cdot a^{x/10}}, \text{ amb } x \geq 0.$$

(A) Obtén el valor de K i de a perquè als 10 anys hi haja 1 kg de biomassa i als 20 anys n’hi haja 1.6 kg.

(B) Quants anys han de passar perquè la quantitat de biomassa siga de 3 kg?

35 En una determinada població el nombre d'afectats per una malaltia ve donat per la funció

$$E(t) = \frac{100\,000}{1+99e^{-0.125t}},$$

amb $t \geq 0$ i corresponent t = 0 a l'any 2000.

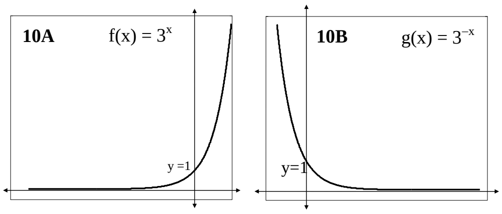
(A) Troba el nombre de malalts en 2 010.

(B) Troba el temps que tardarà en triplicar-se el nombre de malalts existents en 2000.

Solucions de les activitats del capítol 5

1. B = 997.5 €; C_F = 4997.5 €; transcorreguts els 5 anys i 3 mesos. **2.** 5357.14 €. **3.** 3%. **4.** 100 mesos. **5.** 6720 €. **6.** 100 € i 73 € respectivament. **7.** 1.02 €. **8.** 115798.37 €. **9.** 4.712%.

10.



11.

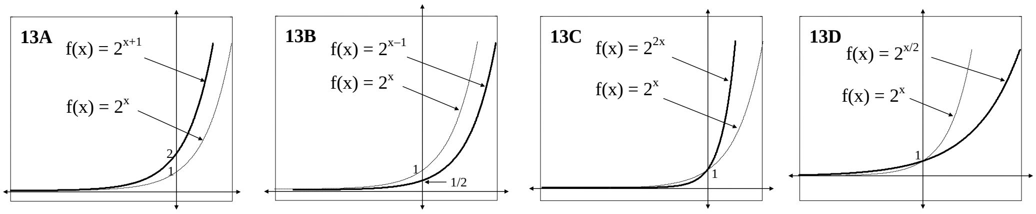
x	10	100	1000	+∞
f(x)	2.59	13780.6	$2.46\cdot10^{41}$	+∞

x	–10	–100	–1000	–∞
f(x)	0.38	0.00007	$4.04\cdot10^{-42}$	**0**

x	10	100	1000	+∞
g(x)	0.34	0.00002	$1.47\cdot10^{-46}$	**0**

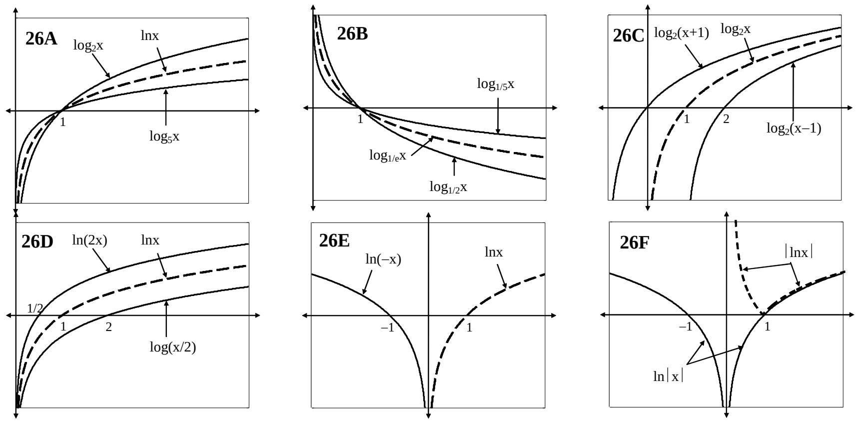
x	–10	–100	–1000	–∞
g(x)	2.87	37648.6	$5.72\cdot10^{45}$	+∞

12. 3e. **13.**



14. $f(x) = 2^{3x+4}$. **15.** (A) –1. (B) 1. (C) 9/2. (D) 1. (E) –2. (F) 1. (G) 2. (H) –2. (I) –2. **16.** y = 12000; és el límit superior al qual la població mundial tendeix (en milions); 11733.4 milions. **17.** k = 5, a = 0.5.

18. $f(x) = \dfrac{250}{1+11.5\cdot0.8^x}$. **19.** (A) 10. (B) 1/2. (C) 3/5. (D) –2. (E) 4/3. (F) –1/2. (G) 4. (H) –3. (I) 2/3. (J) 2/5. (K) 3. (L) 4. (M) –3. (N) 4. (Ñ) –16. (O) –8. (P) –3. (Q) 2. **20.** (A) 4. (B) –6. (C) –5. (D) –4. (E) 3/4. (F) –2/7. **21.** (A) 1.968. (B) –5.644. (C) –2.977. **22.** (A) Falsa: log(10+10) = log20 ≃1.3, i log10 · log10 = 1. (B) Falsa: log(10+10) = log(20) ≃1.3, i $\dfrac{\log 10}{\log 10} = 1$. (C) Falsa: log(2·10) = log200 ≃ 1.3, i 2log10 = 2. **23.** En 2089. **24.** 7 anys; 6.98 anys. **25.** (A) 5/2. (B) 101/99. (C) 9/2, 2. (D) 37/11. (E) 1, 3. (F) 62. (G) x = 10, y = 1. (H) x = 100, y = 10. (I) x = y = 10. (J) x = 2, y = 1. (K) x = y =100. (L) No té solució. (M) x = –4, y = –2. (N) x = –5, y = –1/3. **26.** (A) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (B) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (C) D_f =]0, +∞[, D_g =]–1, +∞[, D_h =]1, +∞[. (D) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (E) D_f =]0, +∞[, D_g =]–∞, 0[. (F) $D_f = \mathbb{R}\sim\{0\}$, D_g =]0, +∞[.



27. 6.168%. **28.** La segona (TAE = 12.75% davant de TAE = 12.68% de la primera). **29.** r_m = 0.004074%. **30.** 21726.52 €. **31.** 38.63 €. **32.** 715.67 €. **33.** 12 mesos. **34.** En el banc B; 292.56 €.

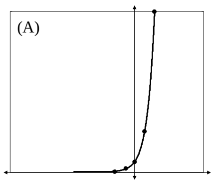
Solucions dels problemes del capítol 5

1. $\frac{625}{81}$, $\frac{16}{625}$, 1, $\frac{4}{25}$, $-\frac{125}{8}$, 25, $-\frac{64}{27}$. **2.** 2^{12}, 2^{-12}, $\frac{2^{12}}{3^6}$, $-\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$, 3^{15}, $2^{45}\cdot 3^{15}$. **3.** (A) 2^6. (B) 2^{12}. (C) 2^{200}. (D) 2^{2x}. (E) 2^{3x}. (F) 2^2. (G) $2^{5/2}$. (H) $2^{x/2}$. (I) $2^{4/3}$. (J) 2^{-5}. (K) 2^{-x}. (L) 2^{-2x}. **4.** (A) 4^2. (B) $4^{5/2}$. (C) 4^6. (D) 4^{2x}. (E) $4^{x/2}$. (F) $4^{3x/2}$. (G) $4^{5/4}$. (H) $4^{x/4}$. (I) $4^{2/3}$. (J) 4^{-5}. (K) $4^{-x/2}$. (L) $4^{-3x/2}$. **5.** (A) x = –3. (B) x = –1/4. (C) x = 0. (D) x = 1/2. (E) x = –1. (F) x = –1/3. (G) x = –1. (H) x = 1/2. (I) x = 1/2. (J) x = –2. **6.** (A) x = –3/2. (B) x = –1/4. (C) x = 1/3. (D) x = $\pm\sqrt{2}$. (E) x = –1/3. (F) x = ±1. (G) x = 2. (H) x = 1/8. **7.** (A) x = 1. (B) x = 1, x = –5/3. (C) x = –4. (D) x = 0. (E) x = 5/4. (F) x = $\pm\sqrt{3}$. (G) x = –17/5. (H) x = 0. **8.** (A) x = 5. (B) x = 1/2. (C) x = 2. (D) x = 3/2. (E) x = 2, x = 3. (F) x = –1. **9.** (A) x = 4. (B) x = 2. (C) x = –1. (D) x = 3. (E) x = –2. (F) x = 60. **10.** (A) 7. (B) –1. (C) –1. (D) 4. (E) 1/3. (F) –1. (G) 10. (H) 1/2. (I) 3/5. (J) –2. (K) 4/3. (L) –1/2. **11.** (A) 4. (B) –3. (C) 2/3. (D) 2/5. (E) 3. (F) 4. (G) –3. (H) 4. (I) –16. (J) –8. (K) –3. (L) 2. **12.** (A) x = 8. (B) x = 2. (C) x = 2. (D) x = 1. (E) x = 81. (F) x = 10. (G) x = –2. (H) x = 1/10. **13.** (A) $-\frac{3}{4}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{11}{5}$. (D) $-\frac{17}{12}$.

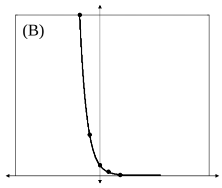
14. (A) log2 + log3. (B) 2log2 + log3. (C) log3 – log2. (D) 1 + log3 – log2. (E) 3log2 + 2log3. (F) $\frac{\log 2 - \log 3}{2}$ (G) –1 + 6log2 + log3. (H) 3 – log2. (I) $\frac{\log 3}{\log 2}$. (J) $\frac{\log 2}{\log 3}$. (K) $\frac{1+2\log 3}{\log 2 + \log 3}$. **15.** (A) log3. (B) log2. **16.** Són iguals. **17.** (A) –8 i –7. (B) 7 i 8. (C) 4 i 5. (D) 5 i 6. (E) 2 i 3.

18.

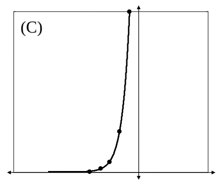
x	–2	–1	0	1	2
y	1/16	1/4	1	4	16



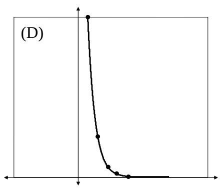
x	–2	–1	0	1	2
y	16	4	1	1/4	1/16



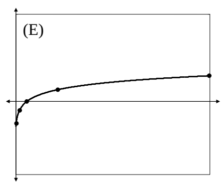
x	–5	–4	–3	–2	–1
y	1/16	1/4	1	4	16



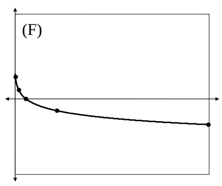
x	1	2	3	4	5
y	16	4	1	1/4	1/16



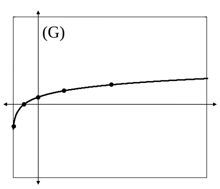
x	1/16	1/4	1	4	16
y	–2	–1	0	1	2



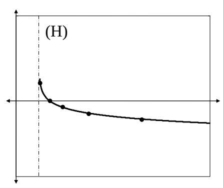
x	1/16	1/4	1	4	16
y	2	1	0	–1	–2



x	–31/16	–1	0	2	6
y	–2	0	1/2	1	3/2



x	33/16	3	4	6	10
y	2	0	–1/2	–1	–3/2



19. (A) 5. (B) 0. (C) 2 i 4. (D) 2. (E) 2. (F) No té solució. (G) 1. (H) 8. (I) 3/2. (J) 2. (K) 99. **20.** (A) x = $10^{5/2}$, y = $10^{1/2}$. (B) x = 8, y = 2. (C) x = 5^{-65}, y = 5^{-25}. (D) x = 10, y = 1. (E) x = 4, y = 2. (F) x = 4, y = 8.

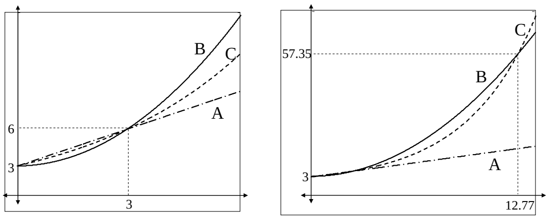
21. (A) 6. (B) 2. (C) –1. **22.** (A) x = log5. (B) x = $\log_9 5$. (C) x = $\log_2 1.6$. (D) x = $10\log_2 21 - 1$.

(E) x = $\log_2 1.25$. (F) x = $\log_3 5$. (G) x = –1. (H) x = –15log15/log0.6. **23.** (A) f(x) = $50 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$. (B) 12800 €.

(C) Als 19.9 mesos. **24.** 5% i 3960 €. **25.** (A) y = x + 3. (B) y = $\frac{x^2}{3} + 3$. (C) y = $3 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$. (D) 15, 51 i 48 €.

(E) 997, 54.69 i 25.14 mesos.

(F)



26. (A) 6955.64 € i 8063.5 €. (B) 107.81 €. (C) 2.5 %. (D) 14.2 anys i 17.67 anys. **27.** 7.6%. **28.** 11.53 anys i 22.52 anys. **29.** (A) 8933.18 €. (B) 7%. (C) 17.4 anys. **30.** (A) 24.38 € i 51.87 €. (B) 6.75%.

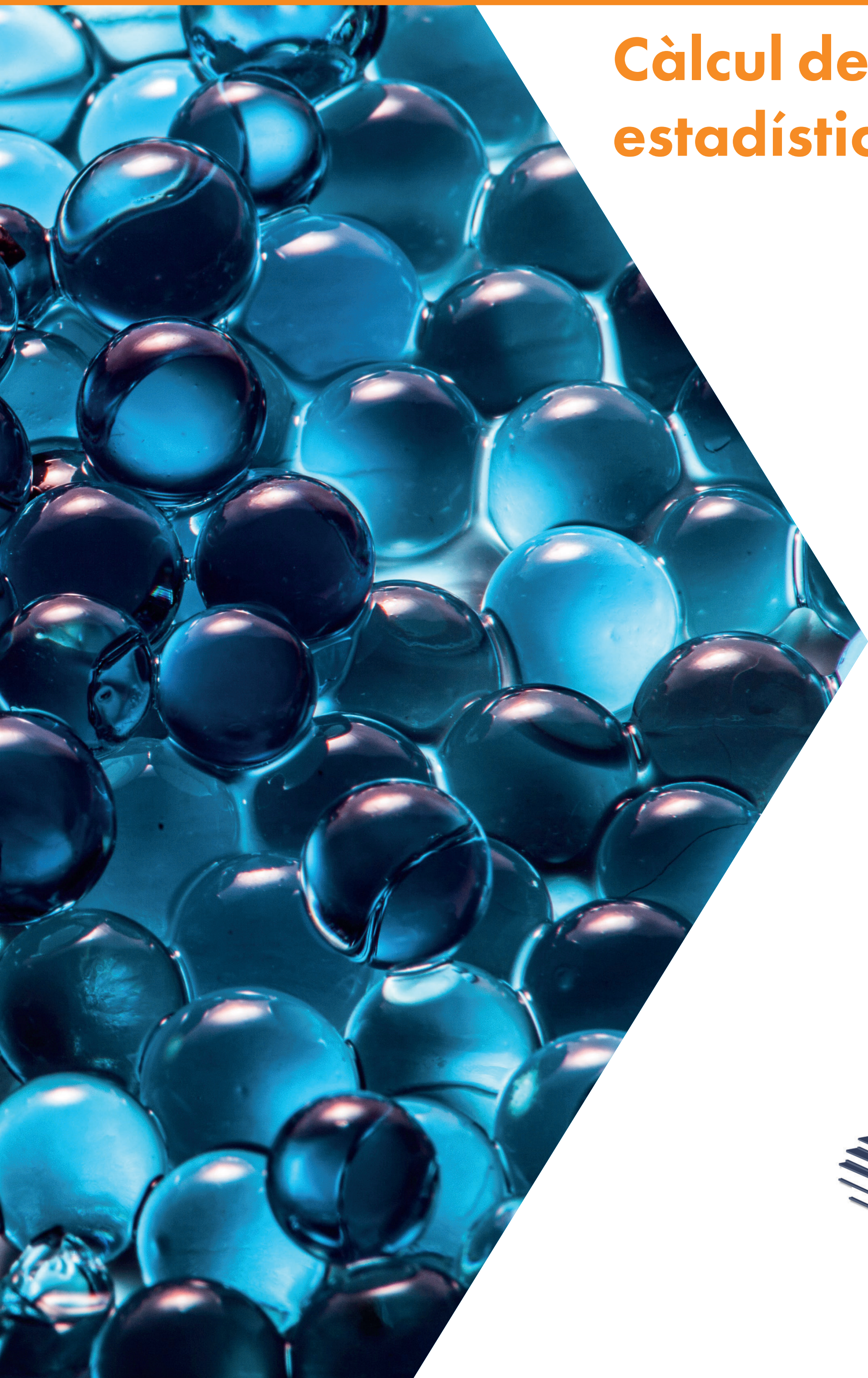
31. (A) 138382.43 €. (B) 41045.88 €. **32.** (A) K = 5000, a = 0.8. (B) 278.5 dies. **33.** (A) k = 4, a = 0.5.

(B) 40 anys. **34.** (A) K = 6, a = 0.5. (B) 41.7 anys. **35.** (A) 3406 malalts. (B) 8.95 anys.

1 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials



Càlcul de probabilitats estadística

educàlia editorial

1 BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES

Aplicades a les Ciències Socials

Càlcul de probabilitats estadística

educàlia editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-09-1

Depòsit legal: V-3245-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Tots els drets reservats. No està permesa la reimpressió de cap part d'aquest llibre, ni d'imatges ni de text, ni tampoc la seva reproducció, ni utilització, en qualsevol forma o per qualsevol mitjà, ja sigui electrònic, mecànic o d'una altra manera, tant coneguda com els que puguin inventar-se, incloent el fotocopiat o gravació, ni està permès emmagatzemar-lo en un sistema d'informació i recuperació, sense el permís anticipat i per escrit de l'editor.

Alguna de les imatges que inclou aquest llibre són reproduccions que s'han realitzat acollint-se al dret de cita que apareix en l'article 32 de la Llei 22/18987, de l'11 de novembre, de la Propietat intel·lectual. Educàlia Editorial agraeix a totes les institucions, tant públiques com privades, citades en aquestes pàgines, la seva col·laboració i demana disculpes per la possible omissió involuntària d'algunes d'elles.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 5

Probabilitat condicionada

5.1 La probabilitat condicionada

Amb el concepte de ***probabilitat condicionada*** obtenim noves formes de calcular probabilitats de successos. En el capítol anterior vam obtenir propietats que permeten calcular la probabilitat d'un succés com a **suma** de probabilitats de successos més simples; en aquest capítol ho farem com a **producte** de probabilitats de successos més simples.

Problemes que amb la regla de Laplace solucionàvem amb esforç podran ser resolts per multiplicació de probabilitats de successos senzills però, a més, resoldrem problemes que amb l'esmentada regla no podíem, com són els associats a espais mostrals no finits.

Exemple 1

Llancem tres vegades una moneda anotant els resultats obtinguts en cada llançament. Calculem la probabilitat d'obtenir cara en el tercer llançament en els següents casos:
(A) Sense més informació.
(B) Si sabem que hem obtingut un total de dues cares en els tres llançaments.

L'espai mostral Ω consta de 8 resultats, les **variacions amb repetició de 2 elements d'ordre 3**:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK\}$$

(A) Definim el succés A: "cara en el tercer llançament".

Hi ha 4 resultats favorables a A, aquells que tenen una C en tercer lloc:

$$A = \{CCC, CKC, KCC, KKC\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(A)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(B) Definim el succés B: "Dues cares en els tres llançaments".

Si sabem que **B s'ha verificat, l'espai mostral queda reduït** als 3 resultats que pertanyen a B, ja que en cap cas podria donar-se altra possibilitat:

$$\mathbf{\Omega^* = B =} \{CCK, CKC, KCC\}$$

Entre ells, els dos últims són favorables a A. Així, la probabilitat de A, en l'espai reduït Ω^*, és:

$$\mathbf{P^*(A)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

- La probabilitat **P*(A)**, calculada reduint l'espai mostral Ω a $\Omega^* = B$, rep el nom de ***probabilitat de* A *condicionada a* B**, que expressem per **P(A/B)**, i **representa la proporció, sobre el conjunt de resultats de B, dels resultats de $A \cap B$**. Per tant:

$$P^*(A) = \mathbf{P(A/B)} = \frac{\text{nre. de resultats de } A \cap B}{\text{nre. de resultats de } B}$$

Però obtenim el mateix resultat si dividim entre si les probabilitats de $A \cap B$ i de B, calculades amb els 8 resultats de Ω:

$$\mathbf{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

ja que $B = \{CCK, CKC, KCC\}$ i $A \cap B = \{CKC, KCC\}$ i, per tant, $P(B) = \frac{3}{8}$ i $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$.

➢ Concepte de probabilitat condicionada

Considerem l'espai de successos S d'un experiment aleatori i P: S $\to \mathbb{R}$ una funció de probabilitat.
Agafem un succés fix $B \in S$, amb $P(B) > 0$, que anomenarem ***succés condicionant***.

Donat un succés $A \in S$, anomenem ***probabilitat de A condicionada a B***, que representem per **P(A/B)**, a l'expressió:

$$\mathbf{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemple 2

Una persona extrau cartes d'una baralla espanyola. Si sabem que en dues extraccions va obtenir 2 sotes, calcula la probabilitat que:
(A) Siguen la d'ors i la de copes.
(B) En una tercera extracció obtinga una altra sota.

Calculem probabilitats condicionades al succés B: "en 2 extraccions han eixit 2 sotes".

(A) Anomenem A: "en dues extraccions han eixit la sota d'ors i la de copes".
Volem la probabilitat de A condicionada a B, que podem obtenir de dues formes distintes:

- **Amb la fórmula de la probabilitat condicionada**, calculant les probabilitats de $A \cap B$ i de B en l'espai mostral format per totes les parelles amb 2 cartes de les 40 existents:

$$\left.\begin{array}{l} P(B) = \dfrac{\text{casos favorables a A}}{\text{casos possibles}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{6}{780} \\[3ex] P(A \cap B) = \dfrac{\text{casos favorables a } A \cap B}{\text{casos possibles}} = \dfrac{1}{\binom{40}{2}} = \dfrac{1}{780} \end{array}\right\} \to P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{780}}{\frac{6}{780}} = \frac{1}{6}$$

- **Reduint l'espai mostral**: Si sabem que en 2 extraccions es van obtenir 2 sotes, aleshores els únics casos possibles són les 6 possibles parelles de sotes:

$$\Omega^* = \{(S_O, S_C), (S_O, S_E), (S_O, S_B), (S_C, S_E), (S_C, S_B), (S_E, S_B)\}$$

dels quals només un és favorable al succés A: la parella (S_O, S_C), aleshores:

$$P(A/B) = P^*(A) = \frac{1}{6}$$

(B) La forma recomanable de calcular la probabilitat de S: "obtenir una sota en la tercera extracció" condicionada al succés B: "en les dues primeres extraccions hem obtingut 2 sotes" és reduint l'espai mostral a 38 cartes, de les quals només hi ha 2 sotes (les que no han sigut tretes encara).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Casos possibles: 38 (les cartes que queden)} \\ \text{Casos favorables: 2 (les sotes que queden)} \end{array}\right\} \to P(S/B) = \frac{2}{38}$$

1 Una persona llança 3 vegades una moneda. Si sabem que la persona va obtenir exactament una cara en els 3 llançaments, calcula la probabilitat que aqueixa cara l'obtinguera en el primer llançament:
(A) Amb l'espai mostral de l'experiment aleatori, utilitzant la definició de probabilitat condicionada.
(B) Amb l'espai mostral reduït als casos en què s'obté exactament una cara.
(C) Repeteix els apartats anteriors, si el que sabem és que la persona va obtenir alguna cara.

➢ Propietats de la probabilitat condicionada

No sempre és possible calcular probabilitats condicionades per reducció de l'espai mostral, en aquest cas recorrem a la fórmula general, els axiomes de Kolmogoroff i les propietats de les probabilitats, de les quals destaquem les següents:

P1 Probabilitats condicionades dels successos impossible i segur:

$$\mathbf{P(\varnothing/B) = 0 \qquad P(\Omega/B) = 1}$$

P2 Probabilitat condicionada del succés contrari:

$$\mathbf{P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)}$$

P3 Probabilitat condicionada de la unió de dos successos incompatibles:

$$\text{si} \quad \mathbf{A \cap B = \varnothing \;\rightarrow\; P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)}$$

P4 Probabilitat condicionada de la unió de dos successos qualssevol:

$$\mathbf{P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)}$$

P5 Probabilitat condicionada de la unió de n successos incompatibles:

$$\mathbf{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i / B)}$$

P6 **Si** $\mathbf{A \subset B}$ aleshores $\mathbf{P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}}$

Exemple 3

Una persona extrau 2 cartes d'una baralla espanyola i informa que almenys té un as. Quina és la probabilitat que tinga dos asos?

Anomenem A: "la persona té 2 asos" i B: "la persona té almenys un as".

Com que $A \subset B \;\rightarrow\; A \cap B = A \;\rightarrow\; P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

Aquesta és precisament la demostració de la propietat P6. Calculem les probabilitats de A i de B. Anomenem:

A_1: "obtenir exactament un as en 2 extraccions" i A_2: "obtenir exactament 2 asos en 2 extraccions".

$$A = A_2 \;\rightarrow\; P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780}$$

$$B = A_1 \cup A_2 \;\rightarrow\; P(B) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{1}}{\binom{40}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} + \frac{6}{780} \text{ (perquè } A_1 \cap A_2 = \varnothing\text{).}$$

$$\text{Per tant } P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{\frac{6}{780}}{\frac{6}{780} + \frac{144}{780}} = \frac{6}{150} = 0.04 \text{ (perquè } A \subset B\text{).}$$

Exemple 4

El 70% dels estudiants d'un col·legi va aprovar una assignatura A, el 75% va aprovar una altra assignatura B, però només un 60% va aprovar les dues assignatures. Contesta a les següents qüestions:

(A) Si una persona va aprovar l'assignatura A, probabilitat que també aprovara la B.

(B) Si una persona va aprovar l'assignatura A, probabilitat que no aprovara la B.

(C) Si una persona no va aprovar l'assignatura A, probabilitat que aprovara la B.

(D) Si una persona va aprovar alguna de les dues assignatures, probabilitat d'haver aprovat la A.

Definim els successos A: "aprovar l'assignatura A" i B: "aprovar l'assignatura B".

De les dades de l'enunciat obtenim:

$$P(A) = \frac{70}{100} = 0.7 \qquad P(B) = \frac{75}{100} = 0.75 \qquad P(A \cap B) = \frac{60}{100} = 0.6$$

(A) La probabilitat que es demana és condicionada: $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.

(B) Es demana la probabilitat del succés $\overline{B}$ condicionada al succés A. Com que $\overline{B}$ és el succés contrari de B:

$$P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

(C) Es demana la probabilitat de B condicionada a $\overline{A}$:

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2}$$

perquè $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$ y $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0.75 - 0.6 = 0.15$.

(D) Es demana la probabilitat de A condicionada al succés $A \cup B$. Com que $A \subset A \cup B$, per la propietat P6:

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.7}{0.85} = \frac{14}{17}$$

perquè $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.75 - 0.6 = 0.85$.

2 Contesta a les següents preguntes relacionades també amb l'exemple 4:
(A) Si una persona va aprovar l'assignatura A, probabilitat d'haver aprovat alguna de les 2 assignatures.
(B) Si una persona no va aprovar l'assignatura B, probabilitat que tampoc haguera aprovat la A.
(C) Si una persona va aprovar alguna de les dues assignatures, probabilitat d'haver-les aprovat les dues.

3 Tornem a l'exemple 3. Si la persona que extrau 2 cartes de la baralla, en compte de dir-nos que té almenys un as, ens ensenya una de les cartes, que resulta ser l'as d'ors, quina és la probabilitat que l'altra carta siga també un or?

4 Si al elegir una carta d'una baralla espanyola, obtenim una figura, quina és la probabilitat (que òbviament és condicionada) que siga una carta de copes? I que siga una sota? I que siga una carta de copes o una sota? I que siga la sota de copes?

5 Elegim una carta d'una baralla espanyola, que resulta ser un as. Quina és la probabilitat d'elegir una altra i que siga un altre as? I que no ho siga?

6 Al elegir 5 cartes d'una baralla espanyola, obtenim 3 asos. Quina és la probabilitat que al elegir una carta més, aquesta siga l'as que queda?

7 Una urna té 5 boles blanques i 3 boles negres. Extraiem 2 boles, que resulten ser de colors distints. Calcula la probabilitat d'extraure altres 2 boles del mateix color.

5.2 Independència estadística

En els exemples anteriors hem vist que la probabilitat d'un succés A pot canviar al introduir la informació que proporciona la verificació d'un altre succés B, i es calcula amb la probabilitat condicionada. Si açò ocorre és que B influeix d'alguna forma en A. Esta situació origina un concepte molt important que és el *d'**independència estadística***.

- Diem que **B *afavoreix a* A** si **P(A/B) > P(A)**.
- Diem que **B *desafavoreix a* A** si **P(A/B) < P(A)**.

En els dos casos direm que **A i B** són ***dependents***.

En canvi, diem que dos successos A i B són ***independents*** si les seues probabilitats condicionades són iguals a les seues pròpies probabilitats:

$$\textbf{A i B son } \textbf{\textit{independents}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P(A/B) = P(A)} \text{ i } \mathbf{P(B/A) = P(B)}$$

➢ Caracterització d'independència per a dos successos

A i B són independents si i només si $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Segons la definició de probabilitat condicionada $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$:

$$\textbf{A i B són independents} \Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exemple 5

Tenim una baralla espanyola i agafem una carta. Estudiem la dependència o independència dels successos

R: "La carta és un rei" F: "la carta és una figura" C: "la carta és una copa"

$P(R) = \frac{4}{40} = 0.1$, i $P(R/F) = \frac{4}{12} = 0.\widehat{3}$. Com que $P(R/F) > P(R)$ $\rightarrow$ F afavoreix a R.

$P(R) = \frac{4}{40} = 0.1$, i $P(R/C) = \frac{1}{10} = 0.1$. Com que $P(R/C) = P(R)$ $\rightarrow$ C ni afavoreix ni desafavoreix a R.

Per tant els successos **R** i **C són independents**, mentre que els successos **R** i **F són dependents**.

8 Calcula, en l'exemple 5, les probabilitats condicionades necessàries per a comprovar que:
(A) R afavoreix a F. (B) F i C són independents.

9 En l'exemple 5, utilitza la caracterització d'independència per a comprovar que:
(A) R i C són independents perquè $P(R \cap C) = P(R) \cdot P(C)$.
(B) R i F són dependents perquè $P(R \cap F) \neq P(R) \cdot P(F)$.
(C) F i C són dependents perquè $P(F \cap C) \neq P(R) \cdot P(F)$.

10 Llancem un dau. Comprova la independència dels successos A:"eixir un nombre parell", B:"eixir un nombre imparell" i C:"eixir un nombre menor que 3".

Independència estadística per a més de dos successos

La definició d'independència per a més de dos successos es generalitza des del cas de dos successos de la següent forma:

Els successos A_1, A_2, ..., A_n són ***independents*** si i només si per a qualsevol subconjunt dels anteriors successos la probabilitat de la intersecció és el producte de probabilitats.

L'anterior definició significa, per a 3 successos, el següent:

Els successos A, B i C són *independents* si i només si:

(1) $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$, $\mathbf{P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)}$, $\mathbf{P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)}$.

(2) $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$

En el cas en què només es verifica (1), diem que els successos són ***independents 2 a 2***.

Exemple 6

Considerem l'experiment aleatori de llançar 3 vegades una moneda; vegem que els següents successos són independents:

C_i : "obtenir cara en el llançament i-èsim", per a $i = 1, 2, 3$.

L'espai mostral conté 8 resultats, els que es poden donar al llançar 3 vegades una moneda:

$$\Omega = \{KKK \;\; CKK \;\; KCK \;\; KKC \;\; CCK \;\; CKC \;\; KCK \;\; CCC\}$$

- Vegem que C_1 i C_2 són independents:

$$C_1 = \{CKK \;\; CCK \;\; CKC \;\; CCC\} \qquad C_2 = \{KCK \;\; CCK \;\; KCK \;\; CCC\} \qquad C_1 \cap C_2 = \{CCK \;\; CCC\}$$

Aleshores $P(C_1) = P(C_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ i $P(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Com que $\mathbf{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P(C_1) \cdot P(C_2)}$, deduïm que $\mathbf{C_1}$ i $\mathbf{C_2}$ **són independents**.

De la mateixa forma podem veure que també ho són C_1 amb C_3, i C_2 amb C_3, amb la qual cosa els 3 successos són independents 2 a 2.

- Vegem ara que la probabilitat de la intersecció dels 3 és el producte de probabilitats:

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{CCC\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3)}$$

Per tant, els 3 successos són independents.

11 Un tetràedre té una de les seues 4 cares pintada de color blanc, una altra de color verd, una altra de color roig i la quarta, pintada amb els 3 colors. Elegeix una cara a l'atzar. Comprova que els següents successos són independents 2 a 2 però no ho són globalment:

B: "la cara té color blanc". V: "la cara té color verd". R: "la cara té color roig".

Comprova per a això que:

$$P(B \cap V) = P(B) \cdot P(V),\ P(B \cap R) = P(B) \cdot P(R),\ P(V \cap R) = P(V) \cdot P(R),\ P(B \cap V \cap R) \neq P(B) \cdot P(V) \cdot P(R)$$

12 Si els successos A, B i C són independents, amb probabilitats respectives de 0.5, 0.8 i 0.9, calcula:

(A) $P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap C)$ (C) $P(B \cap C)$ (D) $P(A \cap B \cap C)$ (E) $P(A \cup B)$

5.3 Multiplicació de probabilitats

De la caracterització d'independència deduïm que si disposem d'un conjunt de successos **independents**, la probabilitat de la intersecció de qualsevol nombre d'ells és igual al **producte** de les probabilitats respectives.

Si els successos $A_1, A_2, ..., A_n$ són ***independents***, aleshores:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)}$$

El següent teorema permet calcular la probabilitat de la intersecció de successos qualssevol com un **producte de probabilitats condicionades**. Aquestes probabilitats condicionades han de calcular-se mitjançant la reducció de l'espai mostral corresponent. Expressem el teorema per a dos successos, per a tres i, la forma general, per a n successos:

➢ Teorema de la multiplicitat

Per a dos successos: si A_1 i A_2 són dos successos qualssevol, amb $P(A_1) > 0$, aleshores:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)}$$

Per a tres successos: si A_1, A_2 i A_3 són dos successos qualssevol, amb $P(A_1 \cap A_2) > 0$:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)}$$

Per a n successos: si $A_1, A_2, ..., A_n$ són successos qualssevol, amb $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdot \cdot \cdot \cap A_{n-1}) > 0$:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Demostrem el teorema per a 2 i per a 3 successos. El cas general segueix un procés semblant.

- **Per a 2 successos:** siguen A_1 i A_2 dos successos, amb $P(A_1) > 0$.
  Per definició de probabilitat condicionada: $P(A_2/A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$
  i multiplicant en creu $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

- **Per a 3 successos:** siguen A_1, A_2 i A_3 tres successos, amb $P(A_1 \cap A_2) > 0$.
  Anomenem $A = A_1 \cap A_2$, aleshores $P(A) > 0$ i com tenim el teorema demostrat per a qualssevol dos successos, són certes les següents afirmacions:

  $$P(A \cap A_3) = P(A) \cdot P(A_3/A) \qquad (1)$$

  $$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \quad \rightarrow \quad P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \qquad (2)$$

  Substituint (2) en (1): $\quad P(A \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A) \qquad (3)$

  Com que $A = A_1 \cap A_2$, substituint en (3) obtenim:

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

➢ Observa que el teorema de la multiplicitat és vàlid per a tot tipus de successos, siguen dependents o independents. En el cas en què els successos són independents, les probabilitats condicionades són iguals que les probabilitats lliures de condicions, i l'expressió general

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

es transforma en $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$.

➢ Experiments basats en la repetició de proves

Són molts els experiments aleatoris que consisteixen en la realització de proves successives, cadascuna de les quals pot ser considerada com un experiment aleatori per separat. És, per exemple, el cas dels successius llançaments d'una moneda o d'un dau, les extraccions de boles d'una caixa, la repetició d'un determinat experiment fins a obtenir el resultat desitjat, etc. El teorema de la multiplicitat permet calcular probabilitats de successos en aquest tipus d'experiments per multiplicació de probabilitats de successos més simples. Els següents exemples ens ajuden a comprendre-ho.

Exemple 7

Tenim tres urnes U_1, U_2 i U_3 amb les següents composicions: U_1 té 6 boles blaves i 4 roges, U_2 té 5 blaves i 5 roges, i U_3 té 4 blaves i 3 roges. Traiem una bola de cada urna i calculem les probabilitats de:

(A) A: "les 3 boles tretes són blaves".

(B) B: "les 2 primeres boles tretes són roges, i la tercera és blava".

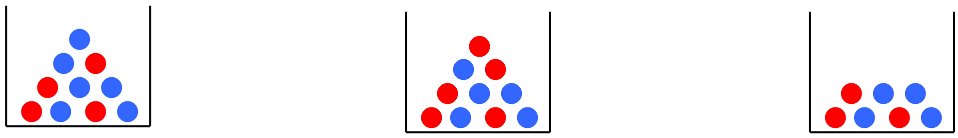
Definim els següents successos:

A_i: "obtenim una bola blava de l'urna U_i".

R_i: "obtenim una bola roja de l'urna U_i", per a $i = 1, 2, 3$.

L'extracció d'una bola de cadascuna de les 3 urnes és un experiment aleatori que es pot descompondre en 3 experiments més simples, que són cadascuna de les extraccions.

Les probabilitats d'obtenir una bola blava o una roja en cada extracció són molt fàcils de calcular:



Prova 1:
Extraure una bola de l'urna 1
$P(A_1) = \frac{6}{10}$ $P(R_1) = \frac{4}{10}$

Prova 2:
Extraure una bola de l'urna 2
$P(A_2) = \frac{5}{10}$ $P(R_2) = \frac{5}{10}$

Prova 3:
Extraure una bola de l'urna 3
$P(A_3) = \frac{4}{7}$ $P(R_3) = \frac{3}{7}$

(A) El succés A es pot expressar:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Com que no hi ha cap relació entre els resultats que obtenim en les 3 proves, els successos A_1, A_2 i A_3 són **independents**, i per tant:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{7}$$

(B) De la mateixa manera, B s'expressa com:

$$B = R_1 \cap R_2 \cap A_3$$

Els successos de l'anterior intersecció són també independents, per ser de proves no relacionades:

$$P(B) = P(R_1 \cap R_2 \cap A_3) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(A_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7}$$

13 Tenim una caixa amb 3 boles negres i 5 blanques, i una altra caixa amb 4 boles negres i 6 blanques. Agafem una bola de cada caixa. Calcula les següents probabilitats:
(A) Que les dues boles siguen blanques. (B) Que les dues boles siguen negres.

14 Si les boles de les 2 caixes de l'activitat 13 les reunim en una caixa única, i traiem 2 boles, calcula:
(A) La probabilitat d'obtenir 2 boles blanques. (B) La d'obtenir 2 boles negres.

Exemple 8

Considerem el següent experiment: extraiem boles una a una ***sense reemplaçament*** d'una urna que conté 6 boles blaves i 4 roges. Calculem les següents probabilitats:

(A) D'obtenir, amb tres extraccions, i en aquest ordre, una bola blava, una altra roja i una altra blava.

(B) D'obtenir, amb quatre extraccions, i en aquest ordre, bola blava, roja, blava i roja.

Definim els successos:

B_i: "obtenir una bola blava en l'extracció i-èsima",

R_i: "obtenir una bola roja en l'extracció i-èsima".

(A) La probabilitat que volem calcular és la de la intersecció de successos $B_1 \cap R_2 \cap B_3$.

L'experiment consisteix en la realització de 3 proves que en aquest cas estan relacionades entre si, perquè cada vegada que extraiem una bola, l'urna queda amb una composició diferent per a la següent extracció. És per això que els successos de l'anterior intersecció són **dependents**.

Amb el **teorema de la multiplicitat**, calculem la probabilitat:

$$P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap R_2)$$

En la primera prova l'urna té 6 boles blanques i 4 negres; la probabilitat d'obtenir una bola blava serà:

$$P(B_1) = \frac{6}{10}$$

Si en la primera extracció hem obtingut una bola blava, aleshores per a la segona extracció queden 5 boles blaves i 4 roges (reduïm l'espai mostral); i la probabilitat d'obtenir una bola roja serà:

$$P(R_2/B_1) = \frac{4}{9}$$

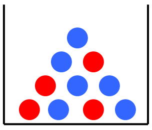
Si en les primeres dues extraccions hem obtingut bola blava i roja, respectivament, aleshores per a la tercera extracció queden 5 boles blaves i 3 roges, i la probabilitat d'obtenir bola blava ara és:

$$P(B_3/B_1 \cap R_2) = \frac{5}{8}$$

Aleshores $P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap R_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$.

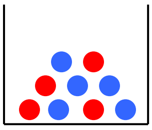
(B) Considerem la situació al realitzar cada extracció, eliminant les boles tretes anteriorment:

Prova 1



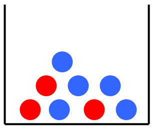
$P(B_1) = \frac{6}{10}$

Prova 2



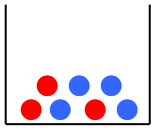
$P(R_2/B_1) = \frac{4}{9}$

Prova 3



$P(B_3/B_1 \cap R_2) = \frac{5}{8}$

Prova 4



$P(R_4/B_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{3}{7}$

De nou amb el **teorema de la multiplicitat**, obtenim com a probabilitat de la intersecció el producte de les probabilitats condicionades:

$$P(B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$$

15 Calcula les probabilitats dels successos de l'exemple anterior en el cas en què les extraccions són amb reemplaçament.

16 Extraiem una a una, i sense reemplaçament, **totes** les boles que hi ha en una caixa que conté 5 boles blanques i 5 boles negres. Calcula la probabilitat que, en les 10 extraccions, no repetim color en dues extraccions successives.

Exemple 9

Un examen consta de 3 assignatures que contenen 10, 8 i 7 temes respectivament. Un estudiant es prepara 4 temes de cada assignatura. L'exercici consisteix a triar a l'atzar un tema de cada assignatura i respondre correctament. Calcula les probabilitats de:

(A) Aprovar les 3 assignatures.
(B) No aprovar cap assignatura.
(C) Aprovar alguna assignatura.
(D) Aprovar una de les 3 assignatures.

L'estudiant aprova l'assignatura A si elegeix un tema dels 4 temes que s'ha preparat i suspèn si elegeix un entre els no preparats. El mateix passa en les altres dues assignatures. Definim els successos:

A: "aprovar l'assignatura A", B: "aprovar l'assignatura B", C: "aprovar l'assignatura C".

$$P(A)=\frac{4}{10}\qquad P(\overline{A})=\frac{6}{10}\qquad P(B)=\frac{4}{8}\qquad P(\overline{B})=\frac{4}{8}\qquad P(C)=\frac{4}{7}\qquad P(\overline{C})=\frac{3}{7}$$

(A) Aprovar les 3 assignatures és el succés $A\cap B\cap C$.

L'experiment aleatori consta de 3 **proves independents** perquè una prova no influeix en l'altra. Per tant, tenim assegurat que els successos A, B i C són **independents**. Per això:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{35}$$

(B) Suspendre les 3 assignatures és el succés $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{70}$$

(C) Aprovar alguna assignatura és el succés $A\cup B\cup C$, que és contrari de no aprovar cap assignatura, per tant:

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-\frac{9}{70}=\frac{61}{70}$$

(D) Aprovar una assignatura és el succés $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$.
Com que la probabilitat de la unió es suma de probabilitats, al ser successos incompatibles, la probabilitat desitjada és:

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{27}{70}$$

17 Un clauer consta de 10 claus indistingibles, de les quals només una obri una porta. Anem provant les claus i eliminant les que no obrin, fins aconseguir obrir la porta. Calcula la probabilitat d'obrir:
(A) Al segon intent. (B) Al tercer intent. (C) Al quart intent.

18 Extraiem cartes d'una baralla espanyola. Calcula la probabilitat d'obtenir, en aquest ordre, una sota, un cavall i un rei, en els següents casos:
(A) Les extraccions són sense reemplaçament. (B) Les extraccions són amb reemplaçament.

19 Dos jugadors de bàsquet tenen el següent percentatge d'efectivitat al llançar a cistella: el jugador A té el 40% i el jugador B el 70%. Cadascun llança a cistella una vegada. Calcula les següents probabilitats:
(A) Que A guanye a B. (B) Que B guanye a A. (C) Que A i B empaten.

20 El jugador A llança un dau que té 2 cares amb el nombre 1 i 4 cares amb el nombre 2. El jugador B llança un dau que té 3 cares amb el nombre 1 i 3 cares amb el nombre 2. Guanya el jugador que obtingua el nombre major. Calcula la probabilitat que:
(A) A guanye a B. (B) B guanye a A. (C) A i B empaten.

21 Calcula la probabilitat de ser necessaris 5 llançaments d'una moneda per a obtenir per primera vegada cara.

22 En un autobús viatja una única persona, amb probabilitat p de baixar en la pròxima parada, on espera una altra persona, amb probabilitat q de pujar a l'autobús. Calcula la probabilitat que, després de la pròxima parada, en l'autobús viatgen:
(A) Cap de les dues persones. (B) Les dues persones. (C) Una d'elles.

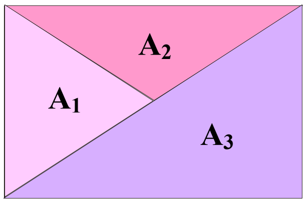
5.4 El teorema de la probabilitat total

Exemple 10

En una ciutat hi ha 12 farmàcies, de les quals 2 obrin les 24 hores del dia, 4 obrin 12 hores i les restants obrin 8 hores. Una persona es dirigeix a una farmàcia. Calculem la probabilitat que la trobe oberta.

Tenim les farmàcies classificades en tres tipus, i definim els successos:

- A_1: "La farmàcia obri les 24 hores del dia" $\rightarrow$ $P(A_1) = \dfrac{2}{12}$
- A_2: "La farmàcia obri 12 hores al dia" $\rightarrow$ $P(A_2) = \dfrac{4}{12}$
- A_3: "La farmàcia obri 8 hores al dia" $\rightarrow$ $P(A_3) = \dfrac{6}{12}$



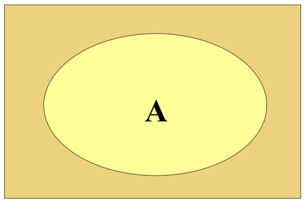
Òbviament, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ i també $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$.

Definim el succés A: "la farmàcia elegida per la persona està oberta"**.**

Volem calcular la probabilitat de A, però només coneixem la probabilitat de A referida a cada classe de farmàcia. Són probabilitats condicionades:

- Si la farmàcia obri les 24 hores del dia, la probabilitat de trobar-la oberta és $P(A/A_1) = 1$.
- Si la farmàcia obri 12 hores al dia, la probabilitat de trobar-la oberta és $P(A/A_2) = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$.
- Si la farmàcia obri 8 hores al dia, la probabilitat de trobar-la oberta és $P(A/A_3) = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$.

Són probabilitats de A condicionades a cada tipus de farmàcia. Però, quina és la ***probabilitat total*** P(A) de trobar oberta la farmàcia elegida? Com veurem, és **la suma** de les anteriors probabilitats condicionades, prèviament multiplicades per les probabilitats de cada succés condicionant.

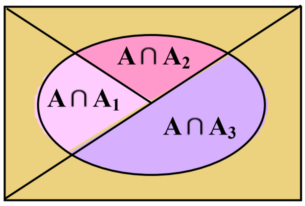


A la vista del dibuix 1, l'espai mostral queda dividit en 3 successos A_1, A_2, i A_3, que són incompatibles 2 a 2. Es diu que formen un ***sistema complet de successos***:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

sent

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing \text{ i } A_2 \cap A_3 = \varnothing$$



També veiem en l'últim dibuix que la ***probabilitat total*** de A és la suma de les ***probabilitats parcials*** dels successos $A \cap A_1$, $A \cap A_2$ i $A \cap A_3$:

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

Aleshores

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) \qquad (1)$$

Però pel **teorema de la multiplicitat**, les probabilitats de les anteriors interseccions són:

$$P(A \cap A_1) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) \qquad P(A \cap A_2) = P(A/A_2) \cdot P(A_2) \qquad P(A \cap A_3) = P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

Aleshores l'equació (1) queda de la forma següent, que és coneguda com ***teorema de la probabilitat total***:

$$\mathbf{P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)}$$

que en el nostre cas resulta:

$$\mathbf{P(A) = 1 \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}}$$

➢ Sistema complet de successos

Diem que els successos $A_1, A_2, ..., A_n$ formen un ***sistema complet de successos de Ω*** si:

(1) **Són incompatibles dos a dos**: $A_i \cap A_j = \emptyset$, per a **i, j = 1, 2, ..., n**, amb $i \neq j$.

(2) **La unió de tots ells és Ω**: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

També diem que els anteriors successos constitueixen una ***partició* de Ω.** Es verifica que

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

➢ Teorema de la probabilitat total

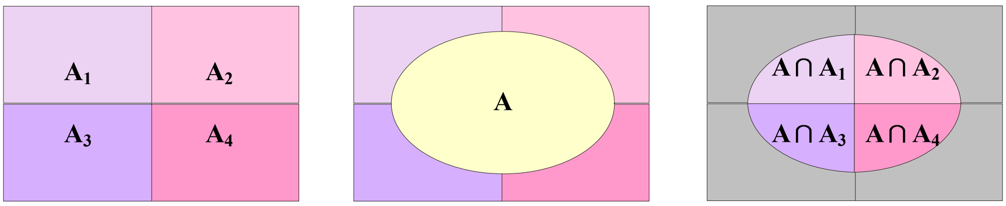
Si $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ és un sistema complet de successos, i A un succés qualsevol, aleshores:

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(A/A_n) \cdot P(A_n)$$

Abreujadament, amb sumatòries:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \cdot P(A_i)$$

La demostració és igual a la realitzada en l'exemple anterior. La realitzem per a un sistema complet de 4 successos A_1, A_2, A_3 i A_4:



Partició de Ω **Partició de A**

A la vista dels anteriors dibuixos $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3) \cup (A \cap A_4)$. Per tant

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) + P(A \cap A_4) \qquad (1)$$

Pel **teorema de la multiplicitat**, les probabilitats de les anteriors interseccions són els productes

$$P(A \cap A_i) = P(A/A_i) \cdot P(A_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Substituïm aquests resultats en (1) i obtenim:

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3) + P(A/A_4) \cdot P(A_4)$$

23 En l'exemple 10, calcula la probabilitat total del succés B: "la farmàcia elegida per la persona està tancada". Fes-ho seguint l'esquema de l'esmentat exemple.

24 Tenim dos caixes, una amb 3 boles blanques i 2 negres, l'altra amb 5 boles blanques i 2 negres. Elegim a l'atzar una caixa i agafem una bola. Calcula la probabilitat que siga blanca.

25 Un fabricant té dues màquines A i B. La màquina A treballa 16 hores diàries i produeix un 3% d'articles defectuosos, mentre que la màquina B treballa les 8 hores restants del dia produint un 6% d'articles defectuosos. Elegim a l'atzar un article de la producció diària. Quina és la probabilitat que siga defectuós? Es suposa que les màquines produeixen la mateixa quantitat d'articles en el mateix temps.

26 El Congrés dels diputats d'un país té 100 diputats del partit A, 60 del B i 40 del C. Suposem que el percentatge de diputats que voten el que el seu partit els recomana és el 80% per al partit A, el 90% per al B, i el 60% per al C. Per a la votació d'una determinada llei, el partit A és favorable, mentre que els partits B i C són contraris. Quin percentatge de diputats votaria a favor de la llei?

Exemple 11

Un examen tipus test consta d'una sèrie de preguntes, cadascuna d'elles amb 4 alternatives, de les quals només una és correcta. Un estudiant coneix la resposta del 75% de les preguntes del test i decideix contestar a l'atzar les preguntes la resposta de les quals desconeix.
Quina probabilitat té de contestar correctament una pregunta determinada?

Classifiquem les preguntes del test en dues categories: aquelles la resposta de les quals l'alumne coneix, i aquelles que no. Definim els successos:

A: "l'alumne coneix la resposta de la pregunta elegida",
B: "l'alumne desconeix la resposta de la pregunta elegida".

- Els successos A i B constitueixen un **sistema complet de successos** perquè són disjunts i la seua unió és Ω (la pregunta elegida, o és de resposta coneguda o no ho és)

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{i} \quad A \cup B = \Omega$$

  Com que coneix la resposta del 75% de les preguntes, les probabilitats de A i B són:

$$P(A) = \frac{75}{100} \qquad\qquad P(B) = \frac{25}{100}$$

- **Definim el succés C: "l'alumne respon correctament a la pregunta elegida"**.

  Si coneix la resposta, aleshores respon correctament amb probabilitat 1:

$$P(C/A) = 1$$

  Si no coneix la resposta, aleshores contesta a l'atzar, i com que hi ha 4 alternatives per pregunta respon correctament amb probabilitat:

$$P(C/B) = \frac{1}{4}$$

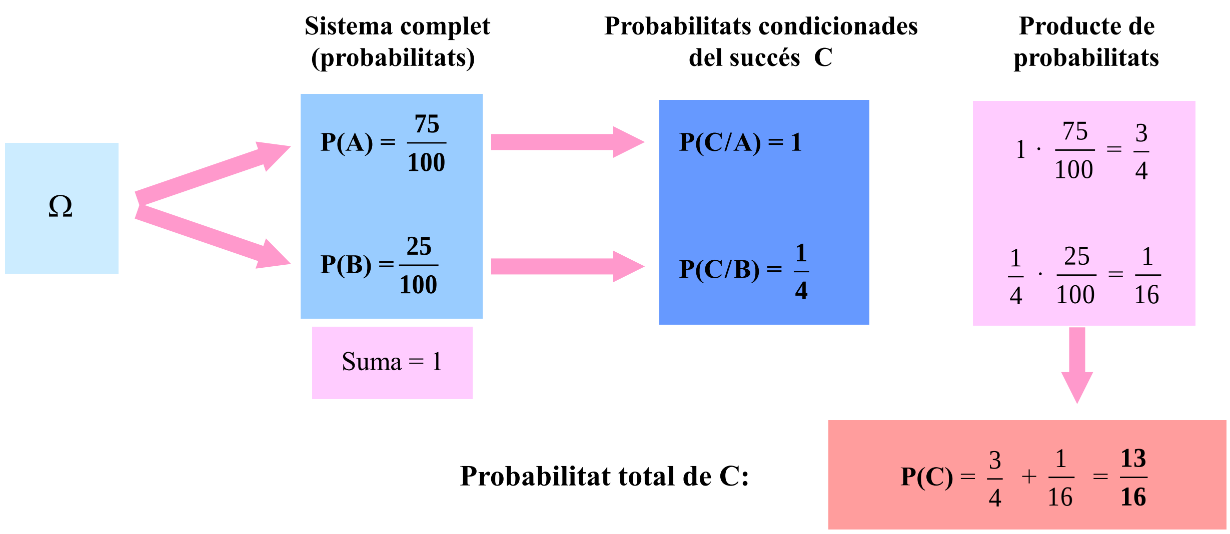
- Volem calcular la **probabilitat total de C**, però l'única cosa que sabem és aquesta probabilitat referida a cada classe de pregunta, les probabilitats parcials.

  Com que els successos A i B són una **partició de Ω**, aleshores $C \cap A$ i $C \cap B$ formen una **partició de C**:

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \rightarrow \quad P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

  Amb el **teorema de la probabilitat total**, la probabilitat de contestar correctament la pregunta elegida és:

$$\mathbf{P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) = 1 \cdot \frac{75}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{100} = \frac{13}{16}}$$



Exemple 12

Un sac conté 3 monedes d'ús legal i una moneda trucada amb 2 cares. Elegim a l'atzar una moneda i la llancem. Quina és la probabilitat d'obtenir cara?

Definim els següents successos:

A: "la moneda elegida és normal", B: "la moneda elegida té dues cares".

- Els successos A i B constitueixen un **sistema complet de successos**, perquè són disjunts i la seua unió és Ω (la moneda elegida o és normal o té dues cares).

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{i} \quad A \cup B = \Omega$$

Com que hi ha 3 monedes normals i una amb dues cares, les probabilitats de A i B són:

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{4}$$

- **Definim el succés C: "obtenir cara amb la moneda elegida".**

Si la moneda elegida és normal, la probabilitat d'obtenir cara és $P(C/A) = \frac{1}{2}$.

Si la moneda elegida té 2 cares, la probabilitat d'obtenir cara és $P(C/B) = 1$.

- Volem calcular la **probabilitat total de C**, però l'única cosa que sabem és aquesta probabilitat referida a cadascuna de les classes de monedes, les probabilitats parcials.

Com que els successos A i B són una **partició de Ω**, aleshores $C \cap A$ i $C \cap B$ formen una **partició de C**:

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \to \quad P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

Amb el **teorema de la probabilitat total**, la probabilitat d'obtenir cara és:

$$\mathbf{P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}}$$

El resultat obtingut és explicable fàcilment ***a posteriori***: Si disposem de 3 monedes amb una cara i una creu, més una moneda amb dues cares, aleshores podem considerar que tenim un espai mostral amb 8 elements, dels quals 5 són favorables (les 5 cares que en total hi ha en les 4 monedes) i 3 desfavorables (les 3 creus), per la qual cosa la probabilitat d'obtenir una cara és:

$$\Omega = \{C_1\ K_1\ C_2\ K_2\ C_3\ K_3\ C_4\ C_5\} \quad \to \quad P(C) = \frac{5}{8}$$

K_1	**K_2**	**K_3**	**C_4**
C_1	**C_2**	**C_3**	**C_5**

En el gràfic de la dreta, anomenem C_4 i C_5 a les dues cares de la moneda trucada.

27 Tenim tres urnes amb boles blanques i negres en les següents quantitats:

U_1 (4 blanques, 6 negres) U_2 (5 blanques, 5 negres) U_3 (6 blanques, 4 negres)

(A) Elegim una urna a l'atzar i extraiem una bola. Calcula la probabilitat que siga blanca.
(B) Elegim una urna a l'atzar i extraiem dues boles. Calcula la probabilitat que siguen blanques.

28 Un banc treballa en 3 regions d'un país, A, B i C. El 50% de les operacions les realitza en A, el 40% en B i el 10% en C. Estimem que, en A, el 1% dels clients és morós, mentre que en B ho és el 2% i en C el 8%. Quin és el percentatge global de clients morosos?

29 En cada butxaca del meu pantaló tinc tres boles, dues blanques i una altra negra. Agafe una bola de cada butxaca i la clave en l'altra. A continuació trac una bola de la primera butxaca. Quina és la probabilitat que siga blanca?

5.5 El teorema de Bayes

Exemple 13

Tornem a la situació de l'exemple 10: una ciutat amb 12 farmàcies, de les quals 2 obrin les 24 hores del dia, 4 obrin 12 hores i les restants obrin 8 hores. Si una persona va a una farmàcia i la troba oberta, quina és la probabilitat que aquesta farmàcia òbriga només 8 hores?

Recordem els successos definits en l'anterior exemple i les seues probabilitats:

A_1: "la farmàcia obri les 24 hores del dia".
A_2: "la farmàcia obri 12 hores al dia".
A_3: "la farmàcia obri 8 hores al dia".
A: "la farmàcia elegida està oberta".

Sense més informació, la probabilitat d'elegir una farmàcia que obri només 8 hores és:

$$P(A_3) = \frac{6}{12}$$

Però en el nostre cas tenim la informació addicional que la farmàcia elegida per la persona estava oberta, per la qual cosa no és aquesta probabilitat la desitjada, sinó la probabilitat de A_3 condicionada al succés A: "la farmàcia elegida està oberta"; la calculem de la següent manera:

$$P(A_3/A) = \frac{P(A \cap A_3)}{P(A)} \qquad (1)$$

La probabilitat P(A) va ser calculada en l'exemple 12 amb l'ajuda del ***teorema de la probabilitat total:***

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

i la probabilitat $P(A \cap A_3)$ no és més que el tercer sumand anterior:

$$P(A \cap A_3) = P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

Substituint aquestes dues últimes expressions en (1), obtenim:

$$\mathbf{P(A_3/A) = \frac{P(A/A_3) \cdot P(A_3)}{P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Substituïm totes les probabilitats ja obtingudes en l'exemple 12:

$$P(A_3/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12}}{1 \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12}} = \frac{1}{3}$$

- L'expressió (2) obtinguda en l'anterior exemple permet calcular la probabilitat condicionada $\mathbf{P(A_3/A)}$, que és anomenada ***probabilitat a 'posteriori'*** de A_3, enfront de la ***probabilitat a 'priori'*** $\mathbf{P(A_3)}$, en el cas de disposar d'un **sistema complet de successos A_1, A_2 i A_3** i de conèixer les probabilitats de A condicionades als esmentats successos, i les probabilitats d'aquests successos. Per al càlcul de $P(A_3/A)$ hem utilitzat la **definició de probabilitat condicionada** en (1) i el **teorema de la probabilitat total**.

  A continuació enunciem en general aquesta forma de càlcul de ***probabilitats a 'posteriori'***, que s'anomena **teorema de Bayes**.

30 Si la persona de l'exemple anterior troba oberta la farmàcia on va, calcula les probabilitats que:
(A) La farmàcia òbriga 12 hores. (B) La farmàcia òbriga les 24 hores.

➢ Teorema de Bayes

Considerem un **sistema complet de successos** $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ i A un succés qualsevol.

Si coneixem les probabilitats $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$ i les probabilitats condicionades $P(A/A_1)$, $P(A/A_2)$, ..., $P(A/A_n)$, per a qualsevol succés A_i del sistema complet es verifica:

$$\mathbf{P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{P(A/A_1)\cdot P(A_1) + P(A/A_2)\cdot P(A_2) + \cdots + P(A/A_n)\cdot P(A_n)}}$$

Exemple 14

Amb el sac que conté 3 monedes normals i una moneda amb 2 cares de l'exemple 12, una persona elegeix a l'atzar una moneda i la llança, obtenint una cara. Quina és la probabilitat que la moneda elegida fora normal?

Definim els següents successos: C: “obtenir cara amb la moneda elegida”,

A: “la moneda elegida és normal” i B: “la moneda elegida té 2 cares”.

Volem calcular la probabilitat del succés A, condicionada al succés C:

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/A)\cdot P(A)}{P(C/A)\cdot P(A) + P(C/B)\cdot P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

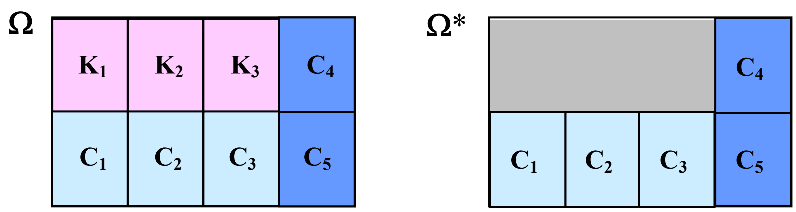
Totes les probabilitats utilitzades ja han sigut calculades en l'exemple 14. Si no fora així, hauríem de calcular-les ara, seguint el procés anterior.

- A la vista del resultat obtingut per a la probabilitat condicionada P(A/C), podem calcular-la d'una altra forma: si disposem de 3 monedes amb una cara i una creu, més una moneda amb dues cares, aleshores podem considerar que tenim un espai mostral amb 8 elements, que són les 5 cares i les 3 creus. Anomenem C_4 i C_5 a les cares corresponents a la moneda trucada:

$$\Omega = \{\, C_1 \;\; K_1 \;\; C_2 \;\; K_2 \;\; C_3 \;\; K_3 \;\; C_4 \;\; C_5 \,\}$$

  Si afegim la informació que ha ocorregut el succés C, és a dir, que la persona ha obtingut una cara amb la moneda elegida, aleshores l'espai mostral queda reduït als resultats de C, que són:

$$\Omega^* = C = \{C_1 \;\; C_2 \;\; C_3 \;\; C_4 \;\; C_5\} \;\;\rightarrow\;\; P(A/C) = \frac{3}{5}$$



31 En la situació de l'activitat 25, elegim a l'atzar un article de la producció diària:
(A) Si l'article és defectuós, quina és la probabilitat que haguera sigut fabricat amb la màquina A?
(B) Si l'article no és defectuós, quina és la probabilitat que haguera sigut fabricat amb la màquina B?

32 En la situació de l'activitat 26, elegim a l'atzar un dels diputats:
(A) Si el seu vot va ser favorable a la llei, quina probabilitat hi ha que el diputat fora del partit A? I del partit B? I del C?
(B) Si el seu vot va ser desfavorable a la llei, quina probabilitat hi ha que el diputat fora del partit A? I del B? I del C?
(C) Quina probabilitat hi ha que el diputat haguera mantingut la disciplina de vot?

Problemes del capítol 5

1 Tres persones A, B i C compren cadascuna un bitllet de loteria diferent. Si sabem que un dels tres ha sigut premiat, quina és la probabilitat que ho siga A? I si a més sabem que B no ha sigut premiat?

2 Tenim 4 cartes numerades de l'1 al 4, i repartim una a dos jugadors A i B. Guanya qui tinga el nombre major. Calcula la probabilitat que A guanye a B:
(A) Sense més informació. (B) Si sabem que A ha rebut la carta amb el 3.

3 Si al elegir dues cartes d'una baralla espanyola obtenim dos reis, quina és la probabilitat que un d'ells siga el de copes?

4 Repartim 5 cartes a dues persones. Si una d'elles ha rebut 2 asos, quina és la probabilitat que l'altra persona no tinga cap as?

5 Una persona llança 3 vegades una moneda. Si sabem que la persona va obtenir exactament una cara en els 3 llançaments, calcula la probabilitat que la cara l'obtinguera en el primer llançament.

6 El 70% dels estudiants d'un centre educatiu va aprovar Matemàtiques, mentre que un 60% va aprovar Estadística. Un 50% va aprovar tant Matemàtiques com Estadística. Elegim un estudiant a l'atzar.
(A) Si va aprovar Matemàtiques, probabilitat que també aprovara Estadística.
(B) Si va aprovar Estadística, probabilitat que també aprovara Matemàtiques.
(C) Si no va aprovar Matemàtiques, probabilitat de tampoc aprovar Estadística.
(D) Si no va aprovar Estadística, probabilitat d'aprovar Matemàtiques.
(E) Si va aprovar alguna de les dues assignatures, probabilitat d'aprovar Matemàtiques.
(F) Si va aprovar alguna de les dues assignatures, probabilitat d'aprovar les dues assignatures.
(G) És independent aprovar Matemàtiques d'aprovar Estadística?

7 L'empresa TELEFONA ofereix en una ciutat dos productes: connexió telefònica o internet. El 70% dels veïns de la ciutat té contractat el servei de connexió telefònica, i el 50% té contractat el servei d'Internet. Un 30% té contractat els dos productes.
(A) És independent tindre el servei de connexió telefònica de tindre el servei d'Internet? Per què?
(B) Probabilitat que un veí de la ciutat tinga contractat només el servei de connexió telefònica.
(C) Probabilitat que un veí de la ciutat no tinga contractat cap dels dos productes.
(D) Si un veí té connexió telefònica, quina és la probabilitat que tinga el servei d'Internet?

8 Amb una gran quantitat d'exàmens mèdics, un metge va obtenir els següents resultats: El 7% dels pacients estan malalts i creuen estar-ho; el 60% creuen estar malalts però no ho estan; el 30% creuen estar sans encertadament; el 3% creuen estar sans però estan malalts. Definim els successos:

A: "el pacient creu estar malalt" i B: "el pacient està malalt".

(A) Calcula P(A) i P(B).
(B) Si un pacient creu estar malalt, calcula la probabilitat que ho estiga.
(C) Si un pacient creu estar sa, calcula la probabilitat que estiga malalt.
(D) Si un pacient està malalt, calcula la probabilitat que crega estar sa.
(E) Si un pacient està sa, calcula la probabilitat que crega estar malalt.

9 Siguen A i B dos successos d'un espai de successos tal que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ i $P(A\cap B) = 0.1$. Calcula:
(A) $P(A\cup B)$ (B) $P(A/B)$ (C) $P(A/A\cap B)$ (D) $P(A\cap B/A\cup B)$
(E) $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$ (F) $P(A\cap B/\overline{A})$ (G) $P(A/\overline{A\cap B})$ (H) $P(\overline{B}/\overline{A\cup B})$

10 Siguen dos successos independents A i B amb probabilitats $P(A) = 0.5$ i $P(B) = 0.6$. Calcula:
(A) $P(A\cap B)$ (B) $P(A\cup B)$ (C) $P(A\cap \overline{B})$ (D) $P(A\cup \overline{B})$

11 Si sabem que $P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = 0.8$ i $P(B/A) = 0.6$, calcula:
(A) P(A) i P(B) (B) $P(A\cup B)$ (C) $P(\overline{A}/\overline{B})$

12 Suposem que aprovar matemàtiques és independent d'aprovar anglès, i que les probabilitats d'aprovar estes assignatures són, respectivament, de 0.7 i 0.6. Calcula la probabilitat de:
(A) No aprovar cap de les dues assignatures.
(B) Aprovar alguna de les dues assignatures.
(C) Aprovar una de les dues assignatures.

13 Llancem 4 vegades una moneda. Descriu l'espai mostral d'aquest experiment aleatori (conté 16 resultats). Considerem els successos:

A: "cara en el quart llançament". A_1: "el nombre de cares és d'una".

A_2: "el nombre de cares és de dos". A_3: "el nombre de cares és de tres".

Comprova que:

(A) A_1 desfavoreix a A. (B) A_3 afavoreix a A. (C) A i A_2 són independents.

14 Per a aprovar unes oposicions cal fer un examen escrit i si s'aprova, es fa un examen oral. El 20% dels opositors superen l'examen escrit i d'aquests, el 60% supera després l'examen oral.

(A) Quina és la probabilitat de superar els dos exàmens?

(B) I d'aprovar el primer però suspendre el segon?

15 Extraiem cartes d'una baralla espanyola fins a obtenir per primera vegada una sota. Calcula la probabilitat de caldre fer 4 extraccions, en els següents casos:

(A) Extraccions sense reemplaçament. (B) Extraccions amb reemplaçament.

16 Un clauer consta de 10 claus indistingibles, de les quals només 2 obrin una porta. Una persona vol obrir la porta. Calcula la probabilitat de aconseguir-ho en el tercer intent:

(A) Si va eliminant les claus que no obrin. (B) Si no les elimina.

17 Tenim 3 caixes, cadascuna amb 2 boles blanques, però amb diferent nombre de boles negres: la primera en té una, la segona en té 2 i la tercera en té 3. Agafem una bola de cada caixa. Calcula les probabilitats que:

(A) Les 3 boles siguen blanques. (B) Les 3 boles siguen del mateix color.

(C) Alguna de les 3 boles siga blanca. (D) Una de les 3 boles és blanca.

18 Tres persones extrauen, cadascuna, una carta d'una baralla distinta. Calcula la probabilitat que:

(A) Les 3 cartes siguen d'ors. (B) Cap carta siga d'ors.

(C) Una de les 3 cartes siga d'ors. (D) Dues de les 3 cartes siguen d'ors.

(E) Alguna de les 3 cartes siga d'ors.

19 La prova "Cangur" de Matemàtiques és un examen tipus test amb 5 alternatives per pregunta, de les quals només una és correcta. Un "estudiant" decideix contestar totes les preguntes a l'atzar. Calcula la probabilitat de:

(A) Contestar bé les primeres 2 preguntes, i mal les 2 següents.

(B) Contestar bé 2 de les 4 primeres preguntes.

(C) Contestar bé alguna de les 4 primeres preguntes.

20 En una casa viuen 12 veïns. Si coneixem a 3 d'ells, però no sabem en quins pisos habiten, calcula raonadament la probabilitat que, trucant als timbres a l'atzar, el primer veí conegut es trobe al quart intent (cada timbre és seleccionat només una vegada).

21 A llança dues monedes i B llança un dau. A guanya a B si obté dues cares i B no obté un 6. B gana a A si obté un 6 i A no obté dues cares. En els altres casos, empaten. Calcula la probabilitat que, en una jugada de cadascun:

(A) A guanye a B. (B) B guanye a A. (C) A i B empaten.

(D) Si quan empaten tornen a jugar, calcula la probabilitat que A guanye a B en la 3a jugada.

22 Tenim dues urnes, la primera amb 2 boles blanques, 3 negres i 5 roges, i la segona amb 2 boles blanques, 2 negres i una roja. Agafem una bola de cada urna. Probabilitat que les dues boles siguen del mateix color.

23 Les matrícules dels cotxes d'un país tenen 4 xifres seguides de 3 vocals. Elegim una matrícula a l'atzar de totes les possibles:

(A) Probabilitat que les 4 xifres siguen iguals.

(B) Probabilitat que les 3 vocals siguen iguals.

(C) Probabilitat que les 4 xifres siguen iguals i les 3 vocals siguen iguals.

24 Dos jugadors A i B tiren cadascun dues monedes. Guanyarà el que obtinga dues cares, sempre que l'altre no les obtinga també. Calcula raonadament la probabilitat que en una jugada:

(A) A guanye a B (B) A i B empaten.

25 Tres jugadors de basquet A, B i C tenen la següent efectivitat al llançar a cistella: A un 60%, B un 70% i C un 80%. Cadascun d'ells llança una vegada a cistella. Calcula la probabilitat que:

(A) A guanye als altres 2. (B) Algun dels 3 guanye als altres 2. (C) Els tres empaten.

26 Un jugador de bàsquet que té un percentatge d'encert del 25% té quatre intents per a fer un tir lliure. Calcula la probabilitat que té d'aconseguir-ho.

27 Suposem que la probabilitat de nàixer un xic és la mateixa que la de nàixer una xica, i que els naixements són independents. Calcula les probabilitats que:
(A) Una parella tinga 2 xics i després 2 xiques.
(B) Què és més probable, tenir dos fills del mateix sexe, o no tenir-los?

28 Tenim tres caixes, cadascuna amb tres boles blaves, però en la primera hi ha també una bola roja, en la segona dues, i en la tercera tres boles roges. Elegim a l'atzar una bola de cada caixa. Calcula la probabilitat de:
(A) Les tres boles són blaves.
(B) Alguna de les tres boles és blava.
(C) Dos de les tres boles són blaves.

29 Un jugador de bàsquet té una efectivitat del 80% cada vegada que tira a cistella. Calcula la probabilitat de:
(A) Necessitar fer 4 tirs per a aconseguir la primera cistella.
(B) Aconseguir 4 cistelles en els primers 6 tirs.
(C) Aconseguir més de 2 cistelles en els primers 5 tirs.
(D) Aconseguir alguna cistella en els primers 4 tirs.

30 Tenim un dau que té una cara de color roig, dos de color blau i tres de color verd. Calcula les probabilitats de:
(A) Obtenir alguna cara roja en 3 llançaments.
(B) Obtenir 2 cares blaves en 5 llançaments.
(C) Obtenir més de 2 cares blaves en 5 llançaments.
(D) Obtenir una cara de cada color en 3 llançaments.

31 Tenim 10 treballs repartits en 30 carpetes (3 carpetes són un treball). Agafem a l'atzar 3 carpetes.
(A) Calcula la probabilitat de no agafar cap treball complet.
(B) Repeteix l'anterior pregunta, si agafem a l'atzar 4 carpetes.
(C) Repeteix l'anterior pregunta, si agafem a l'atzar 5 carpetes.

32 En una població hi ha doble de dones que d'homes. El 25% de les dones i el 40% dels homes són fumadors.
(A) Elegim a l'atzar una persona. Calcula la probabilitat que siga fumadora.
(B) Elegim a l'atzar una persona i resulta ser fumadora. Calcula la probabilitat que siga home.
(C) Calcula la probabilitat d'elegir a l'atzar un home no fumador.

33 El 25% dels alumnes acudeix a classe en autobús i els restants van caminant. Arriba puntual a classe el 60% dels qui usen autobús i el 90% dels que van caminant.
(A) Calcula la probabilitat que un alumne elegit a l'atzar haja arribat puntual a classe.
(B) Si un alumne ha arribat puntual a classe, calcula la probabilitat que haja acudit caminant

34 "Torrons La Pedra" té tres fabriques per a elaborar els seus productes, F_1, F_2 i F_3, a raó de 100, 140 i 160 pastilles diàries respectivament. A més, se sap que de les quantitats produïdes un 30%, 45% i 20% s'exporten. Si les pastilles s'emmagatzemen en un local abans de la seua distribució interior o exterior i prenem una a l'atzar, troba:
(A) La probabilitat que siga una pastilla que serà exportada.
(B) En Disneylandia trobem pastilles de torró de "Torrons la Pedra" i en comprem una. Quina probabilitat hi ha que la pastilla es fera en la fàbrica F_2?

35 El 50% de les operacions en borsa es realitzen en la regió asiàtica A, el 40% en la nord-americana N i el 10% en l'europea E. Actualment s'estima que en A l'1% de les operacions borsàries tenen pèrdues, mentre que en N ho és el 2% i en E el 8%.
(A) Calcula la probabilitat de triar una operació borsària amb pèrdues i de la regió A.
(B) Si una operació borsària té pèrdues, quina és la probabilitat que s'efectuara en A?
(C) Si una operació borsària té guanys, quina és la probabilitat que s'efectuara en la regió E?

36 Suposem que en un joc es guanya quan al llançar un dau es trau un 6. Un individu llança un dau, trau un 6, i per tant guanya. Calcula la probabilitat que haja fet trampa. Suposa que el 25% dels jugadors són tramposos.

37 Una companyia d'assegurances d'automòbils classifica els conductors en 3 classes: A (alt risc), B (risc mitjà) i C (baix risc). La classe A constitueix el 30% dels conductors que subscriuen un segur amb la companyia; la probabilitat que un d'aquests conductors tinga algun accident en un any és 0.1. Les corresponents dades per a la classe B són 50% i 0.03, mentre que per a la classe C són 20% i 0.01. Un determinat client contracta una pòlissa d'assegurances i té en el primer any un accident. Calcula les probabilitats que aquest client pertanya a cadascuna de les classes A, B i C.

38 D'un grup d'estudiants de batxillerat coneixem les següents dades: el 40% dels alumnes ha aprovat la primera avaluació, d'aquests, el 80% ha aprovat la segona avaluació i un 20% no va aprovar la primera avaluació però sí la segona. Calcula la probabilitat que un alumne elegit a l'atzar:

(A) Haja aprovat les dues avaluacions.
(B) Haja aprovat la segona avaluació.
(C) Haja aprova alguna de les dues avaluacions.
(D) Si un alumne no ha aprovat la primera avaluació, calcula la probabilitat que haja aprovat la segona.

39 En una butxaca tenim 3 monedes d'un euro i 5 de dos euros. En l'altra butxaca tenim 2 monedes d'un euro i 3 de mig euro. Elegim una butxaca a l'atzar, i traiem una moneda, que resulta ser d'un euro. Calcula la probabilitat que la butxaca elegida fora la primera.

40 Tenim 3 caixes, cadascuna amb 2 boles blanques, però amb diferent nombre de boles negres: la primera en té una, la segona en té 2 i la tercera en té 3. Elegim a l'atzar una caixa i agafem una bola d'ella.

(A) Calcula la probabilitat de que la bola elegida siga blanca.
(B) Si la bola elegida és blanca, probabilitat de que fora de la tercera caixa.

41 Realitzem als electors d'una ciutat una enquesta sobre la seua intenció de vot en un referèndum. Obtenim que el 25% pensa votar a favor, el 15% pensa votar en contra, i el 60% pensa abstenir-se. Sabem que el 50% dels que es van abstenir en l'enquesta va votar a favor en el referèndum, el 90% dels que van votar a favor en l'enquesta van repetir vot en el referèndum, i el 10% dels que van votar en contra en l'enquesta, van canviar el seu vot.

(A) Elegim a l'atzar una persona; quina és la probabilitat que votara a favor el dia del referèndum?
(B) Si una persona va votar a favor el dia del referèndum, calcula les probabilitats d'haver dit en l'enquesta que votaria a favor, en contra, i que s'abstindria.

42 De tots els alumnes d'un col·legi, el 40% és aficionat al futbol i al bàsquet, el 30% només al futbol i el 20% només al bàsquet. Elegim un alumne a l'atzar:

(A) Probabilitat que siga aficionat al futbol.
(B) Probabilitat que siga aficionat al bàsquet.
(C) Si és aficionat al bàsquet, probabilitat que també ho siga al futbol.
(D) Que siga aficionat a algun dels dos esports.
(E) Si és aficionat a algun dels dos esports, probabilitat que ho siga als dos.

43 Suposem que la probabilitat que un jurat seleccionat per al judici d'un cas criminal arribe al veredicte correcte és 0.95. La policia estima que el 99% dels individus que arriben a judici són realment culpables. Calcula la probabilitat que un individu siga realment innocent, atés que el jurat ha dictaminat que és innocent.

44 Tenim tres urnes amb boles blanques i negres en les següents quantitats: U_1 té 4 blanques i 6 negres, U_2 5 blanques i 5 negres i U_3 6 blanques i 4 negres.

(A) Elegim una urna a l'atzar i extraiem una bola. Calcula la probabilitat que siga blanca si sabem que l'urna U_1 té el doble de possibilitats de ser triada que les altres dues.
(B) Si la bola treta és blanca, calcula les probabilitats que siga de l'urna U_1, de la U_2, i de la U_3.

45 Una persona té en una caixa 10 daus cúbics que tenen les cares pintades de color roig o negre. Dos dels daus tenen 5 cares roges i una negra, altres tres daus tenen 4 cares roges i dues negres, i els restants daus tenen 3 cares roges i 3 negres. La persona trau a l'atzar un dau de la caixa i el llança.

(A) Calcula la probabilitat que obtinga una cara de color roig.
(B) Si obté una cara de color roig, calcula la probabilitat que el dau siga dels que tenen 3 cares roges.

Solucions de les activitats del capítol 5

1. (A) 1/3. (B) 1/3. (C) 4/7. **2.** (A) 1. (B) 3/5. (C) 12/17. **3.** 1/13. **4.** 1/4; 1/3; 1/2; 1/12. **5.** 1/13; 12/13. **6.** 1/35. **7.** 7/15. **8.** (A) P(F/R) = 1 ≠ P(F) = 12/40 → R afavoreix a F. (B) P(F/C) = 3/10 = P(F) → F i C són independents. També P(C/F) = 3/12 = 0.25 = 10/40 = P(C). **9.** (A) $P(R\cap C) = \frac{1}{40} = P(R)\cdot P(C) = \frac{4}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{1}{40}$ (B) $P(R\cap F) = \frac{1}{40} \neq P(R)\cdot P(F) = \frac{4}{40}\cdot\frac{12}{40} = \frac{3}{100}$. (C) $P(F\cap C) = \frac{3}{40} = P(F)\cdot P(C) = \frac{12}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{3}{40}$ **10.** (A) $P(A\cap B) = 0 \neq P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ → A i B dependents. (B) $P(A\cap C) = \frac{1}{6} = P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ → A i C són independents (C) $P(B\cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ → B i C dependents. **11.** $P(B\cup V) = P(B)\cdot P(V) = 1/4$, igual en els altres casos; $P(B\cap V\cap R) = 1/4 \neq 1/8 = P(B)\cdot P(V)\cdot P(R)$. **12.** (A) 0.4. (B) 0.45. (C) 0.72. (D) 0.36. (E) 0.9. **13.** (A) 3/8. (B) 3/20. **14.** (A) 55/153. (B) 7/51. **15.** (A) 18/125. (B) 36/125. **16.** 1/126. **17.** (A) 1/10. (B) 1/10. (C) 1/10. **18.** (A) $\frac{4}{3705}$. (B) $\frac{1}{1000}$. **19.** (A) 0.12. (B) 0.42. (C) 0.46. **20.** (A) 1/3. (B) 1/6. (C) 1/2. **21.** 1/32. **22.** (A) p(1 – q). (B) q(1 – p). (C) pq + (1 – p)(1 – q). **23.** $\frac{1}{2}$. **24.** 23/35. **25.** 1/25. **26.** 51/100. **27.** (A) 1/2. (B) 31/135. **28.** 21/1000. **29.** 2/3. **30.** (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. **31.** (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{47}{144}$. **32.** (A) $\frac{40}{51}$; $\frac{3}{51}$; $\frac{8}{51}$. (B) 10/49; 27/49. 12/49. (C) 79/100.

Solucions dels problemes del capítol 5

1. 1/3, 1/2. **2.** (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. **3.** 1/2. **4.** 87/119. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** (A) 5/7. (B) 5/6. (C) 2/3. (D) 1/2. (E) 7/8. (F) 5/8. (G) No, perquè P(E/M) = 5/7 ≠ 0.6 = P(E). **7.** (A) No, perquè $P(T\cap I) = 0.3 \neq P(T)\cdot P(I) = 0.7\cdot 0.3$. (B) 0.4. (C) 0.1. (D) 3/7. **8.** (A) $P(A) = \frac{67}{100}$, $P(B) = \frac{1}{10}$. (B) $\frac{7}{67}$. (C) $\frac{1}{11}$. (D) $\frac{3}{10}$. (E) $\frac{2}{3}$. **9.** (A) 0.7. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{1}{7}$. (E) 0.9. (F) 0. (G) $\frac{4}{9}$. (H) 1. **10.** (A) 0.3. (B) 0.8. (C) 0.2. (D) 0.7. **11.** (A) P(A) = 0.5 i P(B) = 0.375. (B) 0.575. (C) 0.68. **12** (A) 0.12. (B) 0.88. (C) 0.46. **13.** $P(A) = \frac{1}{2}$; (A) $P(A/A_1) = \frac{1}{4} < P(A)$. (B) $P(A/A_3) = \frac{3}{4} > P(A)$. (C) $P(A/A_2) = \frac{3}{6} = P(A)$. **14.** (A) 0.12. (B) 0.08. **15.** (A) 0.078. (B) 0.073. **16.** (A) 7/45. (B) 0.128. **17.** (A) 8/60. (B) 14/60. (C) 54/60. (D) 22/60. **18.** (A) 1/64. (B) 27/64. (C) 27/64. (D) 9/64. (E) 37/64. **19.** (A) 0.0256. (B) 0.1536. (C) 0.5904. **20.** 7/55. **21.** (A) 5/24. (B) 1/8. (C) 2/3. (D) 5/54. **22.** 3/10. **23.** (A) 1/1000. (B) 1/25. (C) 1/25000 **24.** (A) 3/16. (B) 10/16. **25.** (A) 0.036. (B) 0.188. (C) 0.36. **26.** $\frac{175}{256}$. **27.** (A) $\frac{1}{16}$. (B) Iguals. **28.** (A) 27/120. (B) 19/20. (C) 54/120. **29.** (A) 0.0064. (B) 0.24576. (C) 0.94208. (D) 0.9984. **30.** (A) 0.4213. (B) 0.3292. (C) 0.2099. (D) $\frac{1}{6}$. **31.** (A) $\frac{405}{406}$. (B) $\frac{201}{203}$

(C) $\frac{198}{203}$. **32.** (A) 3/10. (B) 4/9. (C) 1/5. **33.** (A) 0.825. (B) 9/11. **34.** (A) $\frac{5}{16}$. (B) $\frac{63}{125}$. **35.** (A) 1/200. (B) 5/21. (C) 92/979. **36.** 2/3. **37.** 30/47; 15/47; 2/47. **38.** (A) $\frac{32}{100}$. (B) $\frac{52}{100}$. (C) $\frac{60}{100}$. (D) $\frac{1}{3}$. **39.** 15/31. **40.** (A) 47/90. (B) 12/47. **41.** (A) 54/100. (B) 15/36, 1/36 y 20/36. **42.** (A) $\frac{70}{100}$. (B) $\frac{60}{100}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{90}{100}$. (E) $\frac{4}{9}$. **43.** $\frac{19}{118}$. **44.** (A) $\frac{19}{40}$. (B) $\frac{8}{19}$, $\frac{5}{19}$ i $\frac{6}{19}$. **45.** (A) $\frac{37}{60}$. (B) $\frac{15}{37}$.