Matemáticas para bachillerato

Matemáticas para bachillerato es el resultado de mucha ilusión, trabajo, tiempo y gran experiencia docente. Contiene todos los conocimientos matemáticos necesarios para comenzar los estudios de Grado de cualquier Universidad.

Este proyecto conforma los libros de matemáticas de primero y segundo de bachillerato de las modalidades de Ciencias y Tecnología y de Ciencias Sociales, según el currículum que actualmente se estudia en el estado español, y están distribuidos en 3 volúmenes por curso:

	Primer curo	Segundo curo
Modalidad de Ciencias y Tecnología	Álgebra y Geometría	Álgebra lineal y Geometría
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Estadística	Cálculo de probabilidades
Modalidad de Ciencias Sociales	Álgebra	Álgebra lineal
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Cálculo de probabilidades y Estadística	Cálculo de probabilidades e Inferencia estadística

Contenido de Matemáticas para bachillerato

- **Todo el currículum** de los bachilleratos del estado español.
- Más de 1500 **ejemplos resueltos** de los epígrafes importantes.
- Más de 8000 problemas entre **actividades y ejercicios** propuestos.
- Totas las actividades y ejercicios propuestos tienen la **solución** al final del capítulo correspondiente.

Estructura y concepción del libro Matemáticas para bachillerato

Cada pareja de páginas consecutivas (8 y 9, 10 y 11…) **se conciben como una porción cerrada** del capítulo; ningún concepto quedará tratado a medias en ellas, y contiene ejemplos resueltos y actividades para resolver.

Nunca hay texto vertical paralelo. Siempre se lee de arriba hacia abajo, sin distracciones.

Para facilitar el estudio distinguimos con formas y colores:

- **Definiciones**: Siempre con recuadros de color verde, sin relleno.
- **Propiedades y teoremas**: Siempre con recuadros rellenos de color verde. Cuando hemos considerado conveniente incluir la demostración de una propiedad lo hacemos fuera del recuadro, resaltada por la izquierda con una barra vertical de color verde.
- **Ejemplos resueltos**: Lo más abundante en el libro; resueltos con detalle, para que el alumno aprenda de ellos. Muchos son aplicaciones a otras ciencias, como la Física, Biología, Economía, Topografía, por citar las más aplicadas. Están resaltados por la izquierda con una barra amarilla y numerados por capítulo.
- **Actividades propuestas**: Al menos al finalizar cada pareja de páginas (10 y 11, 12 y 13…) incluimos un recuadro, relleno de color naranja, con actividades numeradas por capítulo y relacionadas con la teoría explicada en esas páginas y con los ejemplos resueltos en ellas.
- **Problemas de recapitulación**: Además, al finalizar cada capítulo incluimos una amplia colección de problemas propuestos para acabar de reafirmar los conceptos del capítulo.
- **Soluciones**: Cada capítulo termina con las soluciones de totas las actividades y problemas propuestos en él.

Es un proceso de asimilación de los elementos conceptuales necesarios para interpretar, enunciar y resolver los problemas que plantea el estudio de los fenómenos propios de las diversas ciencias. El conocimiento matemático se organiza en forma de sistema deductivo, de modo que definiciones, postulados, propiedades, teoremas y métodos se articulan lógicamente para dar validez a las intuiciones y técnicas matemáticas. Todo este proceso culmina en ejemplos y problemas.

El lenguaje formal se introduce lentamente, pero resulta imprescindible para no perder la línea conductora de la solución del problema. Incluimos demostraciones de algunas propiedades siempre que sean adecuadas al nivel aunque no sean necesarias para el desarrollo del texto.

1 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Álgebra

educàlia editorial

1 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Álgebra

educàlia editorial

Primera edición, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprime: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-05-3
Depósito legal: V-3241-2018
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 2

Polinomios

2.1 Expresiones algebraicas

Cualquier algoritmo matemático que pueda generalizar una serie de operaciones utiliza letras para su expresión. Cada letra utilizada representa una magnitud numérica distinta; por ejemplo la expresión:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

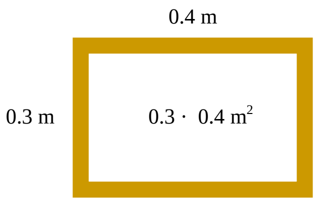
es la conocida fórmula del área de un trapecio: “El área A es igual a la semisuma de la base mayor y la base menor multiplicada por la altura”. Al sustituir B, b y h por valores numéricos obtenemos el valor del área del trapecio de esas magnitudes:

$$\text{si} \quad B = 5,\ b = 3\ \text{ y }\ h = 4 \quad \rightarrow \quad A = \frac{5+3}{2} \cdot 4 = 16$$

Las letras B, b, h y A reciben el nombre de ***variables***. Las expresiones que involucran a una o varias variables se llaman ***expresiones algebraicas***. En el siguiente ejemplo efectuamos con ellas operaciones como con los números, pues simplemente los representan.

Ejemplo 1

En una tienda se cobra por la construcción de un cuadro para fotografías 5 € por el trabajo, 10 € por metro de longitud de marco y 10 € por metro cuadrado de área de cristal.



- ¿Qué costará un cuadro de 30 × 40 cm?

  El perímetro del marco es (2 · 0.3 + 2 · 0.4) metros.

  El área del cristal es $0.3 \cdot 0.4\ m^2$.

  El precio total es

  $$\mathbf{P} = 10 \cdot (0.3 \cdot 0.4) + 10 \cdot (2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4) + 5 = 1.2 + 14 + 5 = \mathbf{20.2}\ €$$

- ¿Qué costará un cuadro de 40 × 50 cm?

  El perímetro del marco es (2 · 0.4 + 2 · 0.5) metros.

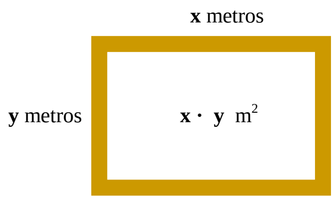
  El área del cristal es $0.4 \cdot 0.5\ m^2$.

  El precio total es

  $$\mathbf{P} = 10 \cdot (0.4 \cdot 0.5) + 10 \cdot (2 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.5) + 5 = 2 + 18 + 5 = \mathbf{25}\ €$$

- Si hacemos abstracción y llamamos **x** e **y** a las longitudes de los lados del cuadro, obtenemos una ***expresión algebraica*** que nos ayuda a efectuar los cálculos del precio en cada caso particular.

  $$P = 10 \cdot (x \cdot y) + 10 \cdot (x + x + y + y) + 5$$

  Podemos agrupar los términos iguales:

  $$P = 10xy + 10(2x + 2y) + 5$$

  $$\mathbf{P = 10xy + 20x + 20y + 5}$$

  No podemos reducir más la expresión porque las magnitudes **x**, **y**, **xy** son distintas ya que representan a números en principio diferentes.

  La expresión algebraica anterior se llama también ***polinomio*** o ***función polinómica en las variables*** **x** e **y**. Permite obtener el precio **P** en función de las longitudes **x** e **y** de los lados:

  $$\text{si} \quad \mathbf{x = 0.3},\ \mathbf{y = 0.4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 20 \cdot 0.3 + 20 \cdot 0.4 + 5 = 1.2 + 6 + 8 + 5 = \mathbf{20.2}$$

  $$\text{si} \quad \mathbf{x = 0.4},\ \mathbf{y = 0.5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 20 \cdot 0.4 + 20 \cdot 0.5 + 5 = 2 + 8 + 10 + 5 = \mathbf{25}$$

Ejemplo 2

Supongamos que el dueño de la tienda del ejemplo anterior quiere una expresión algebraica que proporcione el precio de los cuadros cuadrados para facilitar el cálculo a sus empleados. Si hacemos x = y en la anterior expresión algebraica obtenemos

$$\left.\begin{matrix} P = 10xy + 20x + 20y + 5 \\ x = y \end{matrix}\right\} \quad \to \quad P = 10x \cdot x + 20x + 20x + 5$$

Agrupamos y expresamos en modo más simple:

$$\mathbf{P = 10x^2 + 40x + 5}$$

Esta última expresión se llama ***polinomio*** o ***función polinómica en la variable*** **x**. Proporciona el precio de un cuadro cuadrado en función de la longitud **x** del lado.

$$\text{Si} \quad x = 0.4 \quad \to \quad P = 10 \cdot 0.4^2 + 40 \cdot 0.4 + 5 = 1.6 + 16 + 5 = 22.6$$

$$\text{Si} \quad x = 0.5 \quad \to \quad P = 10 \cdot 0.5^2 + 40 \cdot 0.5 + 5 = 2.5 + 20 + 5 = 27.5$$

$$\text{Si} \quad x = 0.6 \quad \to \quad P = 10 \cdot 0.6^2 + 40 \cdot 0.6 + 5 = 3.6 + 24 + 5 = 32.6$$

- Si queremos gastar 100 €, ¿cuál será el tamaño del cuadro cuadrado?

  Nos preguntamos por el valor de x para que P = 100. Se trata de resolver una ecuación polinómica de grado 2, de la que conocemos una fórmula que nos da las soluciones:

$$10x^2 + 40x + 5 = 100 \quad \to \quad 10x^2 + 40x - 95 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-95)}}{2 \cdot 10} = \frac{-40 \pm \sqrt{5400}}{20}$$

  Esta ecuación solo tiene una solución positiva $\mathbf{x = \frac{-40 + 30\sqrt{6}}{20}} \simeq \mathbf{1.67}$.

  Un cuadro cuadrado de 1.67 m de lado cuesta (aproximadamente) 100 €.

En este capítulo desarrollamos el álgebra de polinomios y alguna de sus aplicaciones, como es el caso de la resolución de ecuaciones algebraicas.

1 Para ver un espectáculo hay 3 tipos de entradas, que se venden cada una a 5, 10 y 15 euros respectivamente. Obtén una expresión algebraica que proporcione la recaudación total por la venta de **x** entradas de 5 euros, **y** entradas de 10 euros y **z** entradas de 15 euros.

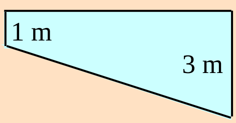
2 Obtén una expresión algebraica que proporcione el capital acumulado por una persona tras invertir durante un año x euros al 10 % de interés anual. ¿Y después de 2 años si el beneficio se va acumulando al final de cada año? ¿Y después de 3 años?

3 Si llamamos n al número de años en los que una persona tiene invertido un capital de x euros al 10 % anual, obtén una expresión algebraica que proporcione el capital acumulado transcurridos los n años. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que obtenga el doble del capital inicial?

4 Una piscina tiene una longitud de 20 metros. Su profundidad mínima es de un metro y la máxima es de 3 metros.

(A) ¿Qué longitud tiene el fondo de la piscina? ¿Y si la piscina tiene 40 metros de longitud?

(B) Si llamamos x a la longitud de la piscina, obtén una expresión algebraica que proporcione la longitud del fondo de la piscina.



5 Una empresa compra tres productos, A, B y C a 4, 6, y 12 euros la unidad, respectivamente. Encuentra una expresión que permita hallar el valor de las compras en función de la cantidad de cada tipo de producto.

2.2 Polinomios en una variable

Llamamos ***polinomio*** o ***función polinómica en la variable* x** a la expresión algebraica:

$$\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \dots + a_nx^n}$$

donde $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, ..., $\mathbf{a_n}$ son números reales, que llamamos ***coeficientes***, y los exponentes de x son números naturales. El mayor de los exponentes **n** indica el ***grado del polinomio***.

El coeficiente $\mathbf{a_0}$ se llama ***término independiente*** del polinomio y $\mathbf{a_n}$ ***coeficiente principal o director***.

Cada uno de los términos $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1x}$, $\mathbf{a_2x^2}$, **...**, $\mathbf{a_nx^n}$ recibe el nombre de ***monomio*** (polinomio de un único término). Los monomios anteriores tienen grados 0, 1, 2, ..., n, respectivamente.

Ejemplo 3

El polinomio $P(x) = 2 + 3x + 5x^2 - x^3$ posee 4 monomios:

$m_1(x) = 2$, monomio de grado 0 con coeficiente 2 (piensa que $2 = 2x^0$).
$m_2(x) = 3x$, monomio de grado 1 con coeficiente 3.
$m_3(x) = 5x^2$, monomio de grado 2 con coeficiente 5.
$m_3(x) = -x^3$, monomio de grado 3 con coeficiente –1.

El término independiente del polinomio es 2, el coeficiente principal –1 y el grado del polinomio es 3.

El orden de colocación de los términos del polinomio no importa. Las siguientes expresiones representan el mismo polinomio:

$$3x + 1 - x^3 + 5x^2 \qquad\qquad 5x^2 + 1 - x^3 + 3x$$

No obstante, los términos del polinomio serán ordenados generalmente de mayor a menor grado. En este caso:

$$\mathbf{P(x) = -x^3 + 5x^2 + 3x + 1}$$

➢ Igualdad de polinomios

Diremos que dos polinomios son ***iguales*** si tienen el mismo grado y todos los términos (monomios) de igual grado poseen idénticos coeficientes.

El polinomio $P(x) = ax^4 + 6x^3 - x - 2$ es igual a $Q(x) = 3x^4 + bx^3 + cx^2 - x + d$ únicamente si

$$a = 3,\ \ b = 6,\ \ c = 0\ \ y\ \ d = -2.$$

La letra de la variable no importa puesto que en realidad representa a números reales. Por ejemplo, los polinomios $P(x) = x^2 - 3x + 5$ y $P(y) = y^2 - 3y + 5$ son idénticos.

6 Di el valor de los términos independientes y de los coeficientes directores de los polinomios

$$P(x) = 4x^5 + 3x^2 - 2x - 3 \qquad Q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 4 \qquad R(x) = x^6 - x^4$$

7 Halla el valor de a, b y c para que los siguientes polinomios sean iguales:

$$P(x) = 2x + ax^2 + x^3 + bx^4 \qquad Q(x) = c + 2x - 4x^2 + x^3 - 3x^4$$

2.3 Suma, diferencia y producto de polinomios

- ***La suma de dos polinomios*** es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios del mismo grado (llamados monomios semejantes) de ambos polinomios según la expresión:

$$\mathbf{ax^m + bx^m = (a + b)x^m}$$

- ***La diferencia de polinomios*** se efectúa restando los monomios semejantes:

$$\mathbf{ax^m - bx^m = (a - b)x^m}$$

- ***El producto de dos polinomios*** es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada monomio del primer polinomio por todos los monomios del segundo y sumando a continuación los monomios semejantes. Los monomios se multiplican con la expresión:

$$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)(x^n \cdot x^m) = abx^{n+m}}$$

Ejemplo 4

- La suma y diferencia de los monomios semejantes $M(x) = 2x^2$ y $N(x) = 5x^2$ son

$$\mathbf{M(x) + N(x)} = 2x^2 + 5x^2 = (2 + 5)x^2 = \mathbf{7x^2} \qquad \mathbf{M(x) - N(x)} = 2x^2 - 5x^2 = (2 - 5)x^2 = \mathbf{-3x^2}$$

- La suma y diferencia de los polinomios $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$ y $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x$ son

$$\mathbf{P(x) + Q(x)} = (2x^3 - x^2 + 3x - 2) + (-2x^3 + 3x^2 - 2x) = (2 - 2)x^3 + (-1 + 3)x^2 + (3 - 2)x - 2 =$$
$$= 0x^3 + 2x^2 + x - 2 = \mathbf{2x^2 + x - 2}$$
$$\mathbf{P(x) - Q(x)} = (2x^3 - x^2 + 3x - 2) - (-2x^3 + 3x^2 - 2x) = (2 + 2)x^3 + (-1 - 3)x^2 + (3 + 2)x - 2 =$$
$$= \mathbf{4x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

- El producto de los monomios $M(x) = 5x^3$ y $N(x) = -2x^4$ es

$$\mathbf{M(x) \cdot N(x)} = (5x^3) \cdot (-2x^4) = -10x^{3+4} = \mathbf{-10x^7}$$

- El producto de los polinomios $P(x) = (2x^2 - 3)$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 5$ es

$$\mathbf{P(x) \cdot Q(x)} = (2x^2 - 3)(x^2 + 2x - 5) = 2x^2(x^2 + 2x - 5) - 3(x^2 + 2x - 5) =$$
$$= 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 3x^2 - 6x + 15 = \mathbf{2x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 6x + 15}$$

8 Efectúa las siguientes operaciones con monomios o binomios:

(A) $3x^2 + 8x^2 - 2x^2$ (B) $3x^2 \cdot 5x$ (C) $-2x^3 \cdot (-5x^3)$ (D) $4x^5 - 2x^3 \cdot 2x^2$

(E) $2x^3(x^2 - 2)$ (F) $x(2x + 5)$ (G) $-3x^5(3x^2 - 2x - 6)$ (H) $2x(2x - 2) - x(4x - 4)$

9 Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 + x - 1$ y $Q(x) = x^2 - x + 2$, calcula:

(A) $P(x) + Q(x)$ (B) $P(x) - Q(x)$ (C) $P(x) \cdot Q(x)$

10 Dados los polinomios $P(x) = x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x - 1$ y $R(x) = x^2 - x - 1$, efectúa las operaciones siguientes, para comprobar la validez de las propiedades:

(A) **Propiedad asociativa del producto:** $P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)] = [P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x)$.

(B) **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:** $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$.

2.4 Potencias naturales de polinomios

La potencia enésima de un polinomio es el producto de dicho polinomio por sí mismo n veces:

$$\left(\mathbf{P(x)}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{P(x)\cdot P(x)\cdot \overset{(n\ veces)}{.....}\cdot P(x)}$$

En el caso de la potencia de un monomio tenemos, por las propiedades de las potencias:

$$\left(\mathbf{ax^m}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n}\left(\mathbf{x^m}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n x^{nm}}$$

- $\left(2x^3\right)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 = 2^4\left(x^3\right)^4 = \mathbf{16x^{12}}$
- $\mathbf{(2x^2+3)^2} = (2x^2+3)\cdot(2x^2+3) = 4x^4+6x^2+6x^2+9 = \mathbf{4x^4+12x^2+9}$

Las siguientes fórmulas son de gran aplicación en los productos y potencias de polinomios:

(1) Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(2) Cubo de una suma: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(3) Suma por diferencia es igual a diferencia de los cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(4) Cuadrado de un trinomio: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(1) $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \mathbf{a^2+2ab+b^2}$

(2) $\mathbf{(a+b)^3} = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

(3) $\mathbf{(a+b)(a-b)} = a^2+ab-ba+b^2 = \mathbf{a^2-b^2}$

(4) $\mathbf{(a+b+c)^2} = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

- $\mathbf{(2x^2+3)^2} = (2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot 3+3^2 = \mathbf{4x^4+12x^2+9}$
- $\mathbf{(2x^2-3)^2 = (2x^2+(-3))^2} = (2x^2)^2+2\cdot 2x^2\cdot(-3)+(-3)^2 = \mathbf{4x^4-12x^2+9}$
- $\mathbf{(2x^2+5)^3} = (2x^2)^3+3(2x^2)^2\,5+3\cdot 2x^2\cdot 5^2+5^3 = 8x^6+3\cdot 4x^4\cdot 5+150x^2+5^3 = \mathbf{8x^6+60x^4+150x^2+125}$
- $\mathbf{(2x^2-5)^3 = (2x^2+(-5))^3} = (2x^2)^3+3(2x^2)^2\,(-5)+3\cdot 2x^2\,(-5)^2+(-5)^3 = 8x^6+3\cdot 4x^4\,(-5)+150x^2+(-5)^3$
  $= \mathbf{8x^6-60x^4+150x^2-125}$
- $\mathbf{(2x+x^3)(2x-x^3)} = (2x)^2-(x^3)^2 = \mathbf{4x^2-x^6}$
- $\mathbf{(x^2+2x-1)^2} = (x^2)^2+(2x)^2+(-1)^2+2\cdot x^2\cdot 2x+2\cdot x^2\cdot(-1)+2\cdot 2x\cdot(-1) = x^4+4x^2+1+4x^3-2x^2-4x$
  $= \mathbf{x^4+4x^3+2x^2-4x+1}$

11 Efectúa los siguientes productos de polinomios, simplificando el resultado en lo posible:

(A) $(3x^2+2)(3x^2+2)$ (B) $(3x^2-2)(3x^2-2)$ (C) $(3x^2-2)(3x^2+2)$ (D) $(5x-4)\cdot(5x+4)$

(E) $(2x^3-3x-1)\cdot(x^2+3x+2)$ (F) $(-x^4+2x^3-3x+4)\cdot(-x^3+x^2-3)$

12 Calcula las siguientes potencias de polinomios:

(A) $(2x+3)^2$ (B) $(2x-3)^2$ (C) $(x^2+1)^2$ (D) $(x^2-1)^2$ (E) $(2x^2)^4 - (4x^4)^2$

(F) $(x^2+x+1)^2$ (G) $(x+1)^3$ (H) $(x-1)^3$ (I) $(x+1)^4$ (J) $(x-1)^4$

Binomio de Newton

El ***binomio de Newton*** es una fórmula que permite hallar las potencias naturales de cualquier binomio.

No deducimos en estos momentos el desarrollo de la misma, pero indicamos su evidencia que, además, sugiere la manera más fácil de recordarla.

Exponemos las potencias 0, 1, 2, 3 y 4 de un binomio:

Potencia 0: $\mathbf{(a+b)^0} = \mathbf{1}$

Potencia 1: $\mathbf{(a+b)^1} = \mathbf{1a + 1b}$

Potencia 2: $\mathbf{(a+b)^2} = \mathbf{1a^2 + 2ab + 1b^2}$

Potencia 3: $\mathbf{(a+b)^3} = \mathbf{1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3}$

Potencia 4 : $\mathbf{(a+b)^4} = \mathbf{1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

....

Observa las potencias decrecientes de a y crecientes de b en cada uno de los términos y la secuencia de los coeficientes de dichos términos que llamamos ***números combinatorios*** y que expresamos por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} n & \text{indica la potencia a calcular} \\ k & \text{indica el término dentro de cada potencia,} \quad 0 \le k \le n \end{cases}$$

hallados, de modo práctico, con el llamado ***triángulo de Tartaglia*** del cuadro anterior. De este modo la expresión de la fórmula del binomio de Newton es:

$$\mathbf{(a+b)^n} = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Ejemplo 5

$\mathbf{(3x-2)^5 = (3x+(-2))^5 =}$

$$= \binom{5}{0}(3x)^5(-2)^0 + \binom{5}{1}(3x)^{5-1}(-2)^1 + \binom{5}{2}(3x)^{5-2}(-2)^2 + \binom{5}{3}(3x)^{5-3}(-2)^3 + \binom{5}{4}(3x)^{5-4}(-2)^4 + \binom{5}{5}(3x)^{5-5}(-2)^5 =$$

$$= \mathbf{1}\,(3x)^5(-2)^0 + \mathbf{5}\,(3x)^4(-2)^1 + \mathbf{10}\,(3x)^3(-2)^2 + \mathbf{10}\,(3x)^2(-2)^3 + \mathbf{5}\,(3x)^1(-2)^4 + \mathbf{1}\,(3x)^0\,2^5 =$$

$$= 3^5 x^5 - 5\cdot 3^4\cdot 2\,x^4 + 10\cdot 3^3\cdot 2^2\,x^3 - 10\cdot 3^2\cdot 2^3\,x^2 + 5\cdot 3\cdot 2^4\,x - 2^5 =$$

$$= \mathbf{243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32}$$

13 Halla las siguientes potencias de binomios:

(A) $(3x+2)^3$ (B) $(2x-1)^4$ (C) $(x^2-2)^4$ (D) $(x+1)^5-(x-1)^5$

(E) $(x+3)^6$ (F) $(2x-4)^5$ (G) $(x^3+3x)^4$ (H) $\left(\frac{1}{2}x^2+2x^3\right)^4$

14 Obtén el término de grado indicado en los siguientes binomios:

(A) Cuarto de $(3x-2)^6$ (B) Tercero de $(2x+1)^8$ (C) Segundo de $(4x-1)^5$ (D) Décimo de $(x^2-4)^{10}$

2.5 División euclídea de polinomios

La ***división entera*** o ***euclídea*** de polinomios generaliza la misma operación existente en los números enteros. Dividir un número entero **D**, llamado **dividendo**, entre otro número entero **d**, **divisor**, es encontrar dos números enteros **C** y **R**, llamados respectivamente **cociente** y **resto**, que verifican:

$$\mathbf{D = d \cdot C + R} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{R < d}$$

Si R = 0, decimos que la división es **exacta**. Así:

$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ $8 = 2 \cdot 4$ **división entera exacta,** cociente **2** y resto **0**

$\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ $38 = 7 \cdot 5 + 3$ **división entera no exacta,** cociente **7** y resto **3**

La división entera o ***euclídea*** del polinomio **P(x)**, ***dividendo***, entre el polinomio **Q(x)**, ***divisor***, consiste en obtener dos polinomios **C(x)** y **R(x),** respectivamente ***cociente*** y ***resto***, tales que:

$$\mathbf{P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

siendo el grado del resto R(x) menor que el del divisor Q(x).

- Si el resto R(x) = 0, decimos que la ***división*** es ***exacta***:

$$\mathbf{P(x) = C(x) \cdot Q(x)}$$

Ejemplo 6

- La división entre dos monomios es siempre exacta si el grado del dividendo es mayor o igual que el del divisor. Se puede expresar como en la división de números:

$\begin{array}{l|l} 6x^3 & 3x^2 \\ \hline 0 & 2x \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 7x^3 & 3x^2 \\ \hline 0 & \frac{7}{3}x \end{array}$

$6x^3 = 3x^2 \cdot 2x$ $\qquad$ $7x^3 = 3x^2 \cdot \frac{7}{3}x$

- Pero en otro caso no existe como operación entre polinomios. En el siguiente ejemplo, el cociente es 0; no hay otro polinomio que al multiplicarlo por $3x^5$ produzca como resultado $6x^3$:

$\begin{array}{l|l} 6x^3 & 3x^5 \\ \hline 6x^3 & 0 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ $6x^3 = 3x^5 \cdot 0 + 6x^3$

- La división entre un polinomio y un monomio es exacta solo si el grado del monomio es menor que el de todos los términos del polinomio. En cualquier caso, se efectúa dividiendo término a término los monomios del dividendo con grado mayor que el divisor; los que no lo cumplen constituyen el resto.

$\begin{array}{c|l} x^3 - 3x^2 + 2x & x \\ \hline 0 & x^2 - 3x + 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 2x & x^2 \\ \hline 2x & x - 3 \end{array}$

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$ $\qquad$ $x^3 - 3x^2 + 2x = x^2(x - 3) + 2x$

División exacta: resto 0 $\qquad$ **División entera: resto 2x**

➢ Algoritmo de la división

La división entre dos polinomios se realiza repitiendo el proceso que explicamos en el próximo ejemplo mientras el grado del resto sea mayor que el grado del divisor:

(1) Ordenamos los términos del dividendo de mayor a menor grado, dejando huecos si falta algún término.

(2) Dividimos los monomios de mayor grado del dividendo y del divisor (es una división exacta). El cociente obtenido se multiplica por el divisor y a continuación se resta del dividendo.

(3) Si el resto obtenido es de grado menor que el del divisor hemos terminado la división.

(4) Si el resto obtenido no es de grado menor que el del divisor el resto es considerado como el nuevo dividendo y repetimos los pasos anteriores.

Ejemplo 7

Dividimos el polinomio $P(x) = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ entre $Q(x) = 2x^2 + 1$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +4x^3 & +5x^2 & +3x & -1 & 2x^2+1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2 \\ \cline{1-5}
& 4x^3 & +2x^2 & +3x & -1 &
\end{array}$$

Resto de grado 3: Seguimos dividiendo

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +4x^3 & +5x^2 & +3x & -1 & 2x^2+1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x \\ \cline{1-5}
& 4x^3 & +2x^2 & +3x & -1 & \\
& -4x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
& & 2x^2 & +x & -1 &
\end{array}$$

Resto de grado 2: Seguimos dividiendo

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +4x^3 & +5x^2 & +3x & -1 & 2x^2+1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x+1 \\ \cline{1-5}
& 4x^3 & +2x^2 & +3x & -1 & \\
& -4x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
& & 2x^2 & +x & -1 & \\
& & -2x^2 & & -1 & \\ \cline{3-5}
& & & x & -2 &
\end{array}$$

Resto de grado 1, menor que el del divisor. Hemos terminado la división:

El cociente es $\mathbf{C(x) = 3x^2 + 2x + 1}$ y el resto $\mathbf{R(x) = x - 2}$.

Escribimos:

$$\boxed{\mathbf{6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = (2x^2 + 1)(3x^2 + 2x + 1) + x - 2}}$$

15 Obtén el cociente y el resto de las siguientes divisiones euclídeas y expresa el resultado de la división en la forma “dividendo es igual a divisor por cociente más resto”:

(A) $P(x) = x^4 + 1$ entre $Q(x) = x^2 + 1$

(B) $P(x) = x^4 + 1$ entre $Q(x) = x^2 - 1$

(C) $P(x) = x^4 - 1$ entre $Q(x) = x^2 + 1$

(D) $P(x) = x^2 + 1$ entre $Q(x) = x^2 - 1$

(E) $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ entre $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

(F) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ entre $Q(x) = x - 1$

(G) $P(x) = 2x^4 + 5x^2 + x + 3$, $Q(x) = 4x^2 + 2$

(H) $P(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$, $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

2.6 División por (x – a): regla de Ruffini

En forma general, al dividir un polinomio P(x) por el polinomio de grado 1, Q(x) = x – a, obtenemos

$$\mathbf{P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R(x)}$$

Como $\mathbf{P(x)} = \mathbf{a_n x^n} + \mathbf{a_{n-1} x^{n-1}} + \mathbf{....} + \mathbf{a_1 x} + \mathbf{a_0}$ **es de grado n** sabemos que:

- El cociente C(x) es un polinomio de grado n – 1: $\mathbf{C(x)} = \mathbf{c_{n-1} x^{n-1}} + \mathbf{....} + \mathbf{c_1 x} + \mathbf{c_0}$.
- El resto de la división es de grado 0: **R(x) = R**.

Además, las operaciones que conducen a obtener los coeficientes del cociente y resto de la división pueden ser resumidas en el siguiente tipo de formato. Colocamos en la primera línea los coeficientes del dividendo (si falta algún monomio, se pone un 0) y el número **a**. A la derecha tenemos las operaciones sucesivas que hay que realizar. Es la llamada ***regla de Rufinni***:

Coeficientes del dividendo

De (x – **a**) →

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_2 & a_1 & & a_0 \\ a & & a \cdot c_{n-1} & & & a \cdot c_1 & & a \cdot c_0 \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & c_1 & c_0 & & R \end{array}$$

Coeficientes del cociente

Resto

$$\begin{aligned} \mathbf{c_{n-1}} &= \mathbf{a_n} \\ \mathbf{c_{n-2}} &= \mathbf{a_{n-1}} + \mathbf{a \cdot c_{n-1}} \\ &\vdots \\ \mathbf{c_0} &= \mathbf{a_1} + \mathbf{a \cdot c_1} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{a_0} + \mathbf{a \cdot c_0} \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Obtenemos el cociente y el resto de la división de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ entre $Q(x) = x - 2$, mediante el algoritmo de la división y, con la regla de Ruffini, coloreando los coeficientes coincidentes en ambos algoritmos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -\;1x^2 & +\;0x & +\;1 & x - 2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +\;4x^2 & & & 2x^2 + 3x + 6 \\ \hline & 3x^2 & +\;0x & -\;1 & \\ & -3x^2 & +\;6x & & \\ \hline & & 6x & -\;1 & \\ & & 6x & +\;12 & \\ \hline & & & 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & \boxed{13} \end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 1 = (x - 2)\,(2x^2 + 3x + 6) + 13$$

La regla de Ruffini se aplica en 4 rápidos pasos, hasta obtener la expresión anterior:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 6 & \\ \hline & 2 & 3 & 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & 13 \end{array}$$

16 Con la regla de Ruffini obtén el cociente y el resto de la división de $P(x) = x^3 - 3x + 2$ entre los binomios:
(A) (x – 1) (B) (x + 1) (C) (x – 2) (D) (x + 2) (E) x

17 Halla el valor de m para que al dividir $P(x) = 4x^5 + mx^4 - x + 3$ entre $Q(x) = x - 2$ se obtenga 3 de resto.

2.7 Valor numérico y raíz de un polinomio

Consideramos el polinomio $\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + ... + a_nx^n}$, y **a** un número real.

- Llamamos ***valor del polinomio*** **P(x)** ***en*** **x = a**, que representamos por **P(a)**, al número que obtenemos al sustituir en el polinomio la variable x por el número a:

$$\mathbf{P(a) = a_0 + a_1a + a_2\,a^2 + ... + a_na^n}$$

- Decimos que el número real **a** es una ***raíz del polinomio*** **P(x)** si **P(a) = 0**.

El valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ en $x = -1$ es **P(–1) = –3**, pues

$$P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 2(-1) + 4 = -1 - 4 - 2 + 4 = -3$$

Mientras que, como $\mathbf{P(2)} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 8 - 16 + 4 + 4 = \mathbf{0}$, decimos entonces que **el número 2 es una raíz del polinomio P(x)**.

➢ Teorema del resto

El resto de la división del polinomio **P(x)** por el binomio **x – a** es igual al valor de P(x) en **a**:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{P(x)} & \mathbf{x - a} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{C(x)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R = P(a)}$$

Si efectuamos la división de P(x) por x – a, obtenemos

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

y sustituyendo x por a en la anterior expresión, obtenemos:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 \cdot C(a) + R \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(a) = R}$$

Ejemplo 9

Dado el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^2 - 16x + 12$, calculamos el valor numérico en $x = 3$ y en $x = -2$, efectuamos la división de P(x) por los binomios x – 3 y x + 2 con la regla de Ruffini y comprobamos que el resto de dichas divisiones coincide con los valores numéricos anteriores.

$$\mathbf{P(3)} = 3^5 - 3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 12 = 243 - 27 - 48 + 12 = \mathbf{180}$$

$$\mathbf{P(-2)} = (-2)^5 - 3\cdot(-2)^2 - 16\cdot(-2) + 12 = -32 - 12 + 32 + 12 = \mathbf{0}$$

	1	0	0	–3	–16	12
3		3	9	27	72	168
	1	**3**	**9**	**24**	**56**	**180**

	1	0	0	–3	–16	12
–2		–2	4	–8	22	–12
	1	**–2**	**4**	**–11**	**6**	**0**

18 Obtén el valor numérico de $P(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x - 4$ en $x = \sqrt{2}$, y en $x = -\sqrt{2}$.

19 Halla el valor de m para que al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 4x - 3$ entre $Q(x) = x + 1$ se obtenga de resto 5.

20 Halla los valores de m y n para que al dividir el polinomio $P(x) = 2x^4 + mx^3 + 3x^2 + nx + 4$ entre el polinomio $Q(x) = x - 1$ y entre $R(x) = x + 2$ se obtenga de resto 7 y 58 respectivamente.

2.8 Raíces de polinomios con coeficientes enteros

Veremos que es importante obtener las raíces de los polinomios de grado n:

$$\mathbf{P(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

pues, si existen, son las soluciones de la ecuación $\mathbf{a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$.

Una consecuencia del llamado ***teorema fundamental del Álgebra*** es que:

"Cualquier polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales"

No existe un método general para obtener dichas raíces. Los siguientes teoremas permiten conocer qué números enteros o fraccionarios pueden ser raíces de un polinomio que tenga por coeficientes números enteros. También es aplicable a los polinomios de coeficientes fraccionarios como vemos en el ejemplo12.

➢ Teorema 1. Búsqueda de las raíces enteras

Consideramos el polinomio **con coeficientes enteros**

$$\mathbf{P(x) = a_nx^n + ... + a_2 x^2 + a_1x + a_0}, \text{ con } \mathbf{a_0, a_1, ..., a_n} \in \mathbb{Z}.$$

Si **a es una raíz entera de P(x)** se tiene que **a es un divisor de $\mathbf{a_0}$**.

Si a es una raíz de P(x) se tiene que P(a) = 0, entonces:

$$a_n a^n + ... + a_2 a^2 + a_1a + a_0 = 0$$

Aislamos a_0:

$$a_0 = -(a_n a^n + ... + a_2 a^2 + a_1a) \quad \rightarrow \quad a_0 = -a\,(a_n a^{n-1} + ... + a_2 a + a_1)$$

Si $b = -(a_n a^{n-1} + ... + a_2 a + a_1)$ se tiene que $\mathbf{a_0 = a \cdot b}$.

Necesariamente b es un número entero, pues a es entero y los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ también.

Como $a_0 = a \cdot b$ obtenemos que a_0 es múltiplo de a y, por ello, **a es divisor de $\mathbf{a_0}$**.

Ejemplo 10

Obtenemos las raíces enteras del polinomio $\mathbf{P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

Como los coeficientes de P(x) son todos enteros, el teorema 1 asegura que los únicos números que pueden ser **raíces enteras** de P(x) son los divisores del término independiente $\mathbf{a_0 = 6}$:

Divisores de 6: {1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6}

Calculamos el valor de P(x) en cada uno de los candidatos anteriores:

- Como $P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 4 \neq 0$ → 1 no es raíz de P(x)
- Como $\mathbf{P(-1)} = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = \mathbf{0}$ → **–1 es raíz de P(x)**
- Como $\mathbf{P(2)} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = \mathbf{0}$ → **2 es raíz de P(x)**
- Como $\mathbf{P(3)} = 3^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = \mathbf{0}$ → **3 es raíz de P(x)**

Así, **las raíces de P(x)** son los números **–1**, **2** y **3**, no siendo necesario continuar la búsqueda porque el teorema fundamental del Álgebra asegura que un polinomio de grado 3 tiene a lo sumo 3 raíces. Esto quiere decir que el valor de P(x) en los restantes divisores de 6 no es cero.

Ejemplo 11

Si el polinomio tiene coeficientes fraccionarios, también podemos buscar si hay soluciones enteras:

Las raíces del polinomio $\mathbf{P(x)} = \mathbf{x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}}$ son las mismas que las de $\mathbf{Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2}$, polinomio obtenido al multiplicar los coeficientes de P(x) por el m.c.m. de los denominadores, que es 6. Esto es debido a que las ecuaciones siguientes tienen las mismas soluciones:

$$\mathbf{x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = 0} \overset{\text{m.c.m.} = 6}{\Leftrightarrow} 6\left(x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0}$$

Las únicas raíces enteras posibles de $\mathbf{Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2}$ son los divisores de $a_0 = 2$: $\{\pm1, \pm2\}$.

Puedes comprobar que Q(1) = 6, Q(–1) = 12, Q(2) = 60 y **Q(–2) = 0**.

Entonces el polinomio P(x) **solo tiene una raíz entera**, **–2**. ¿Tendrá raíces fraccionarias?

➢ Teorema 2. Búsqueda de las raíces fraccionarias

Consideramos el polinomio **con coeficientes enteros**:

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}, \text{ con } \mathbf{a_0, a_1, ..., a_n} \in \mathbb{Z}$$

Si $\mathbf{a = \frac{r}{s}}$ **es una raíz de P(x)** $\rightarrow$ **r es divisor de a_0** y **s es divisor de a_n**

Se requiere que la fracción **r/s** es irreducible, es decir, r y s son primos entre sí.

La demostración es similar a la del teorema 1; en realidad dicho teorema es un caso particular del teorema 2 pues toda raíz entera es racional.

Ejemplo 12

Hallamos las raíces fraccionarias del polinomio del ejemplo 11: $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$.

Todos los coeficientes de P(x) son enteros, aplicando el teorema 2, si r/s es raíz de Q(x) se tiene que r es divisor de $a_0 = 2$ y s es divisor de $a_n = 6$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Divisores de } 2: \{\pm1, \pm2\} \\ \text{Divisores de } 6: \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Posibles raíces racionales: } \left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\right\}$$

Cualquier divisor de 2 entre cualquier divisor de 6 puede ser una raíz de Q(x). Observa que entre los candidatos a raíces fraccionarias obtenemos también los candidatos a raíces enteras.

Puesto que P(1/2) = 0, P(1/3) = 0 y P(–2) = 0, P(x) tiene una raíz entera, –2, como vimos en el ejemplo 11, y dos raíces fraccionarias, 1/2 y 1/3.

21 Busca las raíces enteras de los polinomios:

(A) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ (B) $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (C) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

22 Busca las raíces enteras y en su defecto, las fraccionarias, de los siguientes polinomios:

(A) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (B) $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ (C) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(D) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (E) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$ (F) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

2.9 Factorización de polinomios

Supongamos que al dividir un polinomio P(x) por otro polinomio de grado inferior Q(x) obtenemos que el resto es 0. Esto significa que ***P(x) es divisible por Q(x)***

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} 0 & C(x) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P(x) = C(x) \cdot Q(x)}$$

En ese caso tenemos expresado P(x) como producto de dos factores, C(x) y Q(x). Decimos que tenemos una ***factorización*** de P(x).

➢ Teorema del factor

Dado el polinomio **P(x)**, son equivalentes:

a es una raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ **(x – a) es un factor de P(x)**

Efectuamos la división euclídea de P(x) por (x – a)

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

siendo, por el **teorema del resto** R = P(a).

- Si a es raíz de P(x) $\rightarrow$ P(a) = 0 $\rightarrow$ R = 0 $\rightarrow$ **P(x) = (x – a) · C(x)** $\Rightarrow$ (x – a) es un factor de P(x)
- Si (x – a) es un factor de P(x) $\rightarrow$ **P(x) = (x – a) · C(x)** $\rightarrow$ P(a) = 0 $\rightarrow$ a es una raíz de P(x)

La combinación del teorema del factor, el teorema del resto y la búsqueda de raíces enteras o racionales permite obtener factorizaciones de polinomios de grado mayor o igual que 2.

Ejemplo 13

- Obtenemos las raíces y la factorización del polinomio $P(x) = x^2 + 2x - 15$.

  Los candidatos a raíces enteras son los divisores de 15: {±1, ±3, ±5, ±15}.

  Obtenemos que P(3) = 0 y P(–5) = 0. Según el teorema del factor, los factores asociados a las raíces **3** y **–5** son, respectivamente, **(x – 3)** y **(x + 5)**. Obtenemos la factorización de P(x) con la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & -15 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} x^2 + 2x - 15 & x - 3 \\ \cline{2-2} 0 & x + 5 \end{array} \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

  Las raíces de P(x) son 3 y –5, y su factorización es **P(x) = (x – 3)(x + 5)**.

- Obtenemos las raíces y la factorización del polinomio $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$.

  Los candidatos a raíces enteras del polinomio Q(x) no se pueden obtener pues no hay término independiente. Pero observa que en ese caso, **el 0 es una raíz de Q(x)**, pues **Q(0) = 0**. Podemos sacar factor común **x**, que es el factor asociado a la raíz 0:

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 15x = x(x^2 + 2x - 15) = x \cdot P(x) = x(x - 3)(x + 5)$$

  Entonces las raíces de Q(x) son **0**, **3** y **–5** y su factorización es:

$$\mathbf{Q(x) = x(x - 3)(x + 5)}$$

➢ Descomposición de un polinomio en factores lineales

Si el polinomio **P(x)** = $a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene como raíces a los n números reales distintos $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ se descompone en factores lineales o de primer grado del modo siguiente:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Ejemplo 14

Hallamos las raíces y la factorización del polinomio $P(x) = 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1$.

Los candidatos a ser raíces racionales de P(x) son:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divisores de } -1: \{\pm 1\} \\ \text{Divisores de } 12: \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12\}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Posibles raíces racionales: } \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6} \ \pm\frac{1}{12}\right\}$$

Comprobamos que $P(1/2) = 0$ $\rightarrow$ 1/2 es raíz de P(x) $\rightarrow$ $(x - 1/2)$ es factor de P(x)

	12	4	–3	–1
1/2		6	5	1
	12	10	2	**0**

$\Rightarrow$ $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = (x - 1/2)(12x^2 + 10x + 2)$ (1)

Ahora factorizamos el polinomio $Q(x) = 12x^2 + 10x + 2$. Comprobamos que $Q(-1/2) = 0$, por lo que $(x + 1/2)$ es un factor de Q(x).

	12	10	2
–1/2		–6	–2
	12	4	**0**

$\Rightarrow$ $12x^2 + 10x + 2 = (x + 1/2)(12x + 4)$ (2)

Agrupando (1) y (2) obtenemos la descomposición de P(x) como producto de factores lineales

$$\mathbf{12x^3 + 4x^2 - 3x - 1} = (x - 1/2)(12x^2 + 10x + 2) = \mathbf{(x - 1/2)\ (x + 1/2)\ (12x + 4)}$$

Del último factor extraemos factor común 12, que es el coeficiente principal de P(x) y, con esta factorización equivalente, en cada factor observamos la raíz asociada:

$$\mathbf{P(x) = 12(x - 1/2)\ (x + 1/2)(x + 1/3)}$$

Las raíces de P(x) son **1/2**, **–1/2** y **–1/3**.

23 Comprueba que las raíces de $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6$ son 2, –3, 1/2 y –1/2, y escribe su descomposición en factores lineales.

24 ¿Qué polinomio de grado 3 tiene por raíces –2, 4, 6 y coeficiente principal –3? ¿Y coeficiente principal 1?

25 Obtén un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean 0, 1 y –1.

26 Obtén las raíces y la descomposición en factores lineales de los siguientes polinomios:

(A) $x^2 - 9$ (B) $9x^2 - 4$ (C) $3x^2 + x$ (D) $2x^2 + 8x - 10$ (E) $6x^2 + x - 2$ (F) $3x^2 + 2x$

(F) $3x^3 + 6x^2 - 9x$ (H) $4x^3 - 8x^2 - x + 2$ (I) $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ (J) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

(K) $x^2 + x - 2$ (L) $2x^3 - x^2 - x$ (M) $x^4 - 5x^2 + 4$ (N) $x^4 - 10x^2 + 9$ (Ñ) $-2x^2 + 3x$

➢ Raíces múltiples de un polinomio

Ejemplo 15

Obtenemos las raíces y la descomposición factorial del polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$.

Los candidatos a ser raíces enteras son $\{\pm1, \pm3, \pm9\}$. De todos ellos, obtenemos que $P(1) = P(-1) = P(3) = 0$.

Por tanto, **1**, **−1** y **3 son raíces de P(x)**, y sus factores asociados son $(x - 1)$, $(x + 1)$ y $(x - 3)$.

Para obtener la descomposición factorial de P(x), dividimos sucesivamente por los anteriores factores, con la regla de Ruffini:

	1	−6	8	6	−9	
1		1	−5	3	9	
	1	−5	3	9	**0**	$\Rightarrow\ x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$
−1		−1	6	−9		
	1	−6	9	**0**		$\Rightarrow\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x + 1)(x^2 - 6x + 9)$
3		3	−9			
	1	−3	**0**			$\Rightarrow\ x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$

En resumen, la factorización de P(x) es:

$$\mathbf{P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 3)}$$

Observa que el factor $(x - 3)$, asociado a la raíz 3, aparece dos veces. Decimos por ello que ***la raíz 3 es doble***. Como los otros factores no están repetidos, sus raíces asociadas 1 y −1 se llaman ***simples***.

La factorización de P(x) se expresa más agrupada:

$$\mathbf{P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)^2}$$

Dada la descomposición del polinomio P(x) en producto de factores lineales

$$\mathbf{P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}$$

donde las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ no son necesariamente todas distintas:

Una raíz se llama ***simple*** si su factor asociado aparece solo una vez en la descomposición de P(x), ***doble*** si aparece dos veces, ***triple*** si aparece 3 veces, etc. En general se llaman ***múltiples*** si aparece más de una vez.

- El polinomio $\mathbf{P(x) = (x - 2)^3\,(x + 3)^2}$ tiene una raíz triple, 2, y una doble, −3.
- El polinomio $\mathbf{P(x) = x^3\,(x - 2)\,(x + 1)}$ tiene dos raíces simples, 2 y −1, y 0 triple, pues $\mathbf{x^3 = (x - 0)^3}$.

27 Comprueba que las raíces de $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$ son 1 (triple) y −2 (doble) y escribe su descomposición en factores lineales.

28 Escribe un polinomio de grado 4 con raíz triple 0 y raíz simple 3.
Escribe polinomios de grado 4 que solo tengan por raíces los números 1 y −1.

Ejemplo 16

En ocasiones la búsqueda de raíces enteras o fraccionarias no es suficiente para obtener la factorización de un polinomio, pues algunas de sus raíces pueden ser números irracionales.

Hallamos las raíces y la factorización del polinomio $\mathbf{P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x - 4}$.

Las raíces enteras de P(x) solo pueden ser los divisores del término independiente –4 que son { ±1, ±2, ±4 }

Comprobamos que P(1) = P(2) = 0, por lo que los números 1 y 2 son raíces de P(x). La factorización correspondiente se obtiene con la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 0 & 6 & -4 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 4 & \mathbf{0} \\ 2 & & 2 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \mathbf{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$

$\Rightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x-2)(x^2 - 2)$

Tenemos la siguiente factorización de P(x), en dos factores de grado 1 y otro de grado 2:

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(x-2)(x^2-2)}$$

Llegados a este punto no podemos continuar porque no hay ninguna otra raíz entera ni fraccionaria (no hay raíces fraccionarias porque el coeficiente principal de P(x) es 1).

Pero el polinomio $Q(x) = x^2 - 2$ tiene dos raíces irracionales, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, que obtenemos de resolver la ecuación

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

y se puede factorizar como $\mathbf{x^2 - 2} = \left(\mathbf{x} - \sqrt{\mathbf{2}}\right)\left(\mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{2}}\right)$.

De este modo obtenemos la descomposición en 4 factores lineales del polinomio P(x):

$$\mathbf{P(x)} = (\mathbf{x-1})(\mathbf{x+1})\left(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}}\right)\left(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}\right)$$

El polinomio P(x) tiene dos raíces enteras, **1** y **2**, y dos raíces irracionales, $\sqrt{\mathbf{2}}$ y $-\sqrt{\mathbf{2}}$.

Observamos que cuando no hay raíces fraccionarias, pero alguno de los factores del polinomio (o el mismo polinomio) es de grado 2, la resolución de ecuaciones de segundo grado permite obtener raíces irracionales. En el apartado siguiente resolvemos ecuaciones de primer y segundo grado, y otras reducibles a ecuaciones de segundo grado.

29 Obtén las raíces y la factorización de los polinomios:

(A) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ (B) $P(x) = 6x^2 - x - 1$ (C) $P(x) = 6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + x - 1$
(D) $P(x) = x^4 - x^2 - 12$ (E) $P(x) = x^5 - x^3 - 6x$ (F) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$
(G) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ (H) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ (I) $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
(J) $P(x) = 2x^4 - x^2$ (K) $P(x) = x^3 - 3x + 2$ (L) $P(x) = -8x^6 + 9x^3 - 1$
(M) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (N) $P(x) = x^4 - 7x^2 + 12$ (Ñ) $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$
(O) $P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ (P) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$

30 Teniendo en cuenta la propiedad $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, muchos polinomios se pueden factorizar rápidamente, sin necesidad de recurrir a la división euclídea. Aplícala a los polinomios siguientes:

(A) $P(x) = x^2 - 4$ (B) $P(x) = 3x^2 - 2$ (C) $P(x) = x^3 - 4x$ (D) $P(x) = x^4 - x^2$
(E) $P(x) = x^4 - 9$ (F) $P(x) = 9x^2 - 4$ (G) $P(x) = x^3 - x$ (H) $P(x) = x^3 - 3x$
(I) $P(x) = 10x^5 - 160x$ (J) $P(x) = 2x^4 - x^2$ (K) $P(x) = 4x^2 - 1$ (L) $P(x) = -2x^4 + 8x^2$

Problemas del capítulo 2

1 Efectúa las siguientes operaciones con los polinomios $P(x) = 3x^4 - x^3 + x^2$ y $Q(x) = -x^2 + 2$:

(A) $P(x) + Q(x)$ (B) $P(x) - Q(x)$ (C) $P(x) \cdot Q(x)$ (D) $P(x) : Q(x)$

(E) $(P(x))^2$ (F) $(Q(x))^2$ (G) $(Q(x))^3$ (H) $(Q(x))^4$

2 Calcula las siguientes potencias:

(A) $(x + 7y)^2$ (B) $(x^2 + 4y)^2$ (C) $(x^2 + 2y)^3$ (D) $(x - y)^4$

(E) $(x + \sqrt{3})^5$ (F) $(2x - 1)^5$ (G) $\left(\sqrt{2}x^4 - \sqrt{8}x^3\right)^2$ (H) $\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right)^6$

3 Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

(A) $(2x + 3)^2 - (3x - 4)^2 + (5 + 2x)(5 - 2x)$ (B) $(3x + 4)^2 + (2x + 5)^2 - (5x + 1)(5x - 1)$

(C) $(3x + 2)^2 + (2x - 5)^2 - 12(x - 1)(x + 1)$ (D) $(a + b)^2 + (a + 2b)^2 + (2a + b)^2$

(E) $(x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$ (F) $(2a - b)^2(2a + b)^2$

(G) $(x + 2)^4 - (x - 2)^4$ (H) $(2x - 1)(2x + 1)(3x - 2)$

(I) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ (J) $(2x - 1)(2x + 1)(3x - 2)(3x + 2)$

4 Obtén el término de grado 4 de los siguientes polinomios:

(A) $(3x - 2)^4$ (B) $(3x - 2)^5$ (C) $(3x - 2)^6$ (D) $(3x^2 - 2)^6$ (E) $(3x^2 + 4x)^3$

5 Obtén el cociente y el residuo de las siguientes divisiones de polinomios:

(A) $P(x) = 5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 5$, $Q(x) = x^2 + x - l$.

(B) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 5$, $Q(x) = 3x - 1$.

(C) $P(x) = x^4 - x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$.

(D) $P(x) = 2x^5 - x^3$, $Q(x) = x^2 + 1$.

(E) $P(x) = x^7 + 1$, $Q(x) = x^3 - 1$.

6 Obtén el valor de m para que el resto de la división de $P(x) = (x^3 - 7x^2 + 3x + m)$ entre $Q(x) = x^2 - x + 2$ sea $r(x) = -5x + 2$.

7 Obtén m para que el resto de la división de $P(x) = (x^5 + x^4 + 2x^3 + mx^2 - 5)$ entre $Q(x) = x^3 - x + 2$ sea un polinomio de primer grado.

8 Obtén m y n para que el resto de la división de $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx + n$ entre $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ sea $2x + 1$.

9 Aplicando la Regla de Ruffini obtén el cociente y el resto de las divisiones:

(A) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $Q(x) = x + 1$.

(B) $P(x) = 4x^3 - 68x^2 - 5$, $Q(x) = x$.

(C) $P(x) = x^{10} - x^7 + x^2 + x$, $Q(x) = x - l$.

(D) $P(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^4$, $Q(x) = x + a$.

(E) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 3x - 4$, $Q(x) = 2x - 1$.

(F) $P(x) = 9x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 15x + 3$, $Q(x) = 3x + 2$.

10 Obtén el valor de m para que el resto de la división de $x^5 - x^4 + x + 3m$ entre $x - 2$ sea 9.

11 Obtén el valor de m para que la división de $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + mx + 6$ entre $x + 3$ sea exacta.

12 Por el teorema del resto, obtén el resto de la división de $P(x) = x^4 – 7x^3 + 10x^2 + 9x + 3$ entre el binomio $x – 4$.

13 Obtén los valores de m y n para que el polinomio $P(x) = x^3 – 5x^2 + mx + n$ sea divisible, al mismo tiempo, por $x + 1$ y por $x – 1$.

14 Obtén el valor de m para que el polinomio $x^4 + mx^3 – 2x^2 + 3x + 6$ sea divisible por $x + 2$.

15 Obtén las raíces y la factorización de los siguientes polinomios de grado 2:

(A) $x^2 – 3x + 2$	(B) $x^2 + 3x + 2$	(C) $x^2 – 5x + 4$	(D) $x^2 + 4x + 4$
(E) $2x^2 + x – 3$	(F) $2x^2 + x – 1$	(G) $6x^2 – 5x + 1$	(H) $x^2 – 2x + 1$
(I) $x^2 + 3x$	(J) $2x^2 + 4x$	(K) $3x^2 – 4x$	(L) $x^2 + x$

16 Obtén las raíces y la factorización de los siguientes polinomios de grado 3:

(A) $x^3 – 4x$	(B) $x^3 + 4x$	(C) $x^3 – 4x^2$	(D) $x^3 + 4x^2$
(E) $2x^3 – 3x^2$	(F) $x^3 – 3x$	(G) $x^3 – 3x^2 + 2x$	(H) $x^3 + 5x^2 + 4x$
(I) $x^3 + 1$	(J) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$	(K) $x^3 – 3x^2 + 3x – 2$	(L) $x^3 – 1$
(M) $x^3 – 3x + 2$	(N) $x^3 – 3x – 2$	(Ñ) $x^3 – 7x + 6$	(O) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

17 Obtén las raíces y la factorización de los siguientes polinomios de grado 4 o más:

(A) $x^4 – x^3$	(B) $x^4 – x^2$	(C) $x^4 – x$	(D) $x^4 – 8x$
(E) $x^4 – 1$	(F) $x^4 – 4$	(G) $x^4 – 4x^2$	(H) $x^4 + 8x^2$
(I) $x^4 + 2x^2 + 1$	(J) $x^4 – 2x^2 + 1$	(K) $x^4 – 5x^2 + 4$	(L) $x^4 – 3x^2 + 2$
(M) $x^4 – 8x^2 – 9$	(N) $x^4 + x^2 – 2$	(Ñ) $x^4 – x^2 – 2$	(O) $x^4 + 3x^2 + 2$

18 Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

(A) $P(x) = 3x^2 – 5x^3 + 2x^4$	(B) $P(x) = 3x^3 – 28x^2 + 63x – 18$
(C) $P(x) = 75x^4 – 30x^3 + 3x^2$	(D) $P(x) = x^2 + 2x – 3$
(E) $P(x) = 6x^4 + 7x^3 – 36x^2 – 7x + 6$	(F) $P(x) = x^4 + x^2 – 2$
(G) $P(x) = 2x^5 – 15x^4 + 14x^3 + 75x^2 – 88x – 60$	(H) $P(x) = 4x^5 – 5x^3 + x$
(I) $P(x) = x^4 + x^3 – 3x^2 – 4x – 4$	(J) $P(x) = x^3 – 7x + 6$
(K) $P(x) = x^3 – 6x^2 + 5x + 12$	(L) $P(x) = 3x^3 + 10x^2 – 23x + 10$
(M) $P(x) = x^3 + x^2 – 8x – 12$	(N) $P(x) = 4x^3 – 37x^2 + 70x + 75$
(Ñ) $P(x) = x^4 – 2x^3 + 2x – l$	(O) $P(x) = x^3 + 3x^2 + l0x + 8$
(P) $P(x) = 2x^2 – llx – 40$	(Q) $P(x) = x^4 – 2x^3 – 8x^2$

19 Factoriza, utilizando la diferencia de cuadrados, los siguientes polinomios:

(A) $x^2 – 25$	(B) $x^2 – 5$	(C) $4x^2 – 1$	(D) $3x^2 – 5$
(E) $x^2 – m^2$	(F) $2x^2 – 1$	(G) $x^4 – 1$	(H) $x^4 – 9$
(I) $2x^3 – 4x$	(J) $2x^3 – 4x^2$	(K) $4a^2 – 9b^2$	(L) $x^4 – 4x^2$
(M) $x^5 – 4x$	(N) $x^5 – 4x^3$		

Soluciones de las actividades del capítulo 2

1. $5x + 10y + 15z$. **2.** $C_1 = 1.1x$; $C_2 = 1.1^2x$; $C_3 = 1.1^3x$. **3.** $C_n = 1.1^nx$; $n = 7.27$ años. **4.** (A) $\sqrt{404}$; $\sqrt{1604}$. (B) $\sqrt{x^2+4}$. **5.** $V = 4x + 6y + 12z$. **6.** Respectivamente, -3 y 4; 4 y -1; 0 y 1. **7.** $a = -4$, $b = -3$, $c = 0$.
8. (A) $9x^2$. (B) $15x^3$. (C) $10x^6$. (D) 0. (E) $2x^5 - 4x^3$. (F) $2x^2 + 5x$. (G) $-9x^7 + 6x^6 + 18x^5$. (H) 0. **9.** (A) $3x^2 + 1$. (B) $x^2 + 2x - 3$. (C) $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$. **10.** $P(x)Q(x)R(x) = x^6 - x^4 - 5x^2 + 2$; $P(x)(Q(x)+R(x)) = 2x^4 + 2x^2 - 4$.
11. (A) $9x^4 + 12x^2 + 4$. (B) $9x^4 - 12x^2 + 4$. (C) $9x^4 - 4$. (D) $25x^2 - 16$. (E) $2x^5 + 6x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x - 2$. (F) $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 9x - 12$. **12.** (A) $4x^2 + 12x + 9$. (B) $4x^2 - 12x + 9$. (C) $x^4 + 2x^2 + 1$. (D) $x^4 - 2x^2 + 1$. (E) 0. (F) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. (G) $x^3 + 3x^2 + 3x+1$. (H) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
(I) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$. (J) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1$. **13.** (A) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$. (B) $16x^4 - 32x^3+24x^2 - 8x+1$. (C) $x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16$. (D) $10x^4 + 20x^2 + 2$. (E) $x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2 + 1458x + 729$. (F) $32x^5 - 320x^4 + 1280x^3 - 2560x^2 + 2560x - 1024$. (G) $x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 108x^6 + 81x^4$.
(H) $16x^{12} + 16x^{11} + 6x^{10} + x^9 + (1/16)x^8$. **14.** (A) $4860x^4$. (B) $448x^3$. (C) $-160x^2$. (D) $-8064x^{10}$.
15. (A) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2$. (B) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$. (C) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$. (D) $(x^2 - 1)\cdot 1 + 2$.
(E) $(x^2 + 3x +2)(x^2 -1)$. (F) $(x-1)(x - 4) + 2$. (G) $(4x^2 + 2)(x^2/2 + 1)+(x+1)$. (H) $(0.5x^2 + x - 2)(x^2 + x + 1) + (x + 1)$.
16. (A) $C(x) = x^2 + x - 2$, $R = 0$. (B) $C(x) = x^2 - x - 2$, $R = 4$. (C) $C(x) = x^2 + 2x + 1$, $R = 4$. (D) $C(x) = x^2 - 2x + 1$, $R = 0$. (E) $C(x) = x^2 - 3$, $R = 2$. **17.** $-63/8$. **18.** 0 y -4. **19.** 5. **20.** $m = n = -1$. **21.** (A) $-3, -2$. (B) $0, -1, 1, 2$. (C) $0, -1$. **22.** (A) $1, 2, 3$. (B) 1. (C) -1. (D) $-2, -1, 1, 2$. (E) $-1/2, 1/2, 1$. (F) $-1/2, 1/2, 1/3$.
23. $4(x + 3)(x - 2)(x - 1/2)(x + 1/2)$. **24.** $-3x^3 + 24x^2 - 12x - 144$; $x^3 - 8x^2 + 4x + 48$. **25.** $x^3 - x$.
26. (A) $(x - 3)(x + 3)$. (B) $9(x + 2/3)(x - 2/3)$. (C) $3x(x + 1/3)$. (D) $2(x + 5)(x - 1)$. (E) $6(x - 2/3)(x + 1/2)$. (F) $3x(x + 2/3)$. (G) $3x(x + 3)(x - 1)$. (H) $4(x - 2)(x + 1/2)(x - 1/2)$. (I) $18(x - 1/3)(x + 1/2)(x + 1/3)$.
(J) $(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)$. (K) $(x + 2)(x - 1)$. (L) $2x(x - 1)(x + 1/2)$. (M) $(x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 1)$. (N) $(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$. (Ñ) $-2x(x - 3/2)$. **27.** $(x - 1)^3(x + 2)^2$. **28.** $x^4(x - 3)$; $(x^2-1)(ax^2 +bx+c)$.
29. (A) $(x-1)(x+4)$. (B) $6(x-1/2)(x+1/3)$. (C) $6(x - 1)^2(x + 1/3)(x - 1/2)$. (D) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$.
(E) $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)$. (F) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (G) $x(x-1)(x-2)(x-3)$.
(H) $(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (I) $x^2(x + 1)(x - 1)^2$. (J) $2x^2(x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)$. (K) $(x + 2)(x - 1)^2$.
(L) $-8(x - 1)(x - 1/2)(x^2 + x + 1)(x^2 + x/2 + 1/4)$. (M) $(x - 3)(x - 2)(x + 1)$. (N) $(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
(Ñ) $(x + 2)(x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (O) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$. (P) $(x + 4)(x - 1)(x + 1)^2$.
30. (A) $(x + 2)(x - 2)$. (B) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2})$. (C) $x(x - 2)(x + 2)$. (D) $x^2(x + 1)(x - 1)$.
(E) $(x^2 + 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (F) $(3x + 2)(3x - 2)$. (G) $x(x + 1)(x - 1)$. (H) $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
(I) $10x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$. (J) $x^2(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$. (K) $(2x - 1)(2x + 1)$. (L) $-2x^2(x + 2)(x - 2)$.

Soluciones de los problemas del capítulo 2

1. (A) $3x^4 - x^3 + 2$. (B) $3x^4 - x^3 + 2x^2 - 2$. (C) $-3x^6 + x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2$. (D) Cociente: $-3x^2 + x - 7$, Resto: $-2x + 14$. (E) $9x^8 - 6x^7 + 7x^6 - 2x^5 + x^4$. (F) $x^4 - 4x^2 + 4$. (G) $-x^6 + 6x^4 - 12x^2 + 8$. (H) $x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16$. **2.** (A) $x^2 + 14xy + 49y^2$. (B) $x^4 + 8x^2y + 16y^2$. (C) $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$. (D) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$. (E) $x^5 + 5\sqrt{3}x^4 + 30x^3 + 30\sqrt{3}x^2 + 45x + 9\sqrt{3}$. (F) $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$. (G) $2x^8 - 8x^7 + 8x^6$. (H) $(1/64)x^{24} - (3/8)x^{23} + (15/4)x^{22} - 20x^{21} + 60x^{20} - 66x^{19} + 64x^{18}$. **3.** (A) $-9x^2 + 36x + 18$. (B) $-12x^2 + 44x + 42$. (C) $x^2 - 8x + 41$. (D) $6a^2 + 6b^2 + 10ab$. (E) $x^4 - 18x^2 + 81$. (F) $16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$. (G) $16x^3 + 64x$. (H) $12x^3 - 8x^2 - 3x + 2$. (I) $x^3 - 7x + 6$. (J) $36x^4 - 25x^2 + 4$. **4.** (A) $81x^4$. (B) $-810x^4$. (C) $4860x^4$. (D) $2160x^4$. (E) $144x^4$. **5.** (A) $C(x) = 5x^2 - 11x + 14$, $R(x) = -24x + 9$. (B) $C(x) = x^2 + 2x + 1$, $R(x) = -4$. (C) $C(x) = x^2 - 2x + 4$, $R(x) = -10x + 5$. (D) $C(x) = 2x^3 - 3x$, $R(x) = 3x$. (E) $C(x) = x^4 + x$, $R(x) = x + 1$. **6.** -10. **7.** 1. **8.** $m = 15$, $n = -3$. **9.** (A) $C(x) = x^2 + 1$, $R = 0$. (B) $C(x) = 4x^2 - 68x$, $R = -5$. (C) $C(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x + 2$, $R = 2$. (D) $C(x) = x^2 - 2ax + a^2$, $R = 0$. (E) $C(x) = 3x^2 - 2x + 1/2$, $R = -7/2$. (F) $C(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 3$, $R = -3$. **10.** 3. **11.** -10. **12.** 7. **13.** $m = -1$, $n = 5$. **14.** 1. **15.** (A) 1 y 2; $(x - 1)(x - 2)$. (B) -1 y -2; $(x + 1)(x + 2)$. (C) 1 y 4; $(x - 1)(x - 4)$. (D) -2 doble; $(x + 2)^2$. (E) 1 y $-3/2$; $(x - 1)(2x + 3)$. (F) -1 y $1/2$; $(x + 1)(2x - 1)$. (G) $1/2$ y $1/3$; $(2x - 1)(3x - 1)$. (H) 1 doble; $(x - 1)^2$. (I) 0 y -3; $x(x + 3)$. (J) 0 y -2; $2x(x + 2)$. (K) 0 y $4/3$; $x(3x - 4)$. (L) 0 y -1; $x(x + 1)$. **16.** (A) 0, 2 y -2; $x(x - 2)(x + 2)$. (B) 0; $x(x^2 + 4)$. (C) 0 doble y 4; $x^2(x - 4)$. (D) 0 doble y -4; $x^2(x + 4)$. (E) 0 doble y $3/2$; $x^2(2x - 3)$. (F) 0, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$; $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. (G) 0, 1 y 2; $x(x - 1)(x - 2)$. (H) 0, -1 y -4; $x(x + 1)(x + 4)$. (I) -1; $(x + 1)(x^2 - x + 1)$. (J) -2; $(x + 2)(x^2 + x + 1)$. (K) 2; $(x - 2)(x^2 - x + 1)$. (L) 1; $(x - 1)(x^2 + x + 1)$. (M) 1 doble y -2; $(x - 1)^2(x + 2)$. (N) -1 doble y 2; $(x + 1)^2(x - 2)$. (Ñ) 1, 2 y -3; $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. (O) -1, -2 y -3; $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. **17.** (A) 0 triple y 1; $x^3(x - 1)$. (B) 0 doble, 1 y -1; $x^2(x - 1)(x + 1)$. (C) 0 y 1; $x(x - 1)(x^2 + x + 1)$. (D) 0 y 2; $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. (E) 1 y -1; $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. (F) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. (G) 0 doble, 2 y -2; $x^2(x - 2)(x + 2)$. (H) 0 doble; $x^2(x^2 + 8)$. (I) No tiene raíces; $(x^2 + 1)^2$. (J) 1 y -1 dobles; $(x - 1)^2(x + 1)^2$. (K) 1, 2, -1 y -2; $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$. (L) 1, -1, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (M) 3 y -3; $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$. (N) 1 y -1; $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$. (Ñ) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$. (O) No tiene raíces; $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$. **18.** (A) $2x^2(x - 1)(x - 3/2)$. (B) $3(x - 3)(x - 1/3)(x - 6)$. (C) $75x^2(x - 1/5)^2$. (D) $(x + 3)(x - 1)$. (E) $6(x + 3)(x - 2) \cdot (x + 1/2)(x - 1/3)$. (F) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$. (G) $2(x - 5)(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x + 1/2)$. (H) $4x(x - 1)(x - 1/2)(x + 1) \cdot (x + 1/2)$. (I) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 1)$. (J) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. (K) $(x - 4)(x - 3)(x + 1)$. (L) $3(x + 5)(x - 1)(x - 2/3)$. (M) $(x - 3)(x + 2)^2$. (N) $4(x - 5)^2(x + 3/4)$. (Ñ) $(x + 1)(x - 1)^3$. (O) $(x + 1)(x^2 + 2x + 8)$. (P) $2(x - 8)(x + 5/2)$. (Q) $x^2(x - 4)(x + 2)$. **19.** (A) $(x - 5)(x + 5)$. (B) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. (C) $(2x - 1)(2x + 1)$. (D) $(\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5})$. (E) $(x - m)(x + m)$. (F) $(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$. (G) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. (H) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$. (I) $2x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. (J) $2x^2(x - 2)$. (K) $(2a - 3b)(2a + 3b)$. (L) $x^2(x - 2)(x + 2)$. (M) $x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. (N) $x^3(x - 2)(x + 2)$.

1 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Funciones

educàlia editorial

BACHILLERATO

1

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Funciones

educàlia
editorial

Primera edición, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprime: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-05-3
Depósito legal: V-3241-2018
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 5

Funciones exponenciales y logarítmicas
Aplicaciones financieras

5.1 Interés simple

Ejemplo 1

Alberto desea comprar una motocicleta de 1 000 €. Carece de liquidez pero su amigo Jordi accede a prestarle el dinero a condición de obtener un beneficio del 5 %. ¿Cuánto dinero entregará finalmente Alberto a Jordi?

El capital prestado al inicio (capital inicial) C_0 es 1000 €.
El beneficio o interés B que obtendrá Jordi es:

$$B = 5\ \%\ \text{de}\ 1000 = \frac{1000 \cdot 5}{100} = 50\ €.$$

El capital final C_F que Alberto deberá devolver es $\mathbf{C_F = C_0 + B} = 1000 + 50 = 1050$ €.

El beneficio se calcula (ejemplo anterior) como porcentaje del capital inicial prestado.

Pero no es indiferente que Alberto cancele su deuda en un año o en un mes, Jordi recibiría la misma cantidad de dinero pero preferirá obtenerlo en menos tiempo. Aparece así el período de tiempo necesario para aplicar dicho porcentaje al capital.

- El **porcentaje aplicado al capital** para obtener el beneficio se llama ***rédito o tipo de interés* R,** al que añadimos un adjetivo que indica el **tiempo de generación del beneficio**; éste es **anual**, **mensual R_m**, **semestral R_s**, **diario R_d**...
- La característica del ***interés simple*** es que **el beneficio se genera, y corresponde ser entregado, al finalizar cada período de tiempo que indica el tipo de interés**. En caso de no concluir todo el período, corresponde abonar la parte proporcional al tiempo transcurrido.

Ejemplo 2

Disponemos de 5000 euros que depositamos en un banco que ofrece un tipo de interés simple del 5.25 % anual. Calculamos el beneficio y el capital final que obtendremos si el depósito se mantiene durante 3 años y 6 meses.

Como el tipo de interés R = 5.25 % es anual, el beneficio que nos corresponde al cabo del año es:

$$B_1 = 5.25\ \%\ \text{de}\ 5000 = \frac{5000 \cdot 5.25}{100} = 262.5\ €$$

Como el capital continua depositado en el banco (estará 3 años y medio), al finalizar el segundo año nos corresponderá de nuevo un beneficio de

$$B_2 = B_1 = 5.25\ \%\ \text{de}\ 5000 = \ = 262.5\ €$$

Al finalizar el tercer año el banco nos dará de nuevo un beneficio $B_3 = 262.5$ €.

Si el depósito se mantiene 6 meses más, se producirá una nueva entrega de beneficios B* correspondiente a esos 6 meses, la proporción 6 a 12 del beneficio anual:

$$B^* = \frac{6}{12} B_1 = 0.5 \cdot B_1 = 131.15\ €$$

El beneficio total B y el capital final obtenido, transcurridos los 3.5 años, serán:

$$B = \frac{5000 \cdot 5.25 \cdot 3.5}{100} = \mathbf{918.75\ €} \quad \text{y} \quad C_F = C_0 + B = 5000 + 918.75 = \mathbf{5918.75\ €}$$

Observando la última expresión del cálculo del beneficio total del ejemplo 2 obtenemos la expresión que proporciona el beneficio para el caso del interés simple.

El beneficio total generado por un capital inicial $\mathbf{C_0}$, al tipo de interés simple anual **R**, invertido durante un tiempo **t**, medido en años, viene dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C_0 \cdot R \cdot t}}{\mathbf{100}} = \mathbf{C_0 \cdot r \cdot t}$$

En la segunda expresión **r = R/100** es el tipo de interés anual expresado en tanto por uno.

Las mismas expresiones son válidas para tipos de interés semestrales, trimestrales, mensuales..., teniendo en cuenta que el tiempo t, o sus partes, vendrán medidos en semestres, trimestres...; al mismo tiempo el beneficio se generará cada semestre, trimestre..., vencido, o sus partes proporcionalmente.

Ejemplo 3

Queremos depositar 6000 € en el banco durante 3 años. El banco A ofrece un interés anual R = 6 % y el banco B un interés mensual R_m = 0.5 %. ¿En qué banco interesará depositar nuestro dinero?

Beneficio en el banco A

$\mathbf{B} = C_0 \cdot r \cdot t = 6000 \cdot 0.06 \cdot 3 = \mathbf{1080}$ **€**

$r = R/100 = 6/100 = 0.06$ y $t = 3$ años

Beneficio en el banco B

$\mathbf{B} = C_0 \cdot r_m \cdot 36 = 6000 \cdot 0.005 \cdot 36 = \mathbf{1080}$ **€**.

$r_m = R_m/100 = 0.5/100 = 0.005$ y $t = 36$ meses

Como el beneficio final es idéntico, daría igual la elección; pero es preferible recibir antes el beneficio.

Además, el banco A puede ofrecer un tipo de interés anual con vencimiento mensual (o cualquier otro plazo); significa que cada mes entrega la parte proporcional (1/12) del beneficio anual:

$$B^* = \frac{1}{12} \cdot 6000 \cdot 0.06 \cdot 1 = 30 \text{ €}$$

El beneficio al cabo de los 3 años (36 meses) es el mismo: $B = 36B^* = 36 \cdot 30 = \mathbf{1080}$ **€**.

El beneficio, generado durante un año, correspondiente a un tipo de interés anual **R** (o **r** en tanto por uno) con vencimiento mensual es equivalente al beneficio generado durante 12 meses correspondiente a un tipo de interés mensual $\mathbf{R_m = R/12}$ (o $\mathbf{r_m = r/12}$ en tanto por uno).

1 El banco A ofrece depósitos al tipo de interés simple del 4.75 %. Juan realiza un depósito de 4000 € por un período de 5 años y 3 meses. ¿Qué beneficio total y qué capital final obtendrá? ¿Cuándo recibe los intereses?

2 ¿Qué capital necesitas para que al 4 % de interés simple anual se genere un capital final de 6000 € en 3 años?

3 En un banco colocamos 5000 € que producen 150 € al año de beneficio. ¿A qué rédito se colocaron?

4 ¿Cuántos meses se colocaron 24000 €, al 2 % de interés simple anual, si produjeron 4000 € de intereses?

5 Depositamos 4500 € al tipo de interés simple del 4 % trimestral. ¿Qué capital final obtendremos dentro de 3 años y un mes?

6 ¿Qué beneficio se obtiene al invertir durante un año 1 000 € al 10 % anual con vencimiento mensual de intereses? ¿Y al 0.6 % mensual con vencimiento diario?

5.2 Interés compuesto

Cuando el interés o beneficio periódico generado por un capital NO se abona al vencimiento de cada período sino que se acumula al capital inicial (***capitalización***), para producir a su vez beneficio en los siguientes períodos durante la vigencia del contrato, aparece el llamado ***interés compuesto***.

Veamos cómo se produce la capitalización en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

¿En cuánto se convertirá un capital de 1000 €, en 3 años, al tipo de interés compuesto anual del 7 %?

1. Como en el interés simple, al cabo del primer año (en general, primer período) el beneficio generado y el capital final serán:

$$B_1 = C_0 \cdot r \cdot t = 1000 \cdot 0.07 \cdot 1 = 70 \text{ €} \quad \text{y} \quad C_{F1} = C_0 + B_1 = 1070 \text{ €}$$

2. Al comenzar el 2.º año, el nuevo capital inicial es C_{F1}; al terminar el 2.ª año el beneficio de dicho período y el nuevo capital final serán:

$$B_2 = C_{F1} \cdot r \cdot 1 = 1070 \cdot 0.07 \cdot 1 = 74.9 \text{ €} \quad \text{y} \quad C_{F2} = C_{F1} + B_2 = 1070 + 74.9 = 1144.9 \text{ €}$$

3. Al comenzar el 3.er año, el nuevo capital inicial es C_{F2}; al terminar el 3.er año el beneficio de dicho período y el capital final serán:

$$B_3 = C_{F2} \cdot r \cdot 1 = 1144.9 \cdot 0.07 = 80.143 \text{ €} \quad \text{y} \quad C_{F3} = C_{F2} + B_3 = 1225.043 \text{ €}$$

4. El beneficio total es $B = C_{F3} - C_0 = B_1 + B_2 + B_3 = 225.043$ €.

Un capital inicial C_0, al tipo de interés compuesto anual r, en tanto por uno, invertido durante un tiempo t, medido en años, produce un capital final y un beneficio dados por las expresiones:

$$\mathbf{C_F = C_0\,(1 + r)^t \quad \text{y} \quad B = C_F - C_0}$$

Siguiendo los pasos del ejemplo anterior obtenemos que al cabo del primer año, el capital final acumulado es:

$$C_{F1} = C_0 + B_1 = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0\,(1 + r)$$

Al cabo del segundo año, el capital final acumulado es:

$$C_{F2} = C_{F1} + B_2 = C_{F1} + C_{F1} \cdot r = C_{F1}\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)(1 + r) = C_0\,(1 + r)^2$$

Al finalizar el tercer año, el capital acumulado es:

$$C_{F3} = C_{F2} + B_3 = C_{F2} + C_{F2} \cdot r = C_{F2}\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)(1 + r)\,(1 + r) = C_0\,(1 + r)^3$$

En general al transcurrir t años el capital acumulado es:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t$$

Comprobamos la validez de la expresión con los datos del ejemplo anterior:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t \Rightarrow C_F = 1000\,(1 + 0.07)^3 = 1000 \cdot 1.07^3 = 1000 \cdot 1.225043 = 1225.043 \text{ €}$$

Vencimiento de intereses en otros períodos

Cuando el tipo de interés compuesto es mensual, semestral..., (las capitalizaciones se producen en esos intervalos de tiempo) se obtienen expresiones correspondientes análogas, teniendo en cuenta que el tiempo se medirá en meses, semestres...; por ejemplo, en el caso mensual sería:

$$C_F = C_0\,(1 + r_m)^m \quad \text{(m es el tiempo de la inversión en meses)} \qquad (1)$$

Al igual que el interés simple, el interés compuesto anual puede tener vencimientos diferentes (por ejemplo mensual). La proporcionalidad allí indicada para calcular el beneficio se mantiene y produce la proporcionalidad de los tipos de interés compuestos para diferentes períodos; así por ejemplo

$$r_m = \frac{r}{12} \qquad (2)$$

y la expresión del capital final que se obtiene a partir de un capital inicial C_0, al tipo de interés compuesto anual, con vencimiento mensual, invertido t años es

$$\boxed{\mathbf{C_F = C_0 \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}}}$$

Esta expresión es idéntica a la (1) puesto que se verifica (2) y 12t son los meses que hay en t años, tiempo que el capital está invertido.

Ejemplo 5

Un banco ofrece unos depósitos especiales al 3.5 % de interés. Invertimos 4 000 € durante 5 años y 3 meses y calculamos el capital final que obtendremos si el tipo de interés es compuesto anual con:

(A) Vencimiento anual. (B) Vencimiento mensual. (C) Vencimiento diario.

(A) En este caso utilizamos la expresión $C_F = C_0\,(1+r)^t$, con r = 0.035, t = 5.25 años:

$$C_F = 4000\,(1+0.035)^{5.25} = 4000\,(1.035)^{5.25} = 4000 \cdot 1.197944882 = 4791.78\ €$$

(B) La expresión será $C_F = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$, con r = 0.035, t = 5.25 años (12t = 63 meses):

$$C_F = 4000\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12\cdot 5.25} = 4000\,(1.0029167)^{63} = 4000 \cdot 1.201394 = 4805.58\ €$$

(C) La expresión será $C_F = C_0\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365t}$, con r = 0.035, t = 5.25 años (365t = 1916.25 días):

$$C_F = 4000\left(1+\frac{0.035}{365}\right)^{365\cdot 5.25} = 4000\,(1.00009589)^{1916.25} = 4000 \cdot 1.201704768 = 4806.82\ €$$

7 Calcula el valor final de una inversión de 1 euro, al tipo de interés compuesto anual del 2 % y capitalizado diariamente.

8 Suponemos que las viviendas incrementan su valor a una tasa anual de 8 %. ¿Cuánto valdrá hoy una de ellas si dentro de 10 años tendrá un valor de 250 000 €? (Su precio hoy es el **valor actual** de la vivienda.)

9 Los pagarés de empresa se emiten al descuento. Significa que si su valor nominal es de 1 000 euros, se paga una cantidad menor por él, teniendo en cuenta que, transcurrido el plazo indicado, su valor final será el nominal. Compramos un pagaré, de valor nominal 100 000 euros, por 95 500 €. Si su vencimiento es dentro de un año, ¿qué tipo de interés compuesto anual aplica? (Este tipo de interés se llama **tipo de descuento**.)

5.3 La función exponencial de base a

La diferencia entre crecimiento lineal y exponencial se observa claramente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6

- Un capital inicial C_0 de **un euro** colocado a un **interés simple anual** del 5 % crece linealmente, respecto del tiempo t que permanece invertido, produciendo un capital final:

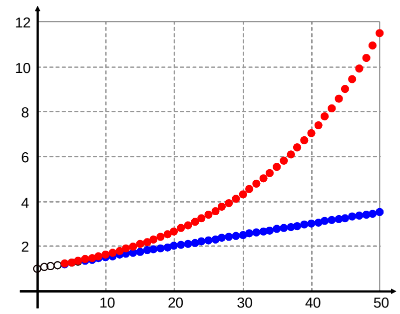
$$C(t) = C_0 + B = C_0 + C_0 \cdot r \cdot t = 1 + 1 \cdot 0.05 \cdot t = \mathbf{1 + 0.05\,t}$$

- Si el mismo capital inicial es invertido al tipo de interés compuesto anual del 5 %, el capital final obtenido es:

$$C(t) = C_0\,(1+r)^t = 1 \cdot (1+0.05)^t = \mathbf{1.05^t}$$

Observa que, en el segundo caso, el crecimiento es mucho mayor, es lo que llamamos crecimiento exponencial.

n	0	1	2	3	5	10	4	50
C(t)	1	1.05	1.10	1.15	1.25	1.50	1.20	3.5
C(t)	1	1.05	1.102	1.158	1.28	1.63	1.22	11.56



Dado **a > 0, a ≠ 1**, la ***función exponencial de base a*** se define como:

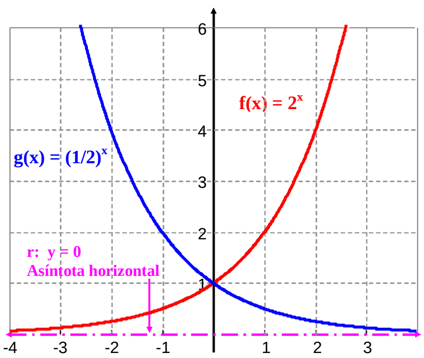
$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{f(x) = a^x}$$

Ejemplo 7

Obtenemos una tabla de valores y las gráficas de las funciones exponenciales:

$f(x) = 2^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $g(x) = (1/2)^x = 2^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

x	f(x)
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



x	g(x)
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

Observa que para valores de x negativos, muy grandes, los valores de la función $f(x) = 2^x$ tienden a 0, mientras que lo mismo ocurre con valores x positivos muy grandes en la función $g(x) = (1/2)^x$. Por ejemplo:

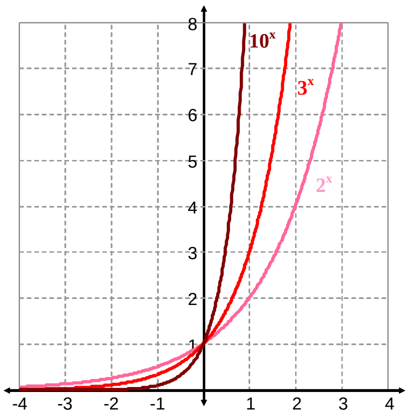
$$f(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} \simeq 0.00097 \qquad g(10) = (1/2)^{10} \simeq 0.00097$$

La recta **r: y = 0** es **asíntota horizontal** de las gráficas de ambas funciones, aunque solo en una dirección.

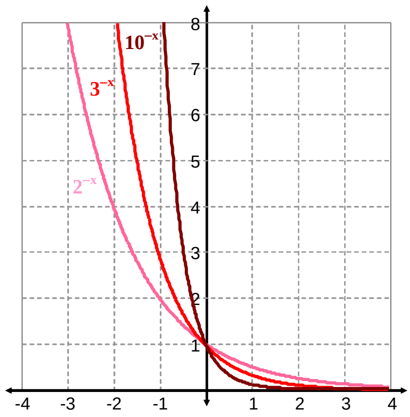
➢ Propiedades de las funciones exponenciales

Ejemplo 8

Con ayuda de la calculadora obtenemos las gráficas de las siguientes funciones exponenciales:



$f(x) = a^x$, con $a > 1$



$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$

La función exponencial $f(x) = a^x$ verifica las siguientes propiedades:

- $\mathbf{f(0) = a^0 = 1}$ y $\mathbf{f(1) = a^1 = a}$ $\Rightarrow$ la gráfica pasa por los puntos **(0, 1)** y **(1, a)**
- El dominio es $\mathbf{D_f = \mathbb{R}}$, y puesto que $f(x) = \mathbf{a^x > 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, el rango es $\mathbf{R_f =]0, +\infty[}$.
- La función exponencial $f(x) = a^x$ **es inyectiva**, lo que significa que la ecuación:

  $$\mathbf{a^x = b} \text{ tiene solución única, para } \forall\, b > 0$$

- Si $\mathbf{a > 1}$, $f(x) = a^x$ es una **función creciente**.
- Si $\mathbf{0 < a < 1}$, $f(x) = a^x$ es una **función decreciente**.
- La recta **r: y = 0 es asíntota horizontal** de todas las funciones exponenciales.

Además deducimos:

- **Si a > 1**, los valores de $\mathbf{f(x) = a^x}$ tienden a $+\infty$ cuando los valores de x tienden a $+\infty$.
- **Si a > 1**, los valores de $\mathbf{f(x) = a^x}$ tienden a 0 cuando los valores de x tienden a $-\infty$.
- **Si a < 1**, los valores de $\mathbf{f(x) = a^x}$ tienden a 0 cuando los valores de x tienden a $+\infty$.
- **Si a < 1**, los valores de $\mathbf{f(x) = a^x}$ tienden a $+\infty$ cuando los valores de x tienden a $-\infty$.

10 Representa gráficamente las funciones $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 3^{-x}$.

11 Considera los valores de x = 10, x = 100 y x = 1000. Comprueba, para la función $f(x) = 1.1^x$, que las imágenes tienden a $+\infty$. De igual modo, para x = –10, x = –100 y x = –1000, comprueba que las imágenes tienden a 0. Haz lo mismo con la función $g(x) = 0.9^x$.

5.4 El número e y la función exponencial de base e

Ejemplo 9

Supongamos de nuevo un capital inicial C_0 de un euro que se invierte al tipo de interés compuesto anual del 100 %. Si la capitalización se realiza al año, obtendremos un capital final:

$$C_F = C_0\,(1 + r)^t = 1 \cdot (1 + 1)^1 = 2\ €$$

Si la capitalización se realiza cada mes del año, se obtendría:

$$C_F = C_0 \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035\ €$$

Si la capitalización fuera diaria:

$$C_F = C_0 \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567\ €$$

Si la capitalización fuera en cada segundo del año:

$$C_F = C_0 \left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = \left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = 2.718281778\ €$$

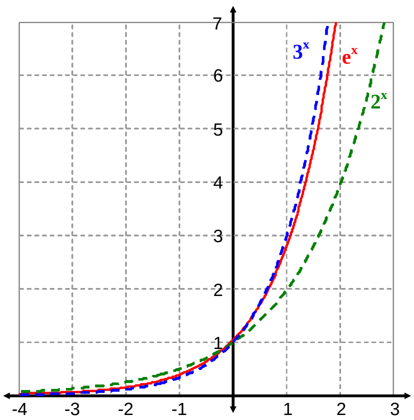
El valor de $\mathbf{C_F}$ corresponde al valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donde n indica el número de capitalizaciones realizadas durante el año y crece conforme n aumenta durante el año. En caso de acumulación instantánea de los intereses (pasamos del interés compuesto al llamado ***interés continuo***) el capital final alcanzado será un número irracional llamado **número e**; matemáticamente se denomina como el límite de los términos $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando n crece hacia $+\infty$.

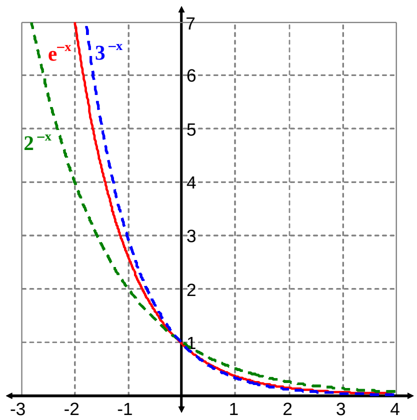
- El ***número*** **e** es un irracional (de valor aproximado **2.718 281 828 459 05)** al que tiende la sucesión de números $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando n crece hacia $+\infty$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e}$.
- La función exponencial por excelencia es aquella que tiene por base el número irracional e:

$$\mathbf{f(x) = e^x},\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Representamos comparativamente las siguientes gráficas de funciones exponenciales:

$f_1(x) = \mathbf{2^x}$, $f_2(x) = \mathbf{e^x}$, $f_3(x) = \mathbf{3^x}$ $\qquad g_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \mathbf{3^{-x}}$, $g_2(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x = \mathbf{e^{-x}}$, $g_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathbf{2^{-x}}$





➢ Ecuaciones exponenciales

Las ***ecuaciones exponenciales*** son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente. La propiedad que permite resolver muchas ecuaciones es la inyectividad de la función exponencial:

$$\mathbf{a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y}$$

Ejemplo 10

Para resolver las siguientes ecuaciones, expresamos las potencias de ambos miembros en la misma base, para luego igualar los exponentes. Finalmente, obtenemos la solución al resolver una ecuación polinómica.

- Las potencias de la siguiente ecuación se pueden expresar en la base común 2:

$$\mathbf{2^x = \frac{1}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{2^3} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -3}$$

- Las potencias de la siguiente ecuación se pueden expresar en la base común 3:

$$\mathbf{9^{x+7} = 3^{2-x}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^2\right)^{x+7} = 3^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x+14} = 3^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 14 = 2 - x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -4}$$

- Las potencias de la siguiente ecuación se pueden expresar en la base común 2:

$$\mathbf{8^{3x^2-5} = 64^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^{3x^2-5} = \left(2^6\right)^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{9x^2-15} = 2^{-6x} \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 - 15 = -6x$$

$$9x^2 - 15 = -6x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 1,\ x = -\frac{5}{3}}$$

Ejemplo 11

Para resolver las siguientes ecuaciones, primero aislamos la parte exponencial:

- $$\mathbf{\frac{500}{40+15\cdot 2^x} = 5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{500}{5} = 40 + 15 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 100 = 40 + 15 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 60 = 15 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 = 2^x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$$

- $$\mathbf{10 \cdot 5^{x+2} + 20 \cdot 5^{x+3} = 550} \quad \Leftrightarrow \quad 10 \cdot 5^x \cdot 5^2 + 20 \cdot 5^x \cdot 5^3 = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 250 \cdot 5^x + 2500 \cdot 5^x = 550$$

$$2750 \cdot 5^x = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 2750 \cdot 5^x = 550 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \frac{550}{2750} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -1}$$

12 Si en lugar de un euro considerado en el ejemplo de la página anterior, tomáramos 3 euros, ¿a qué número irracional llegaríamos con el interés continuo?

13 Representa gráficamente las funciones $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^{2x}$ y $t(x) = 2^{\frac{x}{2}}$, e indica qué efecto se produce sobre las graficas de las funciones exponenciales básicas correspondientes.

14 Halla los valores de m y n para que la función $f(x) = 16 \cdot 8^x$ se exprese en la forma $f(x) = 2^{mx+n}$.

15 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $2^{x^2+1} = 4^{-x}$ (B) $7^{x^3-1} = 1$ (C) $2^{9x-21} = \sqrt{2^{39}}$ (D) $5^{3x-2} = 5$ (E) $4^{-x+3} = 2^{-3x+4}$

(F) $5 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{x-1} = 24$ (G) $9^x - 7 \cdot 3^x = 18$ (H) $\frac{1000}{80(1+2^x)} = 10$ (I) $\frac{45}{5+90\cdot 3^x} = 3$

5.5 Funciones logísticas

Las ***funciones logísticas o de crecimiento frenado*** son aquellas de expresión general:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{1 + k \cdot a^x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ siendo C y k constantes positivas.}$$

Son funciones muy utilizadas para modelizar el crecimiento de poblaciones biológicas o en Demografía.

Las poblaciones biológicas de todo tipo (incluida la humana) experimentan grandes crecimientos, de tipo exponencial, cuando se dan condiciones favorables. Pero la Tierra es un espacio limitado de recursos para todas las especies, y el aumento de un tipo de población conlleva al final una disminución de las condiciones favorables, con lo que el crecimiento se frena.

Las funciones logísticas tienen un crecimiento "con freno" no superando el valor de la constante **C**.

Ejemplo 12

Obtenemos una tabla de valores y la representación gráfica de la curva logística dada por la función

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1 + 3 \cdot (1/2)^x}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	10	$+\infty$
f(x)	**0**	0.04	0.32	0.61	1.14	2	3.2	4.57	5.81	7.64	7.97	**8**

Esta función es siempre creciente, pero sin embargo:

- Los valores de la función están limitados superiormente por 8:

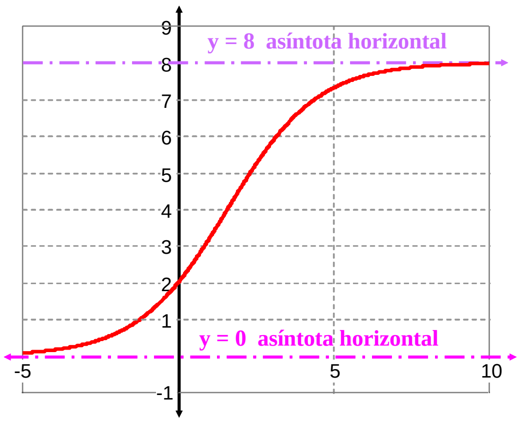
  Cuando x tiende a $+\infty$, las imágenes se acercan a 8. Matemáticamente se escribe $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{1+3 \cdot (1/2)^x} = \mathbf{8}$.

  La recta **y = 8** es asíntota horizontal de la curva, limitándola superiormente.

- De igual modo los valores están limitados inferiormente por 0:

  Cuando x tiende a $-\infty$, las imágenes se acercan a 0. Decimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8}{1+3 \cdot (1/2)^x} = \mathbf{0}$.

  La recta **y = 0** es también asíntota horizontal de la curva, y la limita por debajo.



Ejemplo 13

La población humana mundial sigue un crecimiento exponencial que necesariamente tendrá un freno. Supongamos que la capacidad poblacional de la Tierra es de 12 000 millones de habitantes (límite superior que asumimos) y que la población mundial, en millones de habitantes, se ajusta a una ***función logística***

$$\mathbf{C(x)} = \frac{\mathbf{12\,000}}{\mathbf{1 + k \cdot a^{x}}}, \quad \text{para } \mathbf{x} \geq 0$$

siendo **x** el número de años desde 1960.

(A) Hallamos los valores de k y de a para que esta función se ajuste a los 3 000 millones de personas de 1960 y a los 4 000 millones de 1975.

(B) Con la función obtenida, ¿cuál es la población para el año 2020?

Según el significado de la variable x, el año 1960 es x = 0, el año 1975 es x = 15 y el 2 020 es x = 60.

(A) Queremos que C(0) = 3 000 y que C(15) = 4 000:

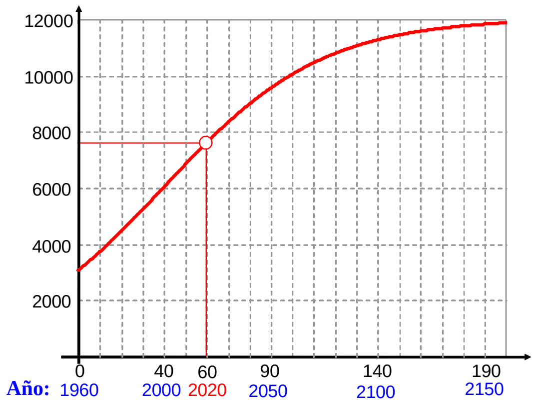
$$C(0) = 3000 \iff \frac{12\,000}{1 + k\,a^0} = 3000 \iff \frac{12000}{3000} = 1 + k\,a^0 \iff 4 = 1 + k \iff \mathbf{k = 3}$$

$$C(15) = 4000 \overset{\mathbf{k=3}}{\iff} \frac{12\,000}{1 + 3a^{15}} = 4000 \iff \frac{12000}{4000} = 1 + 3\,a^{15} \iff 3 = 1 + 3\,a^{15}$$

$$\iff 3\,a^{15} = 2 \iff a^{15} = \frac{2}{3} \iff \mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{1/15}}$$

La función logística que se ajusta a los datos es:

$$\mathbf{C(x)} = \frac{\mathbf{12\,000}}{\mathbf{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{x/15}}}, \quad \forall \mathbf{x} \geq 0$$



(B) La población en 2 020 es el valor de C(x) en x = 60:

$$C(60) = \frac{12\,000}{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{60/15}} = \frac{12\,000}{1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}$$

$$= \frac{12\,000}{1 + \frac{16}{27}} = \frac{12\,000}{\frac{43}{27}} \simeq \mathbf{7\,534 \text{ millones}}$$

Estas funciones logísticas suelen llamarse también ***funciones de crecimiento frenado***.

16 ¿Cuál es la asíntota que limita superiormente la función del ejemplo anterior? ¿Qué significado poblacional tiene? ¿Qué población habrá en el año 2 100?

17 Halla el valor de la constante k y de la base a para que la función $f(x) = \dfrac{12\,000}{1 + k \cdot a^{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ verifique f(0) = 2 000 y f(8) = 11 770.11494.

18 Modeliza una función logística f(x) que tenga un límite superior de 250, f(0) = 20 y f(10) = 111.8666787.

5.6 Los logaritmos

Ejemplo 14

- En apartados anteriores hemos resuelto ecuaciones exponenciales, como por ejemplo:

$$2^x = 16 \iff 2^x = 2^4 \rightarrow \mathbf{x = 4}$$

La solución x = 4 es el exponente al que elevamos la base 2 para obtener el número 64. Se llama también ***logaritmo en base* 2 *del número* 16**, y se expresa $\mathbf{\log_2 16} = \mathbf{4}$.

- De igual modo, la solución de la ecuación

$$2^x = 64 \iff 2^x = 2^6 \Rightarrow \mathbf{x = 6 = \log_2 64}\ , \ \textbf{\textit{logaritmo en base} 2 \textit{del número} 64}$$

- También la solución de la ecuación

$$2^x = \frac{1}{2} \iff 2^x = 2^{-1} \rightarrow \mathbf{x = -1 = \log_2 \frac{1}{2}}\ , \ \textbf{\textit{logaritmo en base} 2 \textit{del número} 1/2}$$

- La solución de la ecuación

$$2^x = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \iff 2^x = 2^{\frac{-2}{5}} \rightarrow \mathbf{x = -\frac{2}{5} = \log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{4}}}\ , \ \textbf{\textit{logaritmo en base} 2 \textit{del número}}\ \mathbf{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}$$

- Pero no siempre podemos expresar la solución de una ecuación de este tipo mediante un número entero o fraccionario. Por ejemplo, la ecuación siguiente tiene solución, pero es un número irracional:

$$2^x = 3 \iff \mathbf{x = \log_2 3}\ , \ \textbf{\textit{logaritmo en base} 2 \textit{del número} 3}$$

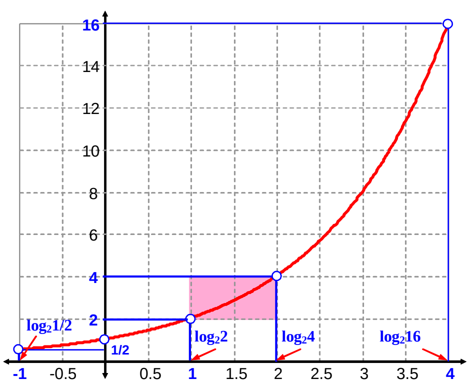
Hallamos un valor aproximado de este número a partir de la gráfica de la función exponencial de base 2 y con ayuda de la calculadora:

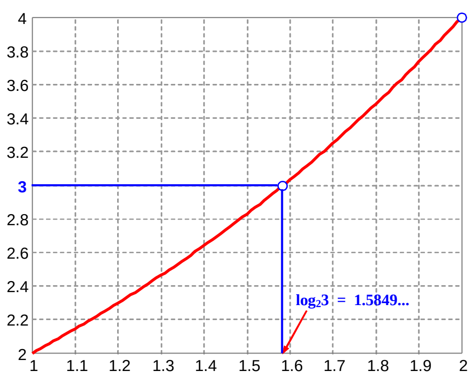
(1) $\left.\begin{array}{l} 2^0 = 1 \\ 2^1 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 3 \in \left]1, 2\right[$

(2) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.5} \cong 2.8284 \\ 2^{1.6} \cong 3.0314 \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 3 \in \left]1.5, 1.6\right[$

(2) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.58} \cong 2.9897 \\ 2^{1.59} \cong 3.0105 \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 3 \in \left]1.58, 1.59\right[$

(4) $\left.\begin{array}{l} 2^{1.584} \cong 2.99799 \\ 2^{1.585} \cong 3.00007 \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 3 \in \left]1.584, 1.585\right[$





Un valor aproximado por defecto es $\mathbf{\log_2 3} \simeq \mathbf{1.5849625}$ con el que obtenemos $\mathbf{2^{1.5849625}} \simeq \mathbf{2.99999999985}$.

➢ El número logarítmico

Dado b > 0, la única solución de la ecuación $\mathbf{a^x} = \mathbf{b}$, con a > 0 y a ≠ 1, es un número real, llamado ***logaritmo en base* a *de* b**, representado por $\mathbf{\log_a b}$:

$$\mathbf{x = \log_a b} \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{a^x = b}$$

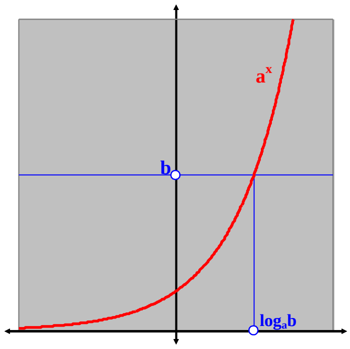
Si la base es **a = 10**, se llama ***logaritmo decimal*** que se representa por $\mathbf{\log b = \log_{10} b}$.

Si la base es **a = e**, se llama ***logaritmo neperiano*** que se representa por $\mathbf{\ln b = \log_e b}$.

La definición del número logaritmo es posible porque la función exponencial f(x) = a^x **es inyectiva**:

∀b > 0 la ecuación $\mathbf{a^x} = \mathbf{b}$ **tiene solución única** (el logaritmo en base a de b).

Las rectas horizontales solo cortan una vez a la gráfica de una función inyectiva.



Ejemplo 15

Calculamos el valor exacto de los siguientes logaritmos resolviendo la ecuación exponencial equivalente:

- $\log_3 27 = x \iff 3^x = 27 \iff 3^x = 3^3 \Rightarrow \mathbf{x = 3} \Rightarrow \mathbf{\log_3 27 = 3}$
- $\ln e^{-3} = x \iff e^x = e^{-3} \Rightarrow \mathbf{x = -3} \Rightarrow \mathbf{\ln e^{-3} = -3}$
- $\log_5 \dfrac{1}{625} = x \iff 5^x = \dfrac{1}{625} \iff 5^x = 5^{-4} \Rightarrow \mathbf{x = -4} \Rightarrow \mathbf{\log_5 \dfrac{1}{625} = -4}$
- $\log 0.00001 = x \iff 10^x = 0.00001 \iff 10^x = 10^{-5} \Rightarrow \mathbf{x = -5} \Rightarrow \mathbf{\log 0.00001 = -5}$
- $\log \sqrt[3]{100} = x \iff 10^x = \sqrt[3]{100} \iff 10^x = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathbf{x = \dfrac{2}{3}} \Rightarrow \mathbf{\log \sqrt[3]{100} = \dfrac{2}{3}}$
- $\log_{1/2} 256 = x \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 256 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^8 \iff 2^{-x} = 2^8 \Rightarrow \mathbf{x = -8 = \log_{1/2} 256}$

19 Halla los siguientes logaritmos:

(A) $\log_2 1024$	(B) $\log_4 2$	(C) $\log_2 \sqrt[5]{8}$	(D) $\log_5 0.04$	(E) $\log_8 16$	(F) $\log_{1/4} 2$
(G) $\log 10000$	(H) $\log 0.001$	(I) $\log_2 \sqrt[3]{4}$	(J) $\log_3 \sqrt[5]{9}$	(K) $\log_{1/10} 0.001$	(L) $\ln e^4$
(M) $\ln e^{-3}$	(N) $\log_{1/e} e^{-4}$	(Ñ) $\log_5 5^{-16}$	(O) $\log_5 625^{-2}$	(P) $\log_{1/5} 125$	(Q) $\log_a a^2$

5.7 Propiedades de los logaritmos

(P1) $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ (P2) $\mathbf{\log_a a = 1}$ (P3) $\mathbf{\log_a \frac{1}{a} = -1}$ (P4) $\mathbf{\log_a a^p = p}$

Son consecuencias inmediatas de la definición. Planteemos las ecuaciones equivalentes para demostrarlas:

(1) $\log_a 1 = x \iff a^x = 1 \iff a^x = a^0 \to x = 0 \to \mathbf{\log_a 1 = 0}$

(2) $\log_a a = x \iff a^x = a \iff a^x = a^1 \to x = 1 \to \mathbf{\log_a a = 1}$

(3) $\log_a \frac{1}{a} = x \iff a^x = \frac{1}{a} \iff a^x = a^{-1} \to x = -1 \to \mathbf{\log_a \frac{1}{a} = -1}$

(4) $\log_a a^p = x \iff a^x = a^p \to x = p \to \mathbf{\log_a a^p = p}$

(P5) Del logaritmo del producto: $\mathbf{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

(P6) Del logaritmo del cociente: $\mathbf{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

(P7) Del logaritmo de una potencia: $\mathbf{\log_a x^y = y \cdot \log_a x}$

Las demostraciones se deducen a partir de las propiedades de las potencias.

Llamamos u al número logaritmo $\log_a x$, y llamamos v al número logaritmo $\log_a y$. Tenemos

$$u = \log_a x \iff a^u = x \qquad v = \log_a y \iff a^v = y$$

(P1) Como: $x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \to x \cdot y = a^{u+v}$

Entonces u + v es el logaritmo en base a de x · y:

$$u + v = \log_a (x \cdot y) \iff \mathbf{\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)}$$

(P2) Como: $\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \to \frac{x}{y} = a^{u-v}$

Por lo que u – v es el logaritmo en base a de $\frac{x}{y}$:

$$u - v = \log_a \frac{x}{y} \iff \mathbf{\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}}$$

(P3) $u = \log_a x \iff a^u = x \iff \left(a^u\right)^y = x^y \iff \mathbf{a^{y \cdot u} = x^y}$

Entonces y · u es el logaritmo en base a de $\mathbf{x^y}$:

$$y \cdot u = \log_a x^y \iff \mathbf{y \cdot \log_a x = \log_a x^y}$$

Ejemplo 16

Las propiedades anteriores permiten calcular, de otro modo, logaritmos:

- $\log_3 729 = \log_3 3^6 \overset{(P4)}{=} 6 \log_3 3 \overset{(P2)}{=} 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $\log 1000000 = \log 10^6 \overset{(P4)}{=} 6 \cdot \log 10 \overset{(P2)}{=} 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $\log_5 \frac{1}{25} \overset{(P6)}{=} \log_5 1 - \log_5 5^2 \overset{(P1/P2)}{=} 0 - 2 \cdot \log_5 5 \overset{(P2)}{=} \mathbf{-2}$
- $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \overset{(P6)}{=} \ln 1 - \ln \sqrt[3]{e^2} \overset{(P1/P2)}{=} 0 - \ln e^{2/3} \overset{(P4)}{=} -\frac{2}{3} \ln e \overset{(P2)}{=} -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\mathbf{\frac{2}{3}}$

➢ Propiedad del cambio de base

La calculadora solo proporciona un valor aproximado del logaritmo decimal o del logaritmo neperiano de cualquier número, pero no en otras bases. Para hacer esto, recurrimos a la ***propiedad del cambio de base***:

Para cualesquiera dos bases a > 0, b > 0, se verifica $\mathbf{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$.

Si llamamos $y = \log_b x$ tenemos $b^y = x$ de donde $\log_a b^y = \log_a x$. Por la propiedad (P6):

$$y \cdot \log_a b = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Ejemplo 17

Hallamos el valor $\log_5 12$. El cambio de base permite hacerlo con la calculadora, tanto en base 10 como e:

Cambiando de la base b = 5 a la base a = 10

$$\log_5 12 = \frac{\log 12}{\log 5} = \frac{1.079181}{0.698970} = 1.543959$$

Cambiando de la base b = 5 a la base a = e

$$\log_5 12 = \frac{\ln 12}{\ln 5} = \frac{2.484906}{1.609437} = 1.543959$$

20 Aplicando las propiedades de las potencias calcula los siguientes logaritmos:

(A) $\log_8 4096$ (B) $\log_3 \frac{1}{729}$ (C) $\ln \frac{1}{e^5}$ (D) $\log_{1/4} 256$ (E) $\log_5 \sqrt[4]{125}$ (F) $\log_{1/16} \sqrt[7]{256}$

21 Aplicando el cambio de base calcula los siguientes logaritmos: (A) $\log_6 34$ (B) $\log_{1/2} 50$ (C) $\log_{2/3} \sqrt[4]{125}$

22 Comprueba la falsedad de las siguientes igualdades:

(A) $\log(x + y) = \log x \cdot \log y$ (B) $\log(x + y) = \frac{\log x}{\log y}$ (C) $\log(nx) = n \log x$

➢ Resolución de la ecuación exponencial $a^x = b$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$ $\Rightarrow$ la ecuación $a^x = b$ solo tiene solución (que es única) para $b > 0$:

$$\mathbf{x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

- Como $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, es imposible que la ecuación $a^x = b$ tenga solución si $b \leq 0$.
- Como $f(x) = a^x\ \forall x \in \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces si $b > 0$, la ecuación $a^x = b$ tiene solución única. Dicha solución se expresa como:

$$\mathbf{x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

Veamos en el siguiente ejemplo cómo obtenemos el valor de la incógnita de una ecuación exponencial.

Ejemplo 18

¿Cuánto tiempo debemos tener invertido un capital de 6 000 €, al tipo de interés compuesto anual del 3.5 %, con vencimiento mensual, para obtener un capital final de 8 510 €?

La expresión que permite obtener el capital final es

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$$

donde C_0 es el capital inicial (6 000 €), r es el tipo de interés en tanto por uno ($r = 0.035$) y t el tiempo medido en años.

Sustituyendo tenemos

$$8\,510 = 6\,000\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12t} \quad \Rightarrow \quad \frac{8510}{6\,000} = \left(\frac{12.035}{12}\right)^{12t}$$

Tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros y aplicamos la propiedad P4 para despejar t:

$$\ln\frac{8510}{6000} = \ln\left(\frac{12.035}{12}\right)^{12t} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{8510}{6000} = 12t \cdot \ln\frac{12.035}{12} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{12}\,\frac{\ln\dfrac{8510}{6\,000}}{\ln\dfrac{12.035}{12}}$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{12}\,\frac{1.418333}{0.002912} \simeq \frac{1}{12}\cdot 120 = \mathbf{10\ años}$$

23 ¿Cuándo alcanzará la Tierra una población de 11 000 millones de habitantes? Utiliza la función logística del ejemplo 13, $P(x) = \dfrac{12\,000}{1+3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x/15}}$.

24 ¿Cuánto tiempo debemos tener invertido un capital de 11 000 €, al tipo de interés compuesto anual del 5 % y vencimiento mensual, para obtener un capital final de 15598.4 €? ¿Y si el vencimiento de intereses se produce semanalmente?

➢ Ecuaciones logarítmicas

Ejemplo 19

La definición de logaritmo, sus propiedades y la relación con las exponenciales permiten resolver determinadas ecuaciones, las logarítmicas.

- $4\log x = 5 + \log\frac{x}{100} \Leftrightarrow \log x^4 - \log\frac{x}{100} = 5 \Leftrightarrow \log\frac{100x^4}{x} = 5 \Leftrightarrow \log(100x^3) = 5$

  $10^5 = 100x^3 \Leftrightarrow 10^3 = x^3 \Leftrightarrow x = 10$

- $\log(5x+2) - \log 2 = \log(x+4) \Leftrightarrow \log\frac{5x+2}{2} = \log(x+4) \Leftrightarrow \frac{5x+2}{2} = x+4$

  $5x + 2 = 2x + 8 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Las propiedades también permiten resolver sistemas de ecuaciones en los que alguna de las ecuaciones es logarítmica:

- $$\left.\begin{array}{l} x-y=9 \\ \log x - 2\log y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ \log x - \log y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ \log\frac{x}{y^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ \frac{x}{y^2} = 10^1 \end{array}\right\}$$

  $$\left.\begin{array}{l} x=9+y \\ x=10y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ 9+y=10y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ 10y^2-y-9=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9+y \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

  Observa que la ecuación de segundo grado $10y^2 - y - 9 = 0$ posee otra solución, $y = -9/10$, pero no es válida porque no existe $\log(-9/10)$.

- $$\left.\begin{array}{l} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 75 \\ 2^x : 2^y = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 75 \\ 2^{x-y} = 2^5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 75 \\ 2^{x-y} = 2^5 \end{array}\right\}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 75 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log(x+y)+\log 5=\log 75 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log(x+y)=\log 75-\log 5 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \log(x+y)=\log\frac{75}{5} \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log(x+y)=\log 15 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=5 \end{array}\right\}$$

25 Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas:

(A) $\log x + \log 4 = 1$ (B) $\log(x+1) - \log(x-1) = 2$ (C) $\log x - \log 2 = 2\log(x-3)$

(D) $\log(x+3) - \log(4-x) = 1$ (E) $\log(3x-1) + \log 2 = 2\log(x+1)$ (F) $\log_2(x+2) - \log_2 2 = 5$

(G) $\left.\begin{array}{l} x-y=9 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$ (H) $\left.\begin{array}{l} \log x - \log y = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{array}\right\}$ (I) $\left.\begin{array}{l} 2\log x + 3\log y = 5 \\ 3\log x - 2\log y = 1 \end{array}\right\}$ (J) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{array}\right\}$

(K) $\left.\begin{array}{l} \log x + 3\log y = 8 \\ \log(x^2 : y) = \log 100 \end{array}\right\}$ (L) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} = 2^{y-1} \\ \log x - \log y = \log 2 \end{array}\right\}$ (M) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} = 2^{y-1} \\ \log(x:y) = \log 2 \end{array}\right\}$ (N) $\left.\begin{array}{l} 2^{x+1} = 8^{y-1} \\ \log(x:y) = \log 15 \end{array}\right\}$

5.8 Funciones logarítmicas

Sabemos que la función exponencial $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y, por tanto, su correspondencia recíproca es una función. Dicha función recíproca se obtiene al despejar x en la ecuación y = f(x):

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = \log_a y}$$

Por tanto, mientras la función exponencial asocia a cada número real **x** la potencia a^x, su función recíproca asocia a cada número positivo **y** su logaritmo en base a. Por ello la llamamos ***función logarítmica***.

> Llamamos ***función logarítmica de base* a** (con a > 0, a ≠ 1) a la función que a cada número positivo x le asocia su logaritmo en base a:
>
> $$\mathbf{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \mathbf{g(x) = \log_a x}, \ \forall \mathbf{x > 0}$$
>
> Es la función recíproca de la función exponencial de base a.

Ejemplo 20

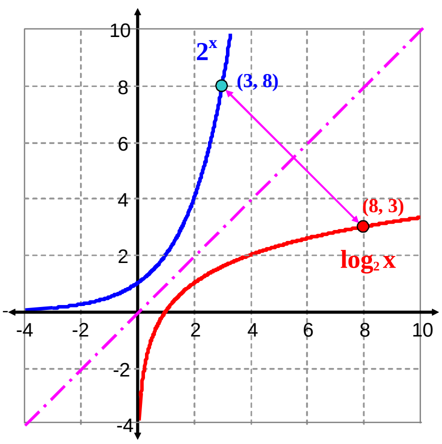
Obtenemos dos tablas de valores comparativas de funciones exponenciales con sus recíprocas, las funciones logarítmicas. Observamos como los orígenes de una función son las imágenes de la otra, y a la inversa. Por ello sus gráficas son simétricas respecto de la recta y = x.

$f(x) = 2^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

x	f(x)
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

$g(x) = \log_2 x, \ \forall x > 0$

x	g(x)
1/8	–3
1/4	–2
1/2	–1
1	0
2	1
4	2
8	3

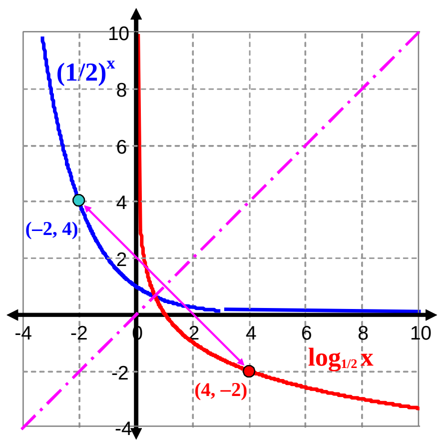


$f(x) = (1/2)^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

x	g(x)
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

$g(x) = \log_{1/2} x, \ \forall x > 0$

x	g(x)
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
1/2	1
1/4	2
1/8	3



➢ Propiedades de las funciones logarítmicas

Ejemplo 21

Comparamos las gráficas de algunas funciones logarítmicas para observar las propiedades dadas a continuación.

x	**0.01**	**0.1**	**1**	**10**	**100**	**1000**
$\log_{10}x$	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**

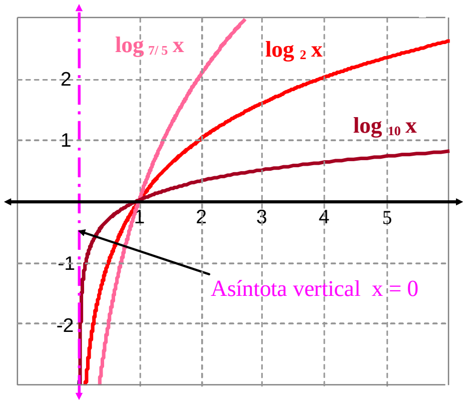
x	**100**	**10**	**1**	**0.1**	**0.01**	**0.001**
$\log_{1/10}x$	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**

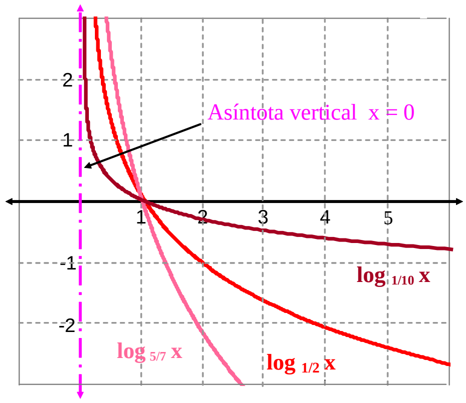
x	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**
$\log_{2}x$	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**

x	**4**	**2**	**1**	**1/2**	**1/4**	**1/8**
$\log_{1/2}x$	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**

x	$(5/7)^2$	5/7	1	7/5	$(7/5)^2$	$(7/5)^2$
$\log_{7/5}x$	–2	–1	0	1	2	3

x	$(7/5)^2$	7/5	1	5/7	$(5/7)^2$	$(5/7)^3$
$\log_{5/7}x$	–2	–1	0	1	2	3





La función logarítmica $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ verifica las siguientes propiedades:

- $\mathbf{g(1) = \log_a 1 = 0}$ y $\mathbf{g(a) = \log_a a = 1}$ $\Rightarrow$ **la gráfica pasa por los puntos (1, 0) y (a, 1)**
- El dominio es $\mathbf{D_g =]\ 0, +\infty\ [}$ y el rango es $\mathbf{R_f} = \mathbb{R}$.
- $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ **es creciente si a > 1**, y **decreciente si a < 1**.
- La recta **r: x = 0 es asíntota vertical**.

26 Del mismo modo que en el ejemplo anterior, representa gráficamente, sobre los mismos ejes de coordenadas, los siguientes grupos de funciones. Obtén el dominio de todas ellas.

(A) $f(x) = \log_{3/2} x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \log_5 x$

(B) $f(x) = \log_{2/3} x$, $g(x) = \log_{1/e} x$, $h(x) = \log_{1/5} x$

(C) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x + 1)$, $h(x) = \ln(x – 1)$

(D) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(2x)$, $h(x) = \ln(x/2)$

(E) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(–x)$

(F) $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \ln|x|$

5.9 Tasa anual equivalente TAE

Diferentes tipos de interés, distintos vencimientos de los mismos, etc. conducen a que el consumidor habitual tenga una gran confusión a la hora de valorar qué le conviene. La tasa anual equivalente homogeneiza toda la casuística para facilitar la comparación.

Llamamos ***tasa anual equivalente*** de una inversión al tipo de interés anual al que equivale la inversión realizada si los intereses capitalizaran anualmente.

Ejemplo 22

Una caja de ahorros establece que el tipo de interés cargado al cliente por sus descubiertos (estar sin saldo cuando se presentan recibos al cobro) es del 24 % anual compuesto mensualmente.
¿A qué tipo de interés compuesto anual equivale?, es decir, ¿cuál es su TAE?

Cada euro se convierte en un mes en $1+\dfrac{0.24}{12}=1.02$ €.

Y al cabo de un año en $\left(1+\dfrac{0.24}{12}\right)^{12}=(1.02)^{12}=1.26824$ €.

Un tipo de interés TAE que obtuviera el mismo capital final, a partir de 1 euro, con devengo anual sería:

$$(1+\text{TAE})^{1}=(1.02)^{12}=1.26824 \quad\Rightarrow\quad 1+\text{TAE}=1.26824 \quad\Rightarrow\quad \text{TAE}=0.26824$$

En tanto por ciento: **TAE = 26.824 %**.

El ejemplo anterior permite hallar la expresión para calcular el TAE de una inversión fácilmente.

El TAE de una inversión se halla con la expresión

$$\mathbf{1+TAE}=\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$$

donde r es el tipo de interés compuesto anual, con n capitalizaciones a lo largo del año.

Veamos cuál es el TAE de dos inversiones, al tipo de interés compuesto anual del 6 %, pero que en el banco A se capitaliza trimestralmente y en el banco B mensualmente.

Banco A

$$1+\text{TAE}=\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4} \quad\Rightarrow\quad \textbf{TAE = 6.136 \%}$$

r = R/100 = 6/100 y n = 4

Banco B

$$1+\text{TAE}=\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12} \quad\Rightarrow\quad \textbf{TAE = 6.167 \%}$$

r = R/100 = 0.06/100 = 0.06 y n = 12

27 Halla el TAE de una inversión realizada al 3 % de interés compuesto semestral y vencimiento mensual.

28 ¿Qué prefieres depositar tu dinero al 12 % anual y vencimiento mensual o al 1 % mensual y vencimiento diario?

29 El TAE de una inversión es el 5 %. ¿Qué tipo de interés mensual tiene?

5.10 Anualidades de capitalización

Ejemplo 23

Antonio quiere ahorrar para comprar un coche. Piensa que cada 1 de enero, desde 2010 hasta 2014, podrá ingresar en una cuenta bancaria 3 000 €. Si la cuenta ofrece un tipo de interés compuesto anual del 5 %, ¿cuánto habrá capitalizado hasta el 1 de enero de 2015?

Fecha de Aportación	Capital aportado: anualidad	Capital final de cada aportación 01-01-2015
01-01-2010	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F1} = 3000\ (1 + 0.05)^5}$ **€**
01-01-2011	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F2} = 3000\ (1 + 0.05)^4}$ **€**
01-01-2012	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F3} = 3000\ (1 + 0.05)^3}$ **€**
01-01-2013	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F4} = 3000\ (1 + 0.05)^2}$ **€**
01-01-2014	**A = 3000 €**	$\mathbf{C_{F5} = 3000\ (1 + 0.05)^1}$ **€**

De este modo, la capitalización total obtenida por Antonio es

$$\mathbf{C} = C_{F1} + C_{F2} + C_{F3} + C_{F4} + C_{F5} =$$

$$= 3000\ (1 + 0.05)^5 + 3000\ (1 + 0.05)^4 + 3000\ (1 + 0.05)^3 + 3000\ (1 + 0.05)^2 + 3000\ (1 + 0.05) =$$

$$= 3000\ [(1.05)^5 + (1.05)^4 + (1.05)^3 + (1.05)^2 + (1.05)] \underset{(1)}{=} 3000\ \frac{(1.05)^6 - (1.05)^1}{1.05 - 1}$$

$$C = 3000\ \frac{(1.05)^6 - (1.05)}{0.05} = 3000 \cdot 5.801912812 = \mathbf{17405.74\ €}$$

(1) Este cociente es la suma de 5 términos $(1.05) + (1.05)^2 + (1.05)^3 + (1.05)^4 + (1.05)^5$ de la progresión geométrica de primer término 1.05 y razón 1.05. Puedes ver la fórmula en el capítulo 6.

La capitalización obtenida por una anualidad **A** al tipo de interés compuesto anual **r**, expresado en tanto por uno, durante t años viene dada por la expresión:

$$\mathbf{C} = A\,\frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r}$$

El ahorro puede hacerse en períodos de tiempo diferentes al año; aparecen así, por ejemplo, las ***mensualidades***. La expresión de la capitalización es la misma pero, como en casos anteriores, el tipo de interés sería mensual ($r_m = r/12$) y el tiempo se daría en meses (12t, si t fueran años).

30 ¿Qué capital acumularemos si trimestralmente, durante 2 años y medio, ingresamos en el banco 2 000 € al tipo de interés compuesto trimestral del 1.5 %?

31 Quique es un apasionado de las fiestas de moros y cristianos de Alcoy. Necesita para cubrir los festejos del próximo año 2 000 € por lo que realiza, durante 51 semanas, un *montepío* (acumulación de capital). ¿Qué cantidad deberá ingresar semanalmente para cubrir sus gastos al 3 % de interés compuesto anual?

5.11 Anualidades de amortización

Ahora tratamos lo que habitualmente llamamos pago a plazos: amortizamos una deuda mediante pagos periódicos iguales (anualidades, mensualidades...) a lo largo de un cierto tiempo.

Ejemplo 24

Yolanda compró el 05/02/2000 una casa por 100 000 €. Como no disponía de liquidez solicita un préstamo que es concedido inmediatamente a un tipo de interés compuesto anual del 4 %. Debe amortizarlo en 25 anualidades (hasta el 05/02/2025). ¿Qué anualidad deberá entregar cada uno de los 25 años para saldar la deuda?

El problema se resuelve pensando en dos contratos diferentes:

(A) ¿Qué capital final C_F pagaría al cabo de 25 años si no devolviera cantidad alguna de su deuda D (100 000 €) hasta dicho instante?

(B) Constituir una capitalización con anualidades de A euros hasta conseguir acumular un capital equivalente al capital final C_F que producirá la deuda D del apartado A.

(A) La deuda D generará un capital final acumulado al cabo de los 25 años de:

$$\mathbf{C_F} = 100000\,(1+0.04)^{25} = \mathbf{266583.63\ €} \qquad (1)$$

(B) Debemos calcular una anualidad de modo que tras 25 años, capitalicemos un total de 266583.63 €:

Fecha de Aportación	Capital aportado: anualidad	Capital final aportado a 05-02-2025
05-02-2000	**Ninguno; de otra manera solicitaría un préstamo menor**	....
05-02-2001	**A €**	$\mathbf{C_{F1} = A\,(1+0.04)^{24}}$ **€**
05-02-2002	**A €**	$\mathbf{C_{F2} = A\,(1+0.04)^{23}}$ **€**
....	....	....
05-02-2024	**A €**	$\mathbf{C_{F24} = A\,(1+0.04)^{1}}$ **€**
05-02-2025	**A €**	$\mathbf{C_{F25} = A}$ **€**

Observa que la capitalización realizada por Yolanda no es exactamente igual a las anualidades de capitalización vistas anteriormente; allí al comenzar el período ya se colocaba la primera anualidad y la última se deposita el año anterior al reintegro del capital. Aquí la primera anualidad se coloca transcurrido un año (se supone que carece de liquidez pues de otra manera pediría un préstamo menor) y la última es el pago final con el que cancela la deuda.

$$\mathbf{C_F} = C_{F1} + C_{F2} + C_{F3} + \ldots + C_{F24} + C_{F25} = A\,(1+0.04)^{24} + A\,(1+0.04)^{23} + \ldots + A\,(1+0.04) + A =$$

$$= A\,[(1.04)^{24} + (1.04)^{23} + \ldots + (1.04) + 1] \underset{(*)}{=} A\,\frac{(1.04)^{25}-1}{1.04-1} = \mathbf{A \cdot 41.64590829\ €} \qquad (2)$$

(*) El cociente anterior es la suma de 25 términos $(1.04)^0 + \ldots + (1.04)^{23} + (1.04)^{24}$ de una progresión geométrica de primer término $1 = (1.04)^0$ y razón 1.04. Puedes ver la fórmula en el capítulo 6.

Ahora, los dos contratos deben cancelarse entre sí; igualando los capitales finales C_F de (1) y (2) tenemos:

$$A\,\frac{(1.04)^{25}-1}{1.04-1} = 100000\,(1+0.04)^{25} \quad\Rightarrow\quad A \cdot 41.64590829 = 266583.63 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A = 6401.20\ €}$$

Yolanda paga 25 anualidades de **6401.20 €**, desde el 05-02-2001 hasta el 05-02-2025, y genera una capitalización exactamente igual a la que produce su deuda de 100000 €, contraída el 05-02-2000, al comprar su vivienda.

Una deuda **D** contraída, a un tipo de interés compuesto anual **r** en tanto por uno, se amortiza mediante **t** anualidades iguales **A** obtenidas de la expresión:

$$A\,\frac{(1+r)^t-1}{r}=D\,(1+r)^t \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathbf{A=\frac{D\cdot r\cdot(1+r)^t}{(1+r)^t-1}}$$

La cantidad a pagar A puede hacerse con otras periodicidades, por ejemplo, en meses y tendríamos las ***mensualidades***. La expresión correspondiente será análoga pero, como en casos anteriores, el tipo de interés será mensual ($r_m = r/12$) y el tiempo vendrá en meses (12t, con t años).

Ejemplo 25

Una empresa compra un equipo informático cuyo coste total es 7 000 €. El banco le presta el dinero a un tipo de interés compuesto anual del 4.8 % y la deuda debe satisfacerse en un plazo de 2 años y medio. ¿Qué mensualidad debe pagar la empresa?

La deuda contraída D es 7 000 €. El tipo de interés en tanto por uno es r = 4.8/100 = 0.048. Como hablamos de mensualidades el tipo de interés mensual es $r_m = r/12 = 0.004$. El tiempo t = 2.5 años, es decir, 2.5 · 12 = 30 meses.

La mensualidad A será:

$$A=\frac{D\cdot r_m\cdot(1+r)^{12t}}{(1+r)^{12t}-1}=\frac{7000\cdot 0.004\cdot(1+0.004)^{30}}{(1+0.004)^{30}-1}=248.08\ €$$

Ejemplo 26

Juan ha comprado un coche por 20 000 €. El banco le ha hecho un préstamo por todo el capital a un tipo de interés compuesto anual del 6.6 %. Si abona una mensualidad de 534.61 €, ¿cuánto tiempo tardará en pagar su préstamo?

El tipo de interés en tanto por uno es r = 6.6/100 = 0.066. Como hablamos de mensualidades el tipo de interés mensual será $r_m = r/12 = 0.0055$.

$$A=\frac{D\cdot r_m\cdot(1+r)^{12t}}{(1+r)^{12t}-1} \Rightarrow 534.61=\frac{20000\cdot 0.0055\cdot(1+0.0055)^{12t}}{(1+0.0055)^{12t}-1} \Rightarrow 534.61=\frac{110\cdot(1.0055)^{12t}}{(1.0055)^{12t}-1}$$

$$534.61\cdot\left[(1.0055)^{12t}-1\right]=110\cdot(1.0055)^{12t} \Rightarrow 534.61\cdot(1.0055)^{12t}-534.61=110\cdot(1.0055)^{12t}$$

$$(534.61-110)\cdot(1.0055)^{12t}=534.61 \Rightarrow (1.0055)^{12t}=\frac{534.61}{534.61-110}=1.2591$$

Aplicando logaritmos:

$$\ln(1.0055)^{12t}=\ln 1.2591 \Rightarrow 12t\cdot\ln 1.0055=\ln 1.2591 \Rightarrow 12t=42 \Rightarrow \mathbf{t=3.5\ años}$$

32 Compramos a plazos una moto de 6 600 €. ¿Qué capital debemos amortizar semestralmente si el préstamo se realizó por 5 años al 3 % de interés compuesto anual?

33 ¿Cuántos meses se requiere si queremos saldar una deuda de 3000 euros al tipo de interés compuesto anual del 12 % con mensualidades de 266.54 €?

34 Necesitamos 50 000 euros para comprar una vivienda, con un préstamo a 20 años y amortización mensual. El banco A cobra un tipo de interés compuesto anual del 4 %; el banco B un tipo de interés mensual del 0.3 %. ¿En qué banco conviene solicitar el préstamo y cuál es la amortización mensual?

Problemas del capítulo 5

1 Calcula las siguientes potencias:

(A) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$ (B) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (C) $\left(\frac{-1}{5}\right)^0$ (D) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ (E) $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-3}$ (F) $\left(\frac{1}{-5}\right)^{-2}$ (G) $\left(\frac{3}{-4}\right)^{-3}$

2 Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

(A) $\left(2^4\right)^3$ (B) $\left(2^4\right)^{-3}$ (C) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^3$ (D) $\left(-\left(\frac{3^2}{4}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (E) $\left(3^3\cdot 3^4\cdot 3^{-4}\right)^5$ (F) $\left(3^3\cdot 4^3\cdot 2^3\right)^5$

3 Expresa en base 2 las siguientes potencias:

(A) 4^3 (B) 8^4 (C) 4^{100} (D) 4^x (E) 8^x (F) $\left(\sqrt{2}\right)^4$

(G) $\left(\sqrt{2}\right)^5$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x$ (I) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ (J) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (K) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (L) $\left(\frac{1}{4}\right)^x$

4 Expresa en base 4 las siguientes potencias:

(A) 2^4 (B) 2^5 (C) 8^4 (D) 16^x (E) 2^x (F) 8^x

(G) $\left(\sqrt{2}\right)^5$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x$ (I) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ (J) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (K) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (L) 8^{-x}

5 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $2^x = \frac{1}{8}$ (B) $4^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $5^x = 1$ (D) $9^x = 3$ (E) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5}$

(F) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 2$ (G) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (H) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \sqrt[4]{2}$ (I) $16^x = 4$ (J) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $2^{2x} = \frac{1}{8}$ (B) $4^{2x+1} = 2$ (C) $5^{3x-1} = 1$ (D) $3^{x^2} = 9$

(E) $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} = \frac{2}{5}$ (F) $7^{x^2-1} = 1$ (G) $2^{3x-2} = 16$ (H) $4^{2x} = \sqrt{2}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $3^{2x-2} = 9^{1-x}$ (B) $8^{3x^2-5} = 64^{-x}$ (C) $4^{x+7} = 2^{2-x}$ (D) $4^x = 2^x$

(E) $3^{2x-2} = 3\cdot 9^{1-x}$ (F) $4^{x^2+1} = 2^{x^2+5}$ (G) $27^{x+7} = 9^{2-x}$ (H) $4^x = 3^x$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$ (B) $4^{x+2} + 2^{2x+2} = 40$ (C) $9^x - 7\cdot 3^x = 18$

(D) $4 + 3\cdot 2^{4x-1} = 100$ (E) $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0$ (F) $10\cdot 5^{x+2} + 20\cdot 5^{x+3} = 550$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $\frac{450}{10 + 5\cdot 2^x} = 5$ (B) $\frac{150+2\cdot 5^x}{25+3\cdot 5^x} = 2$ (C) $\frac{17 + 2^x}{3 + 2^x} = 5$

(D) $\frac{300}{10 + 5\cdot 2^x} = 6$ (E) $\frac{45}{5+90\cdot 3^x} = 3$ (F) $\frac{5000}{8 + 3\cdot 2^{\frac{x}{10}}} = 25$

10 Calcula el valor exacto de los siguientes logaritmos:

(A) $\log_2 128$ (B) $\log_2 0.5$ (C) $\log_{0.5} 2$ (D) $\log_5 625$ (E) $\log_{64} 4$ (F) $\log 0.1$

(G) $\log_2 1024$ (H) $\log_4 2$ (I) $\log_2 \sqrt[5]{8}$ (J) $\log_5 0.04$ (K) $\log_8 16$ (L) $\log_{1/4} 2$

11 Calcula el valor exacto de los siguientes logaritmos:

(A) $\log 10\,000$ (B) $\log 0.001$ (C) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ (D) $\log_3 \sqrt[5]{9}$ (E) $\log_{1/10} 0.001$ (F) $\ln e^4$

(G) $\ln e^{-3}$ (H) $\log_{1/e} e^{-4}$ (I) $\log_5 5^{-16}$ (J) $\log_5 625^{-2}$ (K) $\log_{1/5} 125$ (L) $\log_a a^2$

12 Obtén el valor de x que verifica las siguientes ecuaciones:

(A) $\log_2 x = 3$ (B) $\log_x 16 = 4$ (C) $\log_5 25 = x$ (D) $\log x = 2\log x$

(E) $\log_3 x = 4$ (F) $\log_x 1000 = 3$ (G) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = x$ (H) $\log x = 1 + 2\log x$

13 Sin utilizar la calculadora, obtén el valor de los siguientes logaritmos:

(A) $\log\sqrt{10^{-3/2}}$ (B) $\log_{1/4} 16^{-4/3}$ (C) $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{27^{-2}}}$ (D) $\ln\left(\sqrt[3]{e}\cdot e^{-7/4}\right)$

14 Con ayuda de las propiedades de los logaritmos, expresa los siguientes logaritmos en función de log2 y/o de log3:

(A) $\log 6$ (B) $\log 12$ (C) $\log 1.5$ (D) $\log 15$ (E) $\log 72$ (F) $\log\sqrt{6}$

(G) $\log 19.2$ (H) $\log 500$ (I) $\log_2 3$ (J) $\log_3 2$ (K) $\log_6 90$

15 Expresa con un único logaritmo, simplificando al máximo:

(A) $2\log 6 - \log 18 + \log\frac{3}{2}$ (B) $\log 24 + \log 6 - 2\log 3 - 3\log 2$.

16 Compara los números $\log_2 5$ y $\log_4 25$.

17 Obtén entre qué números enteros consecutivos se encuentran los siguientes logaritmos:

(A) $\log_{1/2} 150$ (B) $\log_2 150$ (C) $\log_3 150$ (D) $\ln 150$ (E) $\log 150$

18 Establece una adecuada tabla de valores y representa gráficamente las siguientes funciones:

(A) $f(x) = 4^x$ (B) $f(x) = 4^{-x}$ (C) $f(x) = 4^{x+3}$ (D) $f(x) = 4^{-x+3}$

(E) $g(x) = \log_4 x$ (F) $g(x) = \log_{1/4} x$ (G) $g(x) = \log_4(x+2)$ (H) $g(x) = \log_{1/4}(x-2)$

19 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

(A) $10^{2-x} = 0.001$ (B) $4^{x+2} + 2^{2x+2} = 20$ (C) $4^x - 5\cdot 2^{x+2} + 64 = 0$

(D) $9^x - 6\cdot 3^x = 27$ (E) $4^{x+1} + 2^{2x+2} = 2^7$ (F) $3^{2x-3} + 4\cdot 3^{x-2} = -1$

(G) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ (H) $\log_2 x + \log_2 x^2 = 9$ (I) $\log 10^{x+1} + \log 100^{x-1} = 3$

(J) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ (K) $\log(x^2-1) - \log(x-1) = 2$

20 Resuelve los siguientes sistemas:

(A) $\begin{cases}\log x + \log y = 3\\ \log x - \log y = 2\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x - 2y = 4\\ \log_2 x - \log_2 y = 2\end{cases}$ (C) $\begin{cases}\log_5 x - 3\log_5 y = 10\\ -2\log_5 x + 4\log_5 y = 30\end{cases}$

(D) $\begin{cases}x - y = 9\\ \log x + 2\log y = 1\end{cases}$ (E) $\begin{cases}x^2 - y^2 = 12\\ \log_2 x - \log_2 y = 1\end{cases}$ (F) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ 3\log_2 x - 2\log_2 y = 0\end{cases}$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $\dfrac{5000}{8+3\cdot 2^x} = 25$ (B) $\dfrac{50}{1+11\cdot 3^x} = 0.5$ (C) $\dfrac{17+2^x}{3+2^x} = 5$

22 Con ayuda de los logaritmos, resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(A) $10^x = 5$ (B) $9^x = 5$ (C) $2+5\cdot 2^x = 10$ (D) $6+4\cdot 2^{\frac{x+1}{10}} = 90$

(E) $\dfrac{10+2^x}{1+2^x} = 5$ (F) $\dfrac{30}{5+2\cdot 3^x} = 2$ (G) $\dfrac{4-2\cdot 5^x}{2-4\cdot 5^x} = 3$ (H) $\dfrac{12\,000}{1+3\cdot 0.6^{x/15}} = 10000$

23 Durante un determinado período de tiempo el valor de un producto del mercado se puede modelizar con una función exponencial. Inicialmente el producto valía 50 euros y cada 3 meses duplica su valor.

(A) Obtén una función que represente el valor del producto en función del tiempo transcurrido x (en meses).

(B) ¿Cuánto valdrá el producto después de dos años?

(C) ¿Cuándo valdrá el producto 5000 euros?

24 Cierto capital se prestó a interés simple del R % y produjo un rendimiento de 115.50 € en 7 meses. Si, en lugar del R %, el préstamo se hubiera realizado al (R + 2) % hubiera producido 161.70 € de intereses. Calcula el capital y el tanto por ciento al que se prestó.

25 El precio de un producto, al principio de ser comercializado, era de 3 € mientras que 3 meses después su precio era de 6 €:

(A) Obtén la función afín, $y = mx + n$, que se ajusta a los anteriores datos.

(B) Obtén la función cuadrática, $y = ax^2 + b$, que se ajusta a los anteriores datos.

(C) Obtén la función exponencial de la forma $y = Ka^x$ que se ajusta a los anteriores datos.

(D) Obtén el precio del producto, tras un año de ser comercializado, con cada una de las funciones obtenidas.

(E) Obtén el tiempo que ha de pasar para que el precio del producto sea 1000 € con cada una de las funciones.

(F) Representa conjuntamente las gráficas de las tres funciones y compara su crecimiento.

26 Un banco presta a un cliente bajo ciertas condiciones:

(A) Si el banco le presta 6 000 €, a un 3 % de interés compuesto anual, ¿qué cantidad tendrá que devolver transcurridos 5 años? ¿Y transcurridos 10 años?

(B) Si el banco presta al cliente 6 000 €, al 3 % de interés compuesto anual durante 5 años, ¿qué mensualidad tendrá que pagar?

(C) Si el banco presta al cliente 5000 € y 5 años después el cliente devuelve al banco 5 657 €, ¿cuál es el interés compuesto anual?

(D) ¿Cuántos años deben transcurrir para que, al 5 % de interés compuesto anual, un cliente que recibe 5 000 € de préstamo tenga que devolver 10000 €? ¿Y al 4 %?

27 ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto anual hay que colocar un capital para que se triplique en 15 años?

28 ¿Cuántos años tienen que pasar para que un capital, colocado al 10 % de interés compuesto anual, se triplique? ¿Y si el interés es del 5 %?

29 La siguiente función exponencial proporciona el dinero que un cliente recibe de un banco después de t años, cuando invierte en él un capital de 6000 € al interés compuesto anual r, expresado en tanto por uno (por ejemplo, r = 0.05 equivale a un 5 % de interés) y con vencimientos trimestrales:

$$C(t) = 6000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t}.$$

(A) Si el interés fuera del 4 % ¿qué capital tendríamos 10 años después?

(B) ¿Cuál sería el interés anual que después de 10 años proporciona un capital final de 12 000 €?

(C) ¿Cuántos años hay que mantener la inversión al 4 % de interés para obtener al final 12 000 €?

30 La inflación es la pérdida del valor adquisitivo del dinero producida por el paso del tiempo. Con una inflación anual del 5 %, productos que hoy podemos comprar por 1 € costarían 1.05 € un año después, si no se producen incrementos por otros motivos. La expresión que proporciona el precio de un producto, x años después, si la inflación se mantiene constante todos los años y no existen otros incrementos, es la misma que la de variación del capital por interés compuesto, es decir,

$$p(x) = p_0(1 + i)^x$$

donde x se mide en años, p_0 es el precio inicial del producto, i es la inflación en tanto por uno y p(x) es el precio transcurridos x años.

(A) Si un producto cuesta actualmente 20 €, calcula su precio dentro de 10 años, con una inflación del 2 % anual. ¿y si es del 10 % anual?

(B) Si un producto que cuesta 15 € se revalorizará a 40 € transcurridos 15 años, calcula la inflación anual, bajo el supuesto de que es la misma todos los años.

31 Una persona ahorra, cada año, un capital de 5 000 € (es por tanto una anualidad). Si el tipo de interés compuesto anual es del 3 %, halla:

(A) El capital acumulado al cabo de 20 años.

(B) Si al cabo de 12 años acumula 600 000 €, ¿qué cantidad habrá ido anualizando?

32 El número de afectados por una enfermedad depende del tiempo x (en días) transcurrido desde que se detectó con una función exponencial del tipo

$$f(x) = K\cdot a^{\frac{x}{10}}.$$

(A) Obtén el valor de K y de a que se ajusta a los 4000 enfermos que había a los 10 días de detectar la enfermedad y a los 2560 enfermos que quedaban a los 30 días.

(B) ¿Cuántos días han de pasar para que queden 10 enfermos?

33 En una determinada región, la cantidad y de biomasa (medida en kg) por unidad de superficie se puede expresar en función del tiempo x (en años) con una función exponencial del tipo

$$y = 1 + k\cdot a^{\frac{x}{10}},\ \text{con } x \geq 0.$$

(A) Calcula los valores de k y de a para que al principio haya 5 kg de biomasa y a los 20 años haya 2 kg.

(B) ¿Cuántos años tienen pasar para que quede solo 1.25 kg de biomasa?

34 Durante un período de tiempo, en una determinada región, la cantidad de biomasa C (en kg) por unidad de superficie se puede expresar en función del tiempo x (en años) con una función del tipo

$$C(x) = \frac{4}{1+K\cdot a^{x/10}},\ \text{con } x \geq 0.$$

(A) Obtén el valor de K y de a para que a los 10 años haya 1 kg de biomasa y a los 20 años haya 1.6 kg.

(B) ¿Cuántos años tienen que pasar para que la cantidad de biomasa sea de 3 kg?

35 En una determinada población el número de afectados por una enfermedad viene dado por la función

$$E(t) = \frac{100\,000}{1+99e^{-0.125t}},$$

con $t \geq 0$ y correspondiendo $t = 0$ al año 2000.

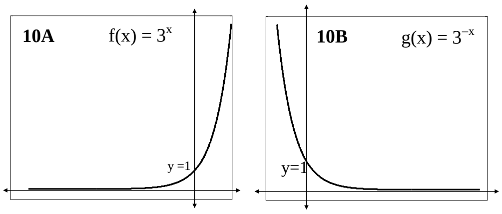
(A) Halla el número de enfermos en 2010.

(B) Halla el tiempo que tardará en triplicarse el número de enfermos existentes en 2000.

Soluciones de las actividades del capítulo 5

1. B = 997.5 €; C_F = 4997.5 €; transcurridos los 5 años y 3 meses. **2.** 5357.14 €. **3.** 3 %. **4.** 100 meses. **5.** 6720 €. **6.** 100 € y 73 € respectivamente. **7.** 1.02 €. **8.** 115798.37 €. **9.** 4.712 %.

10.



11.

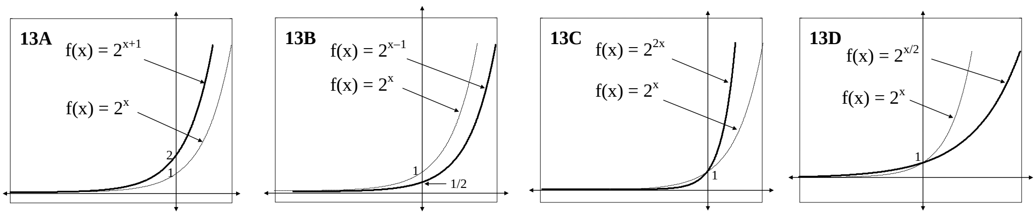
x	10	100	1000	$+\infty$
f(x)	2.59	13780.6	$2.46\cdot10^{41}$	$+\infty$

x	-10	-100	-1000	$-\infty$
f(x)	0.38	0.00007	$4.04\cdot10^{-42}$	**0**

x	10	100	1000	$+\infty$
g(x)	0.34	0.00002	$1.47\cdot10^{-46}$	**0**

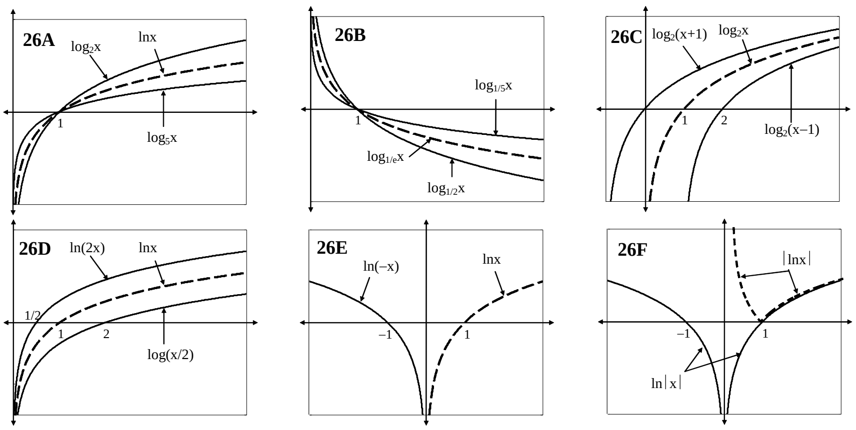
x	-10	-100	-1000	$-\infty$
g(x)	2.87	37648.6	$5.72\cdot10^{45}$	$+\infty$

12. 3e.



14. $f(x) = 2^{3x+4}$. **15.** (A) –1. (B) 1. (C) 9/2. (D) 1. (E) –2. (F) 1. (G) 2. (H) –2. (I) –2. **16.** y = 12000; es el límite superior al que la población mundial tiende (en millones); 11733.4 millones. **17.** k = 5, a = 0.5.

18. $f(x) = \dfrac{250}{1+11.5\cdot0.8^x}$. **19.** (A) 10. (B) 1/2. (C) 3/5. (D) –2. (E) 4/3. (F) –1/2. (G) 4. (H) –3. (I) 2/3. (J) 2/5. (K) 3. (L) 4. (M) –3. (N) 4. (Ñ) –16. (O) –8. (P) –3. (Q) 2. **20.** (A) 4. (B) –6. (C) –5. (D) –4. (E) 3/4. (F) –2/7. **21.** (A) 1.968. (B) –5.644. (C) –2.977. **22.** (A) Falsa: log(10+10) = log20 $\simeq$1.3, y log10 · log10 = 1·1 = 1. (B) Falsa: log(10+10) = log(20) $\simeq$1.3, y $\dfrac{\log 10}{\log 10}$ = 1. (C) Falsa: log(2·10) = log200 $\simeq$ 1.3, y 2log10 = 2. **23.** En 2089. **24.** 7 años; 6.98 años. **25.** (A) 5/2. (B) 101/99. (C) 9/2, 2. (D) 37/11. (E) 1, 3. (F) 62. (G) x = 10, y = 1. (H) x = 100, y = 10. (I) x = y = 10. (J) x = 2, y = 1. (K) x = y =100. (L) No tiene solución. (M) x = –4, y = –2. (N) x = –5, y = –1/3. **26.** (A) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (B) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (C) D_f =]0, +∞[, D_g =]–1, +∞[, D_h =]1, +∞[. (D) $D_f = D_g = D_h$ =]0, +∞[. (E) D_f =]0, +∞[, D_g =]–∞, 0[. (F) $D_f = \mathbb{R}\sim\{0\}$, D_g =]0, +∞[.



27. 6.168 %. **28.** La segunda (TAE = 12.75 % frente a TAE = 12.68 % de la primera). **29.** r_m = 0.004074 %. **30.** 21726.52 €. **31.** 38.63 €. **32.** 715.67 €. **33.** 12 meses. **34.** En el banco B; 292.56 €.

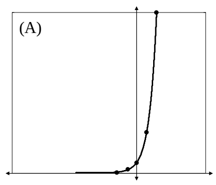
Soluciones de los problemas del capítulo 5

1. $\frac{625}{81}$, $\frac{16}{625}$, 1, $\frac{4}{25}$, $-\frac{125}{8}$, 25, $-\frac{64}{27}$. **2.** 2^{12}, 2^{-12}, $\frac{2^{12}}{3^{6}}$, $-\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$, 3^{15}, $2^{45}\cdot 3^{15}$. **3.** (A) 2^{6}. (B) 2^{12}. (C) 2^{200} (D) 2^{2x}. (E) 2^{3x}. (F) 2^{2}. (G) $2^{5/2}$. (H) $2^{x/2}$. (I) $2^{4/3}$. (J) 2^{-5}. (K) 2^{-x}. (L) 2^{-2x}. **4.** (A) 4^{2}. (B) $4^{5/2}$. (C) 4^{6}. (D) 4^{2x}. (E) $4^{x/2}$. (F) $4^{3x/2}$. (G) $4^{5/4}$. (H) $4^{x/4}$. (I) $4^{2/3}$. (J) 4^{-5}. (K) $4^{-x/2}$. (L) $4^{-3x/2}$. **5.** (A) x = –3. (B) x = –1/4. (C) x = 0. (D) x = 1/2. (E) x = –1. (F) x = –1/3. (G) x = –1. (H) x = 1/2. (I) x = 1/2. (J) x = –2. **6.** (A) x = –3/2. (B) x = –1/4. (C) x = 1/3. (D) x = $\pm\sqrt{2}$. (E) x = –1/3. (F) x = ±1. (G) x = 2. (H) x = 1/8. **7.** (A) x = 1. (B) x = 1, x = –5/3. (C) x = –4. (D) x = 0. (E) x = 5/4. (F) x = $\pm\sqrt{3}$. (G) x = –17/5. (H) x = 0. **8.** (A) x = 5. (B) x = 1/2. (C) x = 2. (D) x = 3/2. (E) x = 2, x = 3. (F) x = –1. **9.** (A) x = 4. (B) x = 2. (C) x = –1. (D) x = 3. (E) x = –2. (F) x = 60. **10.** (A) 7. (B) –1. (C) –1. (D) 4. (E) 1/3. (F) –1. (G) 10. (H) 1/2. (I) 3/5. (J) –2. (K) 4/3. (L) –1/2. **11.** (A) 4. (B) –3. (C) 2/3. (D) 2/5. (E) 3. (F) 4. (G) –3. (H) 4. (I) –16. (J) –8. (K) –3. (L) 2. **12.** (A) x = 8. (B) x = 2. (C) x = 2. (D) x = 1. (E) x = 81. (F) x = 10. (G) x = –2. (H) x = 1/10. **13.** (A) $-\frac{3}{4}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{11}{5}$. (D) $-\frac{17}{12}$.

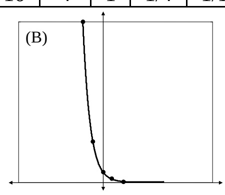
14. (A) log2 + log3. (B) 2log2 + log3. (C) log3 – log2. (D) 1 + log3 – log2. (E) 3log2 + 2log3. (F) $\frac{\log 2-\log 3}{2}$. (G) –1 + 6log2 + log3. (H) 3 – log2. (I) $\frac{\log 3}{\log 2}$. (J) $\frac{\log 2}{\log 3}$. (K) $\frac{1+2\log 3}{\log 2+\log 3}$. **15.** (A) log3. (B) log2. **16.** Son iguales. **17.** (A) –8 y –7. (B) 7 y 8. (C) 4 y 5. (D) 5 y 6. (E) 2 y 3.

18.

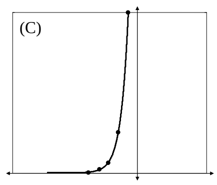
x	–2	–1	0	1	2
y	1/16	1/4	1	4	16



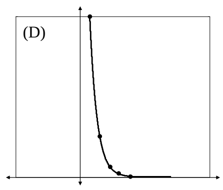
x	–2	–1	0	1	2
y	16	4	1	1/4	1/16



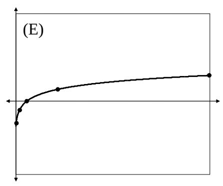
x	–5	–4	–3	–2	–1
y	1/16	1/4	1	4	16



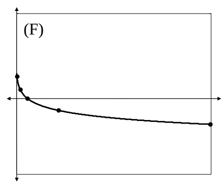
x	1	2	3	4	5
y	16	4	1	1/4	1/16



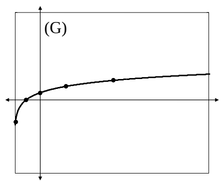
x	1/16	1/4	1	4	16
y	–2	–1	0	1	2



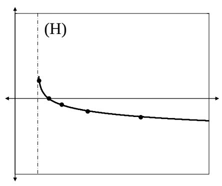
x	1/16	1/4	1	4	16
y	2	1	0	–1	–2



x	–31/16	–1	0	2	6
y	–2	0	1/2	1	3/2



x	33/16	3	4	6	10
y	2	0	–1/2	–1	–3/2



19. (A) 5. (B) 0. (C) 2 y 4. (D) 2. (E) 2. (F) Sin solución. (G) 1. (H) 8. (I) 3/2. (J) 2. (K) 99. **20.** (A) x = $10^{5/2}$, y = $10^{1/2}$. (B) x = 8, y = 2. (C) x = 5^{-65}, y = 5^{-25}. (D) x = 10, y = 1. (E) x = 4, y = 2. (F) x = 4, y = 8.

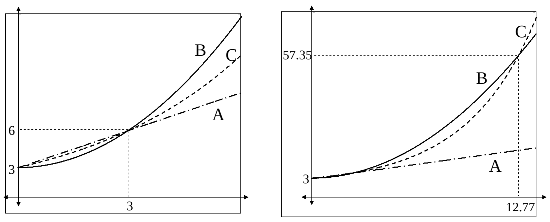
21. (A) 6. (B) 2. (C) –1. **22.** (A) x = log5. (B) x = $\log_9 5$. (C) x = $\log_2 1.6$. (D) x = $10\log_2 21 - 1$.

(E) x = $\log_2 1.25$. (F) x = $\log_3 5$. (G) x = –1. (H) x = –15log15/log0.6. **23.** (A) f(x) = $50 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$. (B) 12800 €.

(C) A los 19.9 meses. **24.** 5 % y 3960 €. **25.** (A) y = x + 3. (B) y = $\dfrac{x^2}{3} + 3$. (C) y = $3 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$. (D) 15, 51 y 48 €.

(E) 997, 54.69 y 25.14 meses.

(F)



26. (A) 6955.64 € y 8063.5 €. (B) 107.81 €. (C) 2.5 %. (C) 14.2 años y 17.67 años. **27.** 7.6 %. **28.** 11.53 años y 22.52 años. **29.** (A) 8933.18 €. (B) 7 %. (C) 17.4 años. **30.** (A) 24.38 € y 51.87 €. (B) 6.75 %.
31. (A) 138382.43 €. (B) 41045.88 €. **32.** (A) K = 5000, a = 0.8. (B) 278.5 días. **33.** (A) k = 4, a = 0.5. (B) 40 años. **34.** (A) K = 6, a = 0.5. (B) 41.7 años. **35.** (A) 3406 enfermos. (B) 8.95 años.

1 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Cálculo de probabilidades y estadística

educàlia editorial

1 BACHILLERATO

MATEMÁTICAS

Aplicadas a las Ciencias Sociales

Cálculo de probabilidades y estadística

educàlia editorial

Primera edición, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprime: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-05-3
Depósito legal: V-3241-2018
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 5

Probabilidad condicionada

5.1 La probabilidad condicionada

Con el concepto de ***probabilidad condicionada*** obtenemos nuevas formas de calcular probabilidades de sucesos. En el capítulo anterior obtuvimos propiedades que permiten hallar la probabilidad de un suceso como **suma** de probabilidades de sucesos más simples; en este capítulo lo haremos como **producto** de probabilidades de sucesos más simples.

Problemas que con la regla de Laplace solucionábamos con esfuerzo podrán ser resueltos por multiplicación de probabilidades de sucesos sencillos pero, además, resolveremos problemas que con dicha regla no podíamos, como son los asociados a espacios muestrales no finitos.

Ejemplo 1

Lanzamos tres veces una moneda anotando los resultados obtenidos en cada lanzamiento. Calculamos la probabilidad de obtener cara en el tercer lanzamiento en los siguientes casos:

(A) Sin más información.

(B) Si sabemos que hemos obtenido un total de dos caras en los tres lanzamientos.

El espacio muestral Ω consta de 8 resultados, las **variaciones con repetición de 2 elementos de orden 3**:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK\}$$

(A) Definimos el suceso A: “cara en el tercer lanzamiento”.

A tiene 4 resultados favorables, aquellos que poseen una C en tercer lugar:

$$A = \{CCC, CKC, KCC, KKC\} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(A)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(B) Definimos el suceso B: “dos caras en los tres lanzamientos”.

Si sabemos que **B se ha verificado, el espacio muestral** Ω **queda reducido** tan solo a los 3 resultados que pertenecen a B, puesto que en ningún caso podría darse otra posibilidad:

$$\mathbf{\Omega^* = B =} \{CCK, CKC, KCC\}$$

Entre ellos, los dos últimos son favorables para A, el suceso A en Ω* es {CKC, KCC}. Así, la probabilidad de A, en el espacio reducido Ω*, es:

$$\mathbf{P^*(A)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

- La probabilidad **P*(A)**, calculada reduciendo el espacio muestral Ω a Ω* = B, recibe el nombre de ***probabilidad de* A *condicionada a* B**, que expresamos por **P(A/B)** y **representa el cociente del número de resultados de A ∩ B entre el número de resultados de B**. Por tanto:

$$P^*(A) = \mathbf{P(A/B)} = \frac{\text{n.º de resultados de } A \cap B}{\text{n.º de resultados de } B}$$

Pero obtenemos el mismo resultado, desde el espacio muestal Ω completo, si efectuamos el cociente entre las probabilidades de A ∩ B y de B

$$\mathbf{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

pues B = {CCK, CKC, KCC} y A ∩ B = {CKC, KCC} y, por tanto, $P(B) = \frac{3}{8}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$.

➢ Concepto de probabilidad condicionada

Consideramos S, espacio de sucesos de un experimento aleatorio y P: S $\to \mathbb{R}$ una función de probabilidad.

Tomamos un suceso fijo $B \in S$, con $P(B) > 0$, que llamaremos ***suceso condicionante***.

Dado un suceso $A \in S$, llamamos ***probabilidad de A condicionada a B***, que representamos por **P(A/B)**, a la expresión:

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

Ejemplo 2

Una persona extrae cartas de una baraja española. Si sabemos que en dos extracciones obtuvo 2 sotas, calcula la probabilidad de que:
(A) Sean la de oros y la de copas.
(B) En una tercera extracción obtenga otra sota.

Calculamos probabilidades condicionadas al suceso B: "en 2 extracciones han salido 2 sotas".

(A) Llamamos A: "en dos extracciones han salido la sota de oros y la de copas".

Queremos la probabilidad de A condicionada a B que obtenemos de dos formas distintas:

- Con la fórmula de la probabilidad condicionada, calculando las probabilidades de $A \cap B$ y de B en el espacio muestral formado por todas las parejas con 2 cartas de las 40 que existentes:

$$\left.\begin{array}{l} P(B) = \dfrac{\text{casos favorables a B}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{6}{780} \\[2em] P(A \cap B) = \dfrac{\text{casos favorables a } A \cap B}{\text{casos posibles}} = \dfrac{1}{\binom{40}{2}} = \dfrac{1}{780} \end{array}\right\} \to P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{780}}{\frac{6}{780}} = \frac{1}{6}$$

- Reduciendo el espacio muestral: Si sabemos que en 2 extracciones se obtuvieron 2 sotas, los únicos casos posibles son las 6 posibles parejas de sotas

$$\Omega^* = \{(S_O, S_C),\ (S_O, S_E),\ (S_O, S_B),\ (S_C, S_E),\ (S_C, S_B),\ (S_E, S_B)\}$$

de los que solo uno es favorable al suceso A, la pareja (S_O, S_C):

$$P(A/B) = P^*(A) = \frac{1}{6}$$

(B) La forma recomendable de calcular la probabilidad de S: "obtener una sota en la tercera extracción" condicionada al suceso B: "en las dos primeras extracciones hemos obtenido 2 sotas" es reduciendo el espacio muestral a 38 cartas, de las que solo hay 2 sotas (las que no han sido extraídas aún):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Casos posibles: 38 (las cartas que quedan)} \\ \text{Casos favorables: 2 (las sotas que quedan)} \end{array}\right\} \to P(S/B) = \frac{2}{38}$$

1 Una persona lanza 3 veces una moneda. Si sabemos que la persona obtuvo exactamente una cara en los 3 lanzamientos, calcula la probabilidad de que dicha cara la obtuviera en el primer lanzamiento:
(A) Con el espacio muestral del experimento, utilizando la definición de probabilidad condicionada.
(B) Con el espacio muestral reducido a los casos en que se obtiene exactamente una cara.
(C) Repite los apartados anteriores si lo que sabemos es que la persona obtuvo alguna cara.

Propiedades de la probabilidad condicionada

No siempre es posible calcular probabilidades condicionadas por reducción del espacio muestral, en ese caso recurrimos a la fórmula general, que verifica los axiomas de Kolmogoroff y las propiedades de las probabilidades, de las que destacamos las siguientes:

P1 Probabilidades condicionadas de los sucesos imposible y seguro:

$$\mathbf{P(\varnothing/B) = 0 \qquad P(\Omega/B) = 1}$$

P2 Probabilidad condicionada del suceso contrario:

$$\mathbf{P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)}$$

P3 Probabilidad condicionada de la unión de dos sucesos incompatibles:

$$\text{si} \quad \mathbf{A \cap B = \varnothing} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)}$$

P4 Probabilidad condicionada de la unión de dos sucesos cualesquiera:

$$\mathbf{P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)}$$

P5 Probabilidad condicionada de la unión de n sucesos incompatibles:

$$\mathbf{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i / B\right)}$$

P6 Si $\mathbf{A \subset B}$ entonces $\mathbf{P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}}$.

Ejemplo 3

Una persona extrae 2 cartas de una baraja española e informa que al menos tiene un as. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases?

Llamamos A: "la persona tiene 2 ases" y B: "la persona tiene al menos un as".

$$\text{Como} \quad A \subset B \quad \rightarrow \quad A \cap B = A \quad \rightarrow \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Ésta es precisamente la demostración de la propiedad P6. Calculamos las probabilidades de A y de B. Llamamos:

A_1: "obtener exactamente un as en 2 extracciones" y A_2: "obtener exactamente 2 ases en 2 extracciones".

$$A = A_2 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780}$$

$$B = A_1 \cup A_2 \quad \rightarrow \quad P(B) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{36}{1}}{\binom{40}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{144}{780} + \frac{6}{780} \quad (\text{pues } A_1 \cap A_2 = \varnothing)$$

$$\text{Por tanto } P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{\frac{6}{780}}{\frac{6}{780} + \frac{144}{780}} = \frac{6}{150} = 0.04 \quad (\text{pues } A \subset B).$$

Ejemplo 4

El 70 % de los estudiantes de un colegio aprobó la asignatura A, el 75 % aprobó la asignatura B, pero solo un 60 % aprobó ambas asignaturas. Contesta a las siguientes cuestiones:

(A) Si una persona aprobó la asignatura A, probabilidad de que también aprobara la B.
(B) Si una persona aprobó la asignatura A, probabilidad de que no aprobara la B.
(C) Si una persona no aprobó la asignatura A, probabilidad de que aprobara la B.
(D) Si una persona aprobó alguna de las dos asignaturas, probabilidad de haber aprobado la A.

Definimos los sucesos:

A: "aprobar la asignatura A", B: "aprobar la asignatura B".

De los datos del enunciado obtenemos:

$$P(A) = \frac{70}{100} = 0.7 \qquad P(B) = \frac{75}{100} = 0.75 \qquad P(A \cap B) = \frac{60}{100} = 0.6$$

(A) La probabilidad que se pide es condicionada: $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.6}{0.7} = \dfrac{6}{7}$.

(B) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{B}$ condicionada al suceso A. Como $\overline{B}$ es el suceso contrario de B:

$$P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

(C) Se pide la probabilidad de B condicionada a $\overline{A}$:

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2}$$

pues $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$ y $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0.75 - 0.6 = 0.15$.

(D) Se pide la probabilidad de A condicionada al suceso $A \cup B$. Como $A \subset A \cup B$, por la propiedad P6

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.7}{0.85} = \frac{14}{17}$$

pues $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.75 - 0.6 = 0.85$.

2 Contesta a las siguientes preguntas relacionadas también con el ejemplo 4:
(A) Si una persona aprobó la asignatura A, probabilidad de haber aprobado alguna de las 2 asignaturas.
(B) Si una persona no aprobó la asignatura B, probabilidad de que tampoco hubiera aprobado la A.
(C) Si una persona aprobó alguna de las dos asignaturas, probabilidad de haber aprobado ambas.

3 Volvemos al ejemplo 3. Si la persona que extrae 2 cartas de la baraja, en lugar de decirnos que tiene por lo menos un as, nos enseña una de las cartas, que resulta ser el as de oros, ¿cuál sería la probabilidad de que la otra carta fuera también un oro?

4 Si al elegir una carta de una baraja española obtenemos una figura, ¿cuál es la probabilidad (que obviamente es condicionada) de que sea una carta de copas? ¿Y de que sea una sota? ¿Y de que sea una carta de copas o una sota? ¿Y de que sea la sota de copas?

5 Elegimos una carta de una baraja española, que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de elegir otra y que sea otro as? ¿Y de que no lo sea?

6 Al elegir 5 cartas de una baraja española obtenemos 3 ases. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una carta más, ésta sea el as que queda?

7 Una urna tiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Extraemos 2 bolas que resultan ser de colores distintos. Calcula la probabilidad de extraer otras 2 bolas del mismo color.

5.2 Independencia estadística

En los ejemplos anteriores hemos visto que la probabilidad de un suceso A puede cambiar al introducir la información que proporciona la verificación de otro suceso B y se calcula con la probabilidad condicionada. Si esto ocurre es que B influye de alguna forma en A. Esta situación origina un concepto muy importante que es el de ***independencia estadística***.

- Decimos que el suceso **B** ***favorece*** al suceso **A** si **P(A/B) > P(A)**.
- Decimos que el suceso **B** ***desfavorece*** al suceso **A** si **P(A/B) < P(A)**.

En ambos casos diremos que **A y B** son ***dependientes***.

En cambio, decimos que dos sucesos A y B son ***independientes*** si sus probabilidades condicionadas son iguales a sus propias probabilidades:

$$\textbf{A y B son } \textbf{\textit{independientes}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P(A/B) = P(A)} \text{ y } \mathbf{P(B/A) = P(B)}$$

Caracterización de independencia para dos sucesos

$$\textbf{A y B son independientes} \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Según la definición de probabilidad condicionada $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, así:

$$\textbf{A y B son independientes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A/B) = P(A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Ejemplo 5

Tenemos una baraja española y cogemos una carta. Estudiamos la dependencia o independencia de los sucesos

R: "la carta es un rey", F: "la carta es una figura", C: "la carta es una copa".

$P(R) = \dfrac{4}{40} = 0.1$ y $P(R/F) = \dfrac{4}{12} = 0.\widehat{3}$. Como $P(R/F) > P(R)$ $\rightarrow$ F favorece a R.

$P(R) = \dfrac{4}{40} = 0.1$ y $P(R/C) = \dfrac{1}{10} = 0.1$. Como $P(R/C) = P(R)$ $\rightarrow$ C ni favorece ni desfavorece a R.

Por tanto los sucesos **R** y **C son independientes**, mientras que los sucesos **R** y **F son dependientes**.

8 Calcula, en el ejemplo 5, las probabilidades condicionadas necesarias para comprobar que:
(A) R favorece a F. (B) F y C son independientes.

9 En el ejemplo 5, utiliza la caracterización de independencia para comprobar que:
(A) R y C son independientes porque $P(R \cap C) = P(R) \cdot P(C)$.
(B) R y F son dependientes porque $P(R \cap F) \neq P(R) \cdot P(F)$.
(C) F y C son dependientes porque $P(F \cap C) \neq P(R) \cdot P(F)$.

10 Lanzamos un dado. Comprueba la independencia de los sucesos A: "salir un número par", B:"salir un número impar" y C: "salir un número menor que 3".

➢ Independencia estadística para más de dos sucesos

La definición de independencia para más de dos sucesos se generaliza a partir del caso de dos de la siguiente forma:

Los sucesos A_1, A_2, ..., A_n son ***independientes*** si y solo si para cualquier subconjunto de los anteriores sucesos la probabilidad de la intersección es el producto de probabilidades.

La anterior definición se expresa, para 3 sucesos, del siguiente modo:

Los sucesos A, B y C son *independientes* si y solo si:

(1) $\mathbf{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$, $\mathbf{P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C)}$, $\mathbf{P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)}$.

(2) $\mathbf{P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)}$

En el caso que solo se verifique (1) decimos que los sucesos son ***independientes 2 a 2***.

Ejemplo 6

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar 3 veces una moneda; veamos que los siguientes sucesos son independientes:

C_i: "obtener cara en el lanzamiento i-ésimo", para i = 1, 2, 3.

El espacio muestral contiene 8 resultados, los que se pueden dar al lanzar 3 veces una moneda:

$$\Omega = \{KKK\ \ CKK\ \ KCK\ \ KKC\ \ CCK\ \ CKC\ \ KCK\ \ CCC\}$$

- Veamos que C_1 y C_2 son independientes:

$$C_1 = \{CKK\ \ CCK\ \ CKC\ \ CCC\} \qquad C_2 = \{KCK\ \ CCK\ \ KCK\ \ CCC\} \qquad C_1\cap C_2 = \{CCK\ \ CCC\}$$

Por tanto $P(C_1) = P(C_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ y $P(C_1\cap C_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Como $\mathbf{P(C_1\cap C_2)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{P(C_1)\cdot P(C_2)}$, obtenemos que $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ **son independientes**.

De la misma forma podemos ver que también lo son C_1 con C_3 y C_2 con C_3, con lo que los 3 sucesos son independientes 2 a 2.

- Veamos ahora que la probabilidad de la intersección de los 3 es el producto de probabilidades:

$$C_1\cap C_2\cap C_3 = \{CCC\} \quad\rightarrow\quad \mathbf{P(C_1\cap C_2\cap C_3)} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{P(C_1)\cdot P(C_2)\cdot P(C_3)}$$

Por tanto, los 3 sucesos son independientes.

11 Un tetraedro tiene una de sus 4 caras pintada de color blanco, otra de color verde, otra de color rojo y la cuarta pintada con los 3 colores. Elige una cara al azar. Comprueba que los siguientes sucesos son independientes 2 a 2 pero no lo son globalmente:

B: "la cara tiene color blanco", V: "la cara tiene color verde", R: "la cara tiene color rojo".

Comprueba para ello que:

$P(B\cap V) = P(B)\cdot P(V)$, $P(B\cap R) = P(B)\cdot P(R)$, $P(V\cap R) = P(V)\cdot P(R)$, $P(B\cap V\cap R) \neq P(B)\cdot P(V)\cdot P(R)$

12 Si los sucesos A, B y C son independientes, con probabilidades respectivas de 0.5, 0.8 y 0.9, calcula:

(A) $P(A\cap B)$ (B) $P(A\cap C)$ (C) $P(B\cap C)$ (D) $P(A\cap B\cap C)$ (E) $P(A\cup B)$

5.3 Multiplicación de probabilidades

De la caracterización de independencia deducimos que, si disponemos de un conjunto de sucesos **independientes**, la probabilidad de la intersección de cualquier número de ellos es igual al **producto** de las probabilidades respectivas.

> Si los sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ son ***independientes***, entonces:
>
> $$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)}$$

El siguiente teorema permite calcular la probabilidad de la intersección de sucesos cualesquiera como **producto de probabilidades condicionadas**. Dichas probabilidades condicionadas deben calcularse mediante reducción del espacio muestral correspondiente. Expresamos el teorema para dos sucesos, para tres, y la forma general para n sucesos:

➢ Teorema de la multiplicidad

> **Para dos sucesos:** si A_1 y A_2 son dos sucesos cualesquiera, con $P(A_1) > 0$, se tiene:
>
> $$\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)}$$
>
> **Para tres sucesos:** si A_1, A_2 y A_3 son tres sucesos cualesquiera, con $P(A_1 \cap A_2) > 0$:
>
> $$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)}$$
>
> **Para n sucesos:** si $A_1, A_2, ..., A_n$ son sucesos cualesquiera, con $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$:
>
> $$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Demostramos el teorema para 2 y para 3 sucesos. El caso general sigue un proceso similar.

- **Para 2 sucesos:** suponemos A_1 y A_2 dos sucesos, con $P(A_1) > 0$.

  Por definición de probabilidad condicionada: $P(A_2/A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$.

  Y multiplicando en cruz: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

- **Para 3 sucesos:** suponemos A_1, A_2 y A_3 tres sucesos, con $P(A_1 \cap A_2) > 0$.
  Llamamos $A = A_1 \cap A_2$, tenemos que $P(A) > 0$, y como ya se verifica para cualesquiera dos sucesos, son ciertas las siguientes afirmaciones:

  $$P(A \cap A_3) = P(A) \cdot P(A_3/A) \qquad (1)$$

  $$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \quad \rightarrow \quad P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \qquad (2)$$

  Sustituyendo (2) en (1): $P(A \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A)$ (3)

  Y como $A = A_1 \cap A_2$, sustituyendo en (3) obtenemos:

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

➢ Observa que el teorema de la multiplicidad es válido para todo tipo de sucesos, sean dependientes o independientes. En el caso en que los sucesos son independientes, las probabilidades condicionadas son iguales que las probabilidades libres de condiciones y la expresión general

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

se transforma en $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$.

➢ Experimentos basados en la repetición de pruebas

Son muchos los experimentos aleatorios que consisten en la realización de pruebas sucesivas, cada una de las cuales puede ser considerada como un experimento aleatorio por separado. Es, por ejemplo, el caso del lanzamiento repetidamente de una moneda o de un dado, las extracciones de bolas de una caja, la repetición de un determinado experimento hasta obtener el resultado deseado, etc. El teorema de la multiplicidad permite calcular probabilidades de sucesos en este tipo de experimentos por multiplicación de probabilidades de sucesos más simples. Los siguientes ejemplos ayudan a comprenderlo.

Ejemplo 7

Tenemos tres urnas U_1, U_2 y U_3 con las siguientes composiciones: U_1 tiene 6 bolas azules y 4 rojas, U_2 tiene 5 azules y 5 rojas y U_3 tiene 4 azules y 3 rojas. Extraemos una bola de cada urna y calculamos las probabilidades de:

(A) A: “las 3 bolas extraídas son azules”.

(B) B: “las 2 primeras bolas extraídas son rojas y la tercera es azul”.

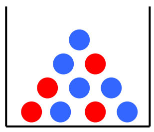
Definimos los siguientes sucesos:

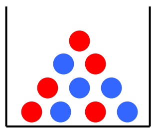
A_i: “obtenemos una bola azul de la urna U_i”.

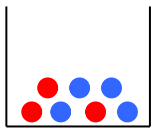
R_i: “obtenemos una bola roja de la urna U_i”, para $i = 1, 2, 3$.

La extracción de una bola de cada una de las 3 urnas es un experimento aleatorio que se descompone en 3 experimentos más simples, que son cada una de las extracciones.

Las probabilidades de obtener una bola azul o una roja en cada extracción son sencillas de calcular:







Prueba 1:
Extraer una bola de la urna 1.
$P(A_1) = \frac{6}{10}$ $P(R_1) = \frac{4}{10}$

Prueba 2:
Extraer una bola de la urna 2.
$P(A_2) = \frac{5}{10}$ $P(R_2) = \frac{5}{10}$

Prueba 3:
Extraer una bola de la urna 3.
$P(A_3) = \frac{4}{7}$ $P(R_3) = \frac{3}{7}$

(A) El suceso A se puede expresar:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Como no hay ninguna relación entre los resultados que obtenemos en las 3 pruebas, los sucesos A_1, A_2 y A_3 son **independientes**:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{7}$$

(B) Del mismo modo B se expresa como:

$$B = R_1 \cap R_2 \cap A_3$$

Los sucesos de la anterior intersección son también independientes, por ser de pruebas no relacionadas:

$$P(B) = P(R_1 \cap R_2 \cap A_3) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(A_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{7}$$

13 Tenemos una caja con 3 bolas negras y 5 blancas y otra caja con 4 bolas negras y 6 blancas. Cogemos una bola de cada caja. Calcula las siguientes probabilidades:

(A) De que las dos bolas sean blancas. (B) De que las dos bolas sean negras.

14 Si las bolas de las 2 cajas de la actividad 13 las reunimos en una caja única y extraemos 2 bolas, calcula:

(A) La probabilidad de obtener 2 bolas blancas. (B) La de obtener 2 bolas negras.

Ejemplo 8

Consideramos el siguiente experimento: extraemos bolas una a una ***sin reemplazamiento*** de una urna que contiene 6 bolas azules y 4 rojas. Calculamos las siguientes probabilidades:

(A) De obtener con tres extracciones, y en ese orden, una bola azul, otra roja y otra azul.

(B) De obtener con cuatro extracciones, y en este orden, bola azul, roja, azul y roja.

Definimos los sucesos:

A_i: "obtener una bola azul en la extracción i-ésima",

R_i: "obtener una bola roja en la extracción i-ésima".

(A) La probabilidad que queremos calcular es la de la intersección de sucesos $A_1 \cap R_2 \cap A_3$.

El experimento consiste en la realización de 3 pruebas, que en este caso están relacionadas entre sí pues cada vez que extraemos una bola, la urna queda con una composición diferente para la siguiente extracción. Es por ello que los sucesos de la anterior intersección son **dependientes**.

Con el **teorema de la multiplicidad**, calculamos la probabilidad:

$$P(A_1 \cap R_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap R_2)$$

En la primera prueba (urna con 6 bolas blancas y 4 negras) la probabilidad de obtener una bola azul será:

$$P(A_1) = \frac{6}{10}$$

Si en la primera extracción hemos obtenido una bola azul para la segunda extracción quedan 5 bolas azules y 4 rojas (reducimos el espacio muestral) y, por tanto, la probabilidad de obtener una bola roja será:

$$P(R_2/A_1) = \frac{4}{9}$$

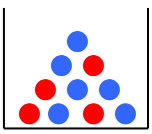
Si en las primeras dos extracciones hemos obtenido bola azul y roja, respectivamente, entonces para la tercera extracción quedan 5 bolas azules y 3 rojas y la probabilidad de obtener bola azul ahora es:

$$P(A_3/A_1 \cap R_2) = \frac{5}{8}$$

Así $P(A_1 \cap R_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap R_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$.

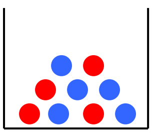
(B) Consideramos la nueva situación:

Prueba 1



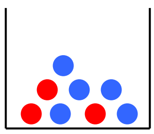
$P(A_1) = \frac{6}{10}$

Prueba 2



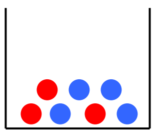
$P(R_2/A_1) = \frac{4}{9}$

Prueba 3



$P(A_3/A_1 \cap R_2) = \frac{5}{8}$

Prueba 4



$P(R_4/A_1 \cap R_2 \cap A_3) = \frac{3}{7}$

De nuevo, con el **teorema de la multiplicidad**, obtenemos como probabilidad de la intersección el producto de las probabilidades condicionadas:

$$P(A_1 \cap R_2 \cap A_3 \cap R_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$$

15 Calcula las probabilidades de los sucesos del ejemplo anterior en el caso en que las extracciones sean con reemplazamiento.

16 Extraemos una a una, y sin reemplazamiento, **todas** las bolas que hay en una caja que contiene 5 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcula la probabilidad de que, en las 10 extracciones, no repitamos color en dos extracciones sucesivas.

Ejemplo 9

Un examen versa sobre 3 asignaturas que contienen 10, 8 y 7 temas respectivamente. Un estudiante se prepara 4 temas de cada asignatura. El ejercicio consiste en elegir al azar un tema de cada asignatura y responder correctamente. Calcula las probabilidades de:

(A) Aprobar las 3 asignaturas.
(B) No aprobar ninguna asignatura.
(C) Aprobar alguna asignatura.
(D) Aprobar una de las 3 asignaturas.

El estudiante aprueba la asignatura A si elige uno entre los 4 temas que se ha preparado y suspende si elige uno entre los no preparados. Lo mismo sucede en las otras dos asignaturas. Definimos los sucesos:

A: "aprobar la asignatura A", B: "aprobar la asignatura B", C: "aprobar la asignatura C".

$$P(A) = \frac{4}{10} \qquad P(\overline{A}) = \frac{6}{10} \qquad P(B) = \frac{4}{8} \qquad P(\overline{B}) = \frac{4}{8} \qquad P(C) = \frac{4}{7} \qquad P(\overline{C}) = \frac{3}{7}$$

(A) Aprobar las 3 asignaturas es el suceso $A \cap B \cap C$.

El experimento aleatorio consta de 3 **pruebas independientes** porque una prueba no influye en la otra. Tenemos asegurado de antemano que los sucesos A, B y C son **independientes**. Por ello:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$

(B) Suspender las 3 asignaturas es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{70}$$

(C) Aprobar alguna asignatura es el suceso $A \cup B \cup C$, que es contrario de no aprobar ninguna asignatura:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - \frac{9}{70} = \frac{61}{70}$$

(D) Aprobar una asignatura es el suceso $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
Por ser la unión de sucesos incompatibles, la probabilidad deseada es la suma de ellas:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{27}{70}$$

17 Un llavero consta de 10 llaves indistinguibles, de las que solo una abre una puerta. Vamos probando las llaves y eliminando las que no abren, hasta conseguir abrir la puerta. Calcula la probabilidad de abrir:
(A) En el segundo intento. (B) En el tercer intento. (C) En el cuarto intento.

18 Extraemos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener, en este orden, una sota, un caballo y un rey, en los siguientes casos:
(A) Las extracciones son sin reemplazo. (B) Las extracciones son con reemplazo.

19 Dos jugadores de baloncesto tienen el siguiente porcentaje de efectividad al lanzar a canasta: el jugador A tiene el 40 % y el jugador B el 70 %. Cada uno lanza a canasta una vez. Calcula las siguientes probabilidades:
(A) De que A gane a B. (B) De que B gane a A. (C) De que A y B empaten.

20 El jugador A lanza un dado que tiene 2 caras con el número 1 y 4 caras con el número 2. El jugador B lanza un dado que tiene 3 caras con el número 1 y 3 caras con el número 2. Gana el jugador que obtenga el número mayor. Calcula la probabilidad de que:
(A) A gane a B. (B) B gane a A. (C) A y B empaten.

21 Calcula la probabilidad de ser necesarios 5 lanzamientos de una moneda para obtener por primera vez cara.

22 En un autobús viaja una única persona, con probabilidad p de bajar en la próxima parada, en la que espera otra persona, con probabilidad q de subir al autobús. Calcula la probabilidad de que, tras la próxima parada, en el autobús viajen:
(A) Ninguna de las 2 personas. (B) Las dos personas. (C) Una de ellas.

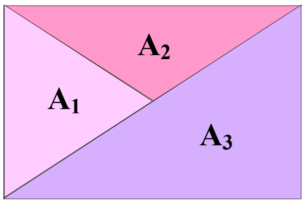
5.4 El teorema de la probabilidad total

Ejemplo 10

En una ciudad hay 12 farmacias, de las cuales 2 abren las 24 horas del día, 4 abren 12 horas y las restantes abren 8 horas. Una persona se dirige a una farmacia. Calculamos la probabilidad de que la encuentre abierta.

Tenemos las farmacias clasificadas en tres tipos; definimos los sucesos:

- A_1: "La farmacia abre las 24 horas del día" $\rightarrow$ $P(A_1) = \frac{2}{12}$
- A_2: "La farmacia abre 12 horas al día" $\rightarrow$ $P(A_2) = \frac{4}{12}$
- A_3: "La farmacia abre 8 horas al día" $\rightarrow$ $P(A_3) = \frac{6}{12}$



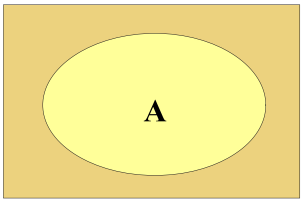
Obviamente, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y también $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$.

Definimos el suceso A: "la farmacia elegida por la persona está abierta"**.**

Queremos calcular la probabilidad de A, pero solo conocemos la probabilidad de A referida a cada clase de farmacia. Son probabilidades condicionadas:

- Si la farmacia abre las 24 horas del día, la probabilidad de encontrarla abierta es $P(A/A_1) = 1$.
- Si la farmacia abre 12 horas del día, la probabilidad de encontrarla abierta $P(A/A_2) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.
- Si la farmacia abre 8 horas del día, la probabilidad de encontrarla abierta $P(A/A_3) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Son probabilidades de A condicionadas a cada tipo de farmacia. Pero, ¿cuál es la ***probabilidad total*** P(A) de encontrar abierta la farmacia elegida? Como veremos, es **la suma** de las anteriores probabilidades condicionadas, previamente multiplicadas por las probabilidades de cada suceso condicionado.

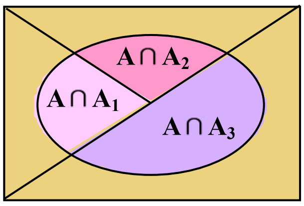


A la vista del dibujo 1, el espacio muestral queda dividido en 3 sucesos A_1, A_2, y A_3, que son incompatibles 2 a 2. Se dice que forman un ***sistema completo de sucesos***:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

siendo

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing \text{ y } A_2 \cap A_3 = \varnothing$$



También vemos en el último dibujo que la ***probabilidad total*** de A es la suma de las ***probabilidades parciales*** de los sucesos $A \cap A_1$, $A \cap A_2$ y $A \cap A_3$:

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

Por tanto

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) \qquad (1)$$

Pero por el **teorema de la multiplicidad**, las probabilidades de las anteriores intersecciones son:

$$P(A \cap A_1) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) \qquad P(A \cap A_2) = P(A/A_2) \cdot P(A_2) \qquad P(A \cap A_3) = P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

Así la ecuación (1) queda de la forma siguiente, que es conocida como ***teorema de la probabilidad total***:

$$\mathbf{P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)}$$

que en nuestro caso resulta:

$$\mathbf{P(A) = 1 \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}}$$

➢ Sistema completo de sucesos

Decimos que los sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ forman un ***sistema completo de sucesos de Ω*** si:

(1) **Son incompatibles dos a dos**: $\mathbf{A_i \cap A_j = \varnothing}$, para **i, j = 1, 2, ..., n**, con $\mathbf{i \neq j}$.

(2) **La unión de todos ellos es Ω**: $\mathbf{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega}$.

También decimos que los anteriores sucesos constituyen una ***partición* de Ω**. Se verifica que

$$\mathbf{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$$

➢ Teorema de la probabilidad total

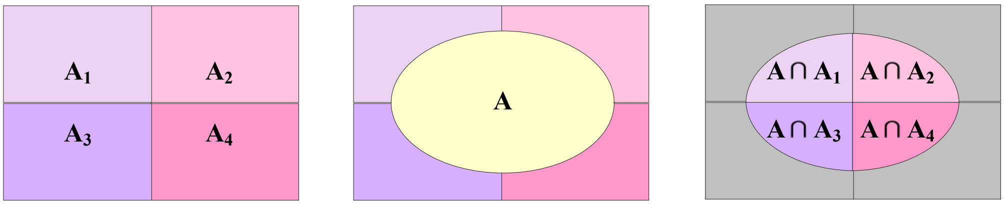
Si $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ es un sistema completo de sucesos y A un suceso cualquiera, entonces:

$$\mathbf{P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(A/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Abreviadamente, con sumatorios:

$$\mathbf{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \cdot P(A_i)}$$

La demostración es igual a la realizada en el ejemplo anterior. La realizamos para un sistema completo de 4 sucesos A_1, A_2, A_3 y A_4:



Partición de Ω **Partición de A**

A la vista de los anteriores dibujos, $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3) \cup (A \cap A_4)$. Por tanto

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) + P(A \cap A_4) \qquad (1)$$

Por el **teorema de la multiplicidad**, las probabilidades de las anteriores intersecciones son los productos

$$P(A \cap A_i) = P(A/A_i) \cdot P(A_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Sustituimos estos resultados en (1) y obtenemos:

$$\mathbf{P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3) + P(A/A_4) \cdot P(A_4)}$$

23 En el ejemplo 10, calcula la probabilidad total del suceso B: “la farmacia elegida por la persona está cerrada”. Hazlo siguiendo el esquema del referido ejemplo.

24 Tenemos dos cajas, una con 3 bolas blancas y 2 negras, la otra con 5 bolas blancas y 2 negras. Elegimos al azar una caja y de ella una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca.

25 Un fabricante tiene dos máquinas A y B. La máquina A trabaja 16 horas diarias y produce un 3 % de artículos defectuosos mientras que la máquina B trabaja las 8 horas restantes del día produciendo un 6 % de artículos defectuosos. Elegimos al azar un artículo de la producción diaria. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? Se supone que las máquinas producen la misma cantidad de artículos en el mismo tiempo.

26 El congreso de los diputados de un país tiene 100 diputados del partido A, 60 del B y 40 del C. Supongamos que el porcentaje de diputados que votan lo que su partido les recomienda es el 80 % para el partido A, el 90 % para el B y el 60 % para el C. Para la votación de una determinada ley, el partido A es favorable, mientras que los partidos B y C son contrarios. ¿Qué porcentaje de diputados votaría a favor de la ley?

Ejemplo 11

Un examen tipo test consta de una serie de preguntas, cada una de ellas con 4 alternativas, de las que solo una es correcta. Un estudiante conoce la respuesta del 75 % de las preguntas del test y decide responder al azar las preguntas cuya respuesta desconoce.
¿Qué probabilidad tiene de responder correctamente una pregunta determinada?

Clasificamos las preguntas del test en dos categorías: aquellas cuya respuesta el alumno conoce y aquellas que no. Definimos los sucesos:

A: "el alumno conoce la respuesta de la pregunta elegida",
B: "el alumno desconoce la respuesta de la pregunta elegida".

- Los sucesos A y B constituyen un **sistema completo de sucesos** pues son disjuntos y su unión es Ω (la pregunta elegida o es de respuesta conocida o no lo es)

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{y} \quad A \cup B = \Omega$$

  Como conoce la respuesta del 75 % de las preguntas, las probabilidades de A y B son:

$$P(A) = \frac{75}{100} \qquad P(B) = \frac{25}{100}$$

- **Definimos el suceso C: "el alumno responde correctamente a la pregunta elegida".**

  Si conoce la respuesta responde correctamente con probabilidad 1:

$$P(C/A) = 1$$

  Si no conoce la respuesta responde al azar y, como hay 4 alternativas por pregunta, responde correctamente con probabilidad

$$P(C/B) = \frac{1}{4}$$

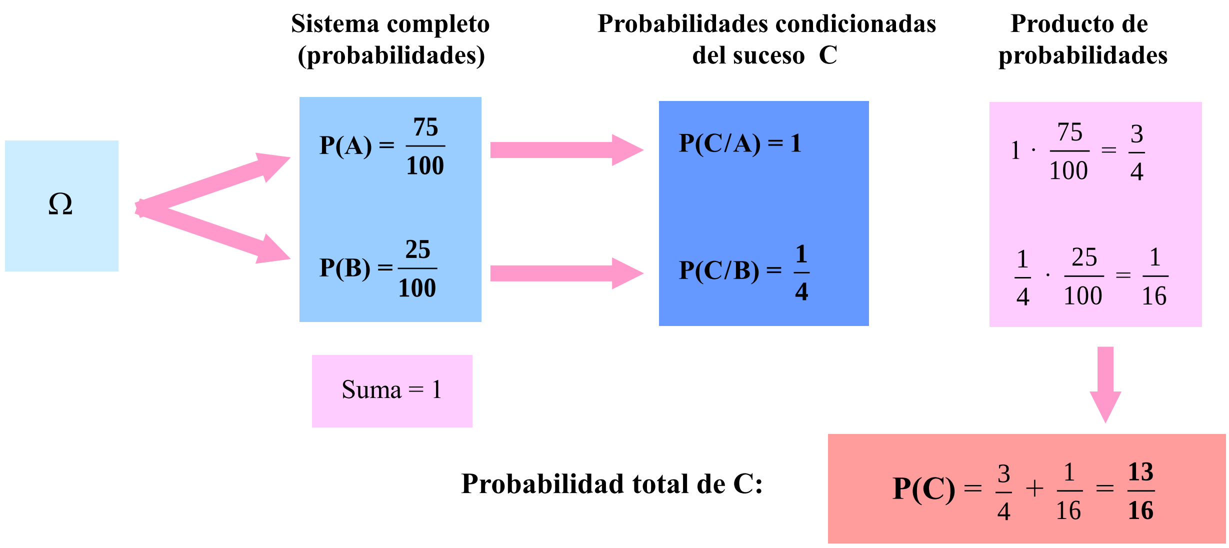
- Queremos calcular la **probabilidad total de C**, pero lo único que sabemos es dicha probabilidad referida a cada clase de pregunta, las probabilidades parciales.

  Como los sucesos A y B son una **partición de Ω**, entonces $C \cap A$ y $C \cap B$ forman una **partición de C**:

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \rightarrow \quad P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

  Con el **teorema de la probabilidad total**, la probabilidad de responder correctamente la pregunta elegida es:

$$\mathbf{P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) = 1 \cdot \frac{75}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{100} = \frac{13}{16}}$$



Ejemplo 12

Un saco contiene 3 monedas de uso legal y una moneda trucada con 2 caras. Elegimos al azar una moneda y la lanzamos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?

Definimos los siguientes sucesos:

A: "la moneda elegida es normal", B: "la moneda elegida tiene dos caras".

- Los sucesos A y B constituyen un **sistema completo de sucesos**, pues son disjuntos y su unión es Ω (la moneda elegida o es normal o tiene dos caras)

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{y} \quad A \cup B = \Omega$$

  Como hay 3 monedas normales y una con dos caras, las probabilidades de A y B son:

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{4}$$

- **Definimos el suceso C: "obtener cara con la moneda elegida"**.

  Si la moneda elegida es normal, la probabilidad de obtener cara es $P(C/A) = \frac{1}{2}$.

  Si la moneda elegida tiene 2 caras, la probabilidad de obtener cara es $P(C/B) = 1$.

- Queremos calcular la **probabilidad total de C**, pero lo único que sabemos es dicha probabilidad referida a cada una de las clases de monedas, las probabilidades parciales.

  Como los sucesos A y B son una **partición de Ω**, entonces $C \cap A$ y $C \cap B$ forman una **partición de C**:

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \rightarrow \quad P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

  Con el **teorema de la probabilidad total**, la probabilidad de obtener cara es:

$$\mathbf{P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}}$$

El resultado obtenido es explicable fácilmente **a posteriori**: Si disponemos de 3 monedas con una cara y una cruz, más una moneda con dos caras, entonces podemos considerar que tenemos un espacio muestral con 8 elementos, de los que 5 son favorables (las 5 caras que en total hay en las 4 monedas) y 3 desfavorables (las 3 cruces), por lo que la probabilidad de obtener una cara es:

$$\Omega = \{C_1 \; K_1 \; C_2 \; K_2 \; C_3 \; K_3 \; C_4 \; C_5\} \quad \rightarrow \quad P(C) = \frac{5}{8}$$

En el gráfico de la derecha, llamamos C_4 y C_5 a las dos caras de la moneda trucada.

K_1	**K_2**	**K_3**	**C_4**
C_1	**C_2**	**C_3**	**C_5**

27 Tenemos tres urnas con bolas blancas y negras en las siguientes cantidades:

U_1 (4 blancas, 6 negras) U_2 (5 blancas, 5 negras) U_3 (6 blancas, 4 negras)

(A) Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca.
(B) Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas. Calcula la probabilidad de que sean blancas

28 Un banco trabaja en 3 regiones de un país, A, B y C. El 50 % de las operaciones las realiza en A, el 40 % en B y el 10 % en C. Estimamos que en A el 1 % de los clientes es moroso mientras que en B lo es el 2 % y en C el 8 %. ¿Cuál es el porcentaje global de clientes morosos?

29 En cada bolsillo de mi pantalón tengo tres bolas, dos blancas y una negra. Saco una bola de cada bolsillo y la introduzco en el otro. A continuación saco una bola del primer bolsillo. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

5.5 El teorema de Bayes

Ejemplo 13

Volvamos a la situación del ejemplo 10: una ciudad con 12 farmacias, de las que 2 abren las 24 horas del día, 4 abren 12 horas y las restantes abren 8 horas. Si una persona va a una farmacia y la encuentra abierta, ¿cuál es la probabilidad de que dicha farmacia abra solo 8 horas?

Recordemos los sucesos definidos en dicho ejemplo y sus probabilidades:

A_1: "la farmacia abre las 24 horas del día".
A_2: "la farmacia abre 12 horas al día".
A_3: "la farmacia abre 8 horas al día".
A: "la farmacia elegida está abierta".

Sin más información, la probabilidad de elegir una farmacia que abre solo 8 horas es:

$$P(A_3) = \frac{6}{12}$$

Pero en nuestro caso tenemos la información adicional de que la farmacia elegida por la persona estaba abierta, por lo que no es esa probabilidad la deseada, sino la probabilidad de A_3, condicionada al suceso A: "la farmacia elegida está abierta". Se calcula:

$$P(A_3/A) = \frac{P(A \cap A_3)}{P(A)} \qquad (1)$$

La probabilidad P(A) fue calculada en el ejemplo 10 con la ayuda del **teorema de la probabilidad total**:

$$P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

y la probabilidad $P(A \cap A_3)$ no es más que el tercer sumando anterior:

$$P(A \cap A_3) = P(A/A_3) \cdot P(A_3)$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (1), obtenemos:

$$\mathbf{P(A_3/A)} = \frac{\mathbf{P(A/A_3) \cdot P(A_3)}}{\mathbf{P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P(A_3)}} \qquad (2)$$

Sustituimos todas las probabilidades ya obtenidas en el ejemplo 10:

$$\mathbf{P(A_3/A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12}}{1 \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{12}} = \frac{1}{3}$$

- La expresión (2), obtenida en el anterior ejemplo, permite calcular $\mathbf{P(A_3/A)}$**,** probabilidad condicionada, llamada ***probabilidad a posteriori*** de A_3, frente a la ***probabilidad a priori*** $\mathbf{P(A_3)}$, en el caso en que dispongamos de un **sistema completo de 3 sucesos A_1, A_2 y A_3** y conozcamos las probabilidades de A condicionadas a dichos sucesos junto a las probabilidades de dichos sucesos. Para el cálculo de $P(A_3/A)$ hemos utilizado la **definición de probabilidad condicionada** en (1) y el **teorema de la probabilidad total**.

  A continuación enunciamos en general esta forma de cálculo de ***probabilidades a posteriori***, que se llama **teorema de Bayes**.

30 Si la persona del ejemplo anterior encuentra abierta la farmacia a la que va, calcula las probabilidades de que:
(A) La farmacia abra 12 horas. (B) La farmacia abra las 24 horas.

➢ Teorema de Bayes

Consideramos un **sistema completo de sucesos** $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ y A un suceso cualquiera.

Si conocemos las probabilidades $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$ y las probabilidades condicionadas $P(A/A_1)$, $P(A/A_2)$, ..., $P(A/A_n)$, tenemos para cualquier suceso A_i del sistema completo:

$$\mathbf{P(A_i/A) = \dfrac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{P(A/A_1)\cdot P(A_1) + P(A/A_2)\cdot P(A_2) + \cdots + P(A/A_n)\cdot P(A_n)}}$$

Ejemplo 14

Con el saco que contiene 3 monedas normales y una moneda con 2 caras del ejemplo 12, una persona elige al azar una moneda y la lanza obteniendo una cara. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida fuera normal?

Definimos los siguientes sucesos: C: “obtener cara con la moneda elegida”,

A: “la moneda elegida es normal” y B: “la moneda elegida tiene dos caras”.

Queremos calcular la probabilidad del suceso A, condicionada al suceso C:

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/A)\cdot P(A)}{P(C/A)\cdot P(A) + P(C/B)\cdot P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

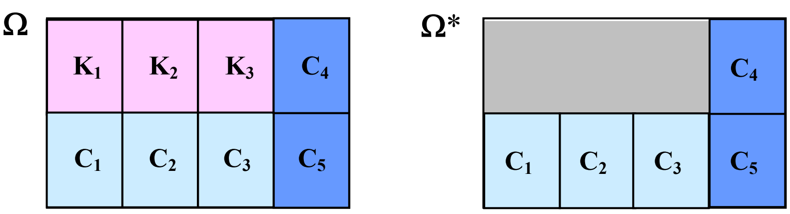
Todas las probabilidades utilizadas ya han sido calculadas en el ejemplo 14. Si no fuera así, deberíamos calcularlas ahora, siguiendo el proceso anterior.

- A la vista del resultado obtenido para la probabilidad condicionada P(A/C), podemos calcularla de otra forma: si disponemos de 3 monedas con una cara y una cruz, más una moneda con dos caras, podemos considerar que tenemos un espacio muestral con 8 elementos, que son las 5 caras y las 3 cruces. Llamamos C_4 y C_5 a las caras correspondientes a la moneda trucada:

$$\Omega = \{C_1 \quad K_1 \quad C_2 \quad K_2 \quad C_3 \quad K_3 \quad C_4 \quad C_5\}$$

  Si añadimos la información de que ha ocurrido el suceso C, es decir, que la persona ha obtenido una cara con la moneda elegida, el espacio muestral queda reducido a los resultados de C:

$$\Omega^* = C = \{C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5\} \quad \rightarrow \quad P(A/C) = \frac{3}{5}$$



31 En la situación de la actividad 25, elegimos al azar un artículo de la producción diaria:
(A) Si el artículo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera sido fabricado con la máquina A?
(B) Si el artículo no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera sido fabricado con la máquina B?

32 En la situación de la actividad 26, elegimos al azar uno de los diputados:
(A) Si su voto fue favorable a la ley, ¿qué probabilidad hay de que el diputado fuera del partido A? ¿Y del partido B? ¿Y del C?
(B) Si su voto fue desfavorable a la ley, ¿qué probabilidad hay de que el diputado fuera del partido A? ¿Y del B? ¿Y del C?
(C) ¿Qué probabilidad hay de que el diputado elegido hubiera mantenido la disciplina de voto?

Problemas del capítulo 5

1 Tres personas A, B y C compran sendos boletos de lotería pero de diferente número. Si sabemos que uno de ellos ha sido premiado, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea A? ¿Y si además sabemos que B no ha sido premiado?

2 Tenemos 4 cartas numeradas del 1 al 4 y repartimos una a cada uno de los jugadores A y B. Ganará quien tenga el número mayor. Calcula la probabilidad de que A gane a B:
(A) Sin más información. (B) Si sabemos que A ha recibido la carta con el 3.

3 Si al elegir dos cartas de una baraja española obtenemos 2 reyes. ¿cuál es la probabilidad de que uno sea de copas?

4 Repartimos 5 cartas a dos personas. Si una de ellas ha recibido 2 ases, ¿cuál es la probabilidad de que la otra persona no tenga ningún as?

5 Una persona lanza 3 veces una moneda. Si sabemos que la persona obtuvo exactamente una cara en los 3 lanzamientos, calcula la probabilidad de que dicha cara la obtuviera en el primer lanzamiento.

6 El 70 % de los estudiantes de un centro educativo aprobó Matemáticas mientras que un 60 % aprobó Estadística. Un 50 % aprobó tanto Matemáticas como Estadística. Elegimos un estudiante al azar.
(A) Si aprobó Matemáticas, probabilidad de que también aprobara Estadística.
(B) Si aprobó Estadística, probabilidad de que también aprobara Matemáticas.
(C) Si no aprobó Matemáticas, probabilidad de tampoco aprobar Estadística.
(D) Si no aprobó Estadística, probabilidad de aprobar Matemáticas.
(E) Si aprobó alguna de las dos asignaturas, probabilidad de aprobar Matemáticas.
(F) Si aprobó alguna de las dos asignaturas, probabilidad de aprobar las dos asignaturas.
(G) ¿Es independiente aprobar Matemáticas de aprobar Estadística?

7 La empresa TELEFONA ofrece en una ciudad dos productos: conexión telefónica o Internet. El 70 % de los vecinos de la ciudad tiene contratado el servicio de conexión telefónica y el 50 % tiene contratado el servicio de Internet. Un 30 % tiene contratado los dos productos.
(A) ¿Es independiente tener el servicio de conexión telefónica de tener el servicio de Internet? ¿Por qué?
(B) Probabilidad que un vecino de la ciudad tenga contratado solo el servicio de conexión telefónica.
(C) Probabilidad que un vecino de la ciudad no tenga contratado ninguno de los dos productos.
(D) Si un vecino tiene conexión telefónica, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el servicio de Internet?

8 Con una gran cantidad de exámenes médicos, un médico obtuvo los siguientes resultados: El 7 % de los pacientes están enfermos y creen estarlo; el 60 % creen estar enfermos pero no lo están; el 30 % creen estar sanos acertadamente y el 3 % creen estar sanos pero están enfermos. Definimos los sucesos:

A: "el paciente cree estar enfermo" y B: "el paciente está enfermo".

(A) Calcula P(A) y P(B).
(B) Si un paciente cree estar enfermo, probabilidad de que lo esté.
(C) Si un paciente cree estar sano, probabilidad de que esté enfermo.
(D) Si un paciente está enfermo, probabilidad de que crea estar sano.
(E) Si un paciente está sano, probabilidad de que crea estar enfermo.

9 Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos tal que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A\cap B) = 0.1$. Calcula:
(A) $P(A\cup B)$ (B) $P(A/B)$ (C) $P(A/A\cap B)$ (D) $P(A\cap B/A\cup B)$
(E) $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$ (F) $P(A\cap B/\overline{A})$ (G) $P(A/\overline{A\cap B})$ (H) $P(\overline{B}/\overline{A\cup B})$

10 Sabemos que dos sucesos A y B son independientes y que $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.6$. Calcula:
(A) $P(A\cap B)$ (B) $P(A\cup B)$ (C) $P(A\cap\overline{B})$ (D) $P(A\cup\overline{B})$

11 Si sabemos que $P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = 0.8$ y $P(B/A) = 0.6$, calcula:
(A) P(A) y P(B) (B) $P(A\cup B)$ (C) $P(\overline{A}/\overline{B})$

12 Suponemos que aprobar matemáticas es independiente de aprobar inglés y que las probabilidades de aprobar estas asignaturas son respectivamente 0.7 y 0.6. Calcula la probabilidad de:
(A) No aprobar ninguna de las dos asignaturas.
(B) Aprobar alguna de las dos asignaturas.
(C) Aprobar una de las dos asignaturas.

13 Lanzamos 4 veces una moneda. Describe el espacio muestral de dicho experimento aleatorio (contiene 16 resultados). Consideremos los sucesos:

A: "cara en el cuarto lanzamiento". A_1: "el número de caras es de una".

A_2: "el número de caras es de dos". A_3: "el número de caras es de tres".

Comprueba que:

(A) A_1 desfavorece a A. (B) A_3 favorece a A. (C) A y A_2 son independientes.

14 Para aprobar unas oposiciones hay que hacer un examen escrito y, si éste se aprueba, se realiza un examen oral. El 20 % de los opositores superan el examen escrito y de éstos el 60 % supera después el examen oral.

(A) ¿Cuál es la probabilidad de superar los dos exámenes?

(B) ¿Y de aprobar el primero pero suspender el segundo?

15 Extraemos cartas de una baraja española hasta obtener por primera vez una sota. Calcula la probabilidad de necesitar 4 extracciones para ello, en los siguientes casos:

(A) Extracciones sin reemplazo. (B) Extracciones con reemplazo.

16 Un llavero consta de 10 llaves indistinguibles de las que solo 2 abren una puerta. Una persona quiere abrir la puerta. Calcula la probabilidad conseguirlo en el tercer intento:

(A) Si va eliminando las llaves que no abren. (B) Si no las elimina.

17 Tenemos 3 cajas, cada una con 2 bolas blancas, pero con diferente número de bolas negras: la primera tiene una, la segunda tiene 2 y la tercera tiene 3. Cogemos una bola de cada caja. Calcula las probabilidades de que:

(A) Las 3 bolas sean blancas. (B) Las 3 bolas sean del mismo color.

(C) Alguna de las 3 bolas sea blanca. (D) Una de las 3 bolas es blanca.

18 Tres personas extraen sendas cartas de una baraja distinta. Halla la probabilidad de que:

(A) Las 3 cartas sean de oros. (B) Ninguna carta sea de oros.

(C) Una de las 3 cartas sea de oros. (D) Dos de las 3 cartas sean de oros.

(E) Alguna de las 3 cartas sea de oros.

19 La prueba "Cangur" de Matemáticas es un examen tipo test con 5 alternativas por pregunta de las cuales solo una es correcta. Un "estudiante" decide responder todas las preguntas al azar. Calcula la probabilidad de:

(A) Responder bien las primeras 2 preguntas y mal las 2 siguientes.

(B) Responder bien 2 de las 4 primeras preguntas.

(C) Responder bien a alguna de las 4 primeras preguntas.

20 En una casa viven 12 vecinos. Si conocemos a 3 de ellos pero no sabemos en qué pisos habitan, calcula razonadamente la probabilidad de que, llamando a los timbres al azar, el primer vecino conocido se encuentre al cuarto intento (cada timbre es seleccionado tan solo una vez).

21 A lanza dos monedas y B lanza un dado. A gana a B si obtiene dos caras y B no obtiene un 6. B gana a A si obtiene un 6 y A no obtiene dos caras. En los demás casos, empatan. Calcula la probabilidad de que, en una jugada de cada uno:

(A) A gane a B. (B) B gane a A. (C) A y B empaten.

(D) Si al empatar juegan de nuevo, calcula la probabilidad de que A gane en la 3.ª jugada.

22 Tenemos dos urnas, la primera con 2 bolas blancas, 3 negras y 5 rojas y la segunda con 2 bolas blancas, 2 negras y una roja. Cogemos una bola de cada urna. Probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

23 Las matrículas de los coches de un país tienen 4 cifras seguidas de 3 vocales. Elegimos una matrícula al azar de todas las posibles, halla:

(A) La probabilidad de que las 4 cifras sean iguales.

(B) La probabilidad de que las 3 vocales sean iguales.

(C) La probabilidad de que las 4 cifras sean iguales y las 3 vocales sean iguales.

24 Dos jugadores A y B tiran cada uno dos monedas. Ganará el que obtenga dos caras, siempre que el otro no las obtenga también. Calcula razonadamente la probabilidad de que en una jugada:

(A) A gane a B. (B) A y B empaten.

25 Tres jugadores de básquet A, B y C tienen la siguiente efectividad al lanzar a canasta: A un 60 %, B un 70 % y C un 80 %. Cada uno de ellos lanza una vez a canasta. Calcula la probabilidad de que:

(A) A gane a los otros 2. (B) Alguno de los 3 gane a los otros 2. (C) Los tres empaten.

26 Un jugador de baloncesto que tiene un porcentaje de acierto del 25 % tiene cuatro intentos para encestar un tiro libre. Calcula la probabilidad que tiene de conseguirlo.

27 Supongamos que la probabilidad de que nazca un chico es la misma que lo haga una chica, y que los nacimientos son independientes. Calcula las probabilidades de que:
(A) Una pareja tenga 2 chicos y después 2 chicas.
(B) ¿Qué es más probable, tener dos hijos del mismo sexo o no tenerlos del mismo sexo?

28 Tenemos tres cajas, cada cuna con tres boles azules, pero en la primera hay también una bola roja, en la segunda dos, y en la tercera tres bolas rojas. Elegimos al azar una bola de cada caja. Calcula la probabilidad de:
(A) Las tres bolas son azules.
(B) Alguna de les tres bolas es azul.
(C) Dos de les tres bolas son azules.

29 Un jugador de básquet tiene una efectividad del 80 % al tirar a canasta. Calcula la probabilidad de:
(A) Necesitar hacer 4 tiros pera conseguir la primera canasta.
(B) Conseguir 4 canastas en los primeros 6 tiros.
(C) Conseguir más de 2 canastas en los primeros 5 tiros.
(D) Conseguir alguna canasta en los primeros 4 tiros.

30 Tenemos un dado que tiene una cara de color rojo, dos de color azul y tres de color verde. Calcula las probabilidades de:
(A) Obtener alguna cara roja en 3 lanzamientos.
(B) Obtener 2 caras azules en 5 lanzamientos.
(C) Obtener más de 2 caras azules en 5 lanzamientos.
(D) Obtener una cara de cada color en 3 lanzamientos.

31 Tenemos 10 trabajos repartidos en 30 carpetas (3 carpetas constituyen un trabajo). Tomamos al azar 3 carpetas.
(A) Calcula la probabilidad de no tomar ningún trabajo completo.
(B) Repite la pregunta anterior si tomamos al azar 4 carpetas.
(C) Repite la pregunta anterior si tomamos al azar 5 carpetas.

32 En una población hay el doble de mujeres que hombres. El 25 % de mujeres y el 40 % de hombres son fumadores.
(A) Elegimos al azar una persona. Calcula la probabilidad de que sea fumadora.
(B) Elegimos una persona y resulta ser fumadora. Halla la probabilidad de que sea hombre.
(C) Calcula la probabilidad de elegir al azar un hombre no fumador.

33 El 25 % de los alumnos acude a clase en autobús y los restantes van caminando. Llega puntual a clase el 60 % de los que usan autobús y el 90 % de los que van caminando.
(A) Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya llegado puntual a clase.
(B) Si un alumno ha llegado puntual a clase, calcula la probabilidad que haya llegado caminando.

34 "Turrones La Piedra" dispone de 3 fábricas para elaborar sus productos, F_1, F_2 y F_3, a razón de 100, 140 y 160 pastillas diarias respectivamente. Además, se sabe que de las cantidades producidas el 30 %, el 45 % y el 20 %, respectivamente, se exportan. Si las pastillas se almacenan en un local antes de ser distribuidas al interior o al exterior y tomamos una al azar, encuentra;
(A) La probabilidad de que sea una pastilla que será exportada.
(B) En Disneylandia encontramos pastillas de turrón de esta marca y compramos una. ¿Cuál es la probabilidad de que la pastilla se elaborara en la fábrica F_2?

35 El 50 % de las operaciones bursátiles se realizan en Asia A, el 40 % en Norteamérica N y el 10 % en Europa E. Actualmente se estima que en A el 1 % de las operaciones bursátiles tienen pérdidas mientras que en N es el 2 % y en E el 8 %.
(A) Calcula la probabilidad de elegir una operación bursátil con pérdidas y de la región A.
(B) Si una operación tiene pérdidas, ¿cuál es la probabilidad de que se efectuara en A?
(C) Si una operación tiene beneficio, ¿cuál es la probabilidad de que se efectuara en E?

36 En un juego se gana cuando al lanzar un dado se obtiene un 6. Un individuo lanza un dado, saca un 6 y gana. Calcula la probabilidad de que haya hecho trampa. Supón que el 25 % de los jugadores son tramposos.

37 Una compañía de seguros de automóviles clasifica los conductores en 3 clases: A (alto riesgo), B (riesgo medio) y C (bajo riesgo). La clase A constituye el 30 % de los conductores que suscriben un seguro en dicha compañía; la probabilidad de que uno de esos conductores tenga algún accidente en un año es 0.1. Los correspondientes datos para la clase B son 50 % y 0.03 mientras que para la clase C son 20 % y 0.01. Un determinado cliente contrata una póliza de seguros y tiene en el primer año un accidente. Calcula las probabilidades de que este cliente pertenezca a cada una de las clases A, B y C.

38 De un grupo de estudiantes de bachillerato conocemos los siguientes datos: el 40 % ha aprobado la primera evaluación; de estos, el 80 % ha aprobado la segunda evaluación; un 20 % no aprobó la primera pero sí la segunda. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

(A) Haya aprobado ambas evaluaciones.
(B) Haya aprobado la segunda evaluación.
(C) Haya aprobado alguna de les dos evaluaciones.
(D) Si un alumno no aprobó la primera evaluación, calcula la probabilidad de que hubiera aprobado la segunda.

39 En un bolsillo tenemos 3 monedas de un euro y 5 de dos euros. En el otro bolsillo tenemos 2 monedas de un euro y 3 de medio euro. Elegimos un bolsillo al azar y sacamos una moneda que resulta ser de un euro. Calcula la probabilidad de que el bolsillo elegido fuera el primero.

40 Tenemos 3 cajas, cada una con 2 bolas blancas, pero con diferente número de bolas negras: la primera tiene una, la segunda 2 y la tercera tiene 3. Elegimos al azar una caja y cogemos una bola de ella.

(A) Calcula la probabilidad de que la bola elegida sea blanca.
(B) Si la bola elegida es blanca, probabilidad de que proceda de la tercera caja.

41 Realizamos, a los electores de una ciudad, una encuesta sobre su intención de voto en un referéndum. Obtenemos que el 25 % piensa votar a favor, el 15 % piensa votar en contra y el 60 % piensa abstenerse. Sabemos que el 50 % de los que se abstuvieron en la encuesta votó a favor en el referéndum, el 90 % de los que votaron a favor en la encuesta repitieron voto en el referéndum y el 10 % de los que votaron en contra en la encuesta cambiaron su voto.

(A) Elegimos al azar una persona; ¿cuál es la probabilidad de que votara a favor el día del referéndum?
(B) Si una persona votó a favor el día del referéndum, calcula las probabilidades de haber dicho en la encuesta que votaría a favor, en contra, y que se abstendría.

42 De todos los alumnos de un colegio, el 40 % es aficionado al fútbol y al baloncesto, el 30 % solo al fútbol y el 20 % solo al baloncesto. Elegimos una alumno al azar:

(A) Probabilidad de que sea aficionado al fútbol.
(B) Probabilidad de que sea aficionado al baloncesto.
(C) Si es aficionado al baloncesto, probabilidad de que también lo sea al fútbol.
(D) Probabilidad de que sea aficionado a alguno de los dos deportes.
(E) Si es aficionado a alguno de los dos deportes, probabilidad que lo sea de los dos.

43 Supongamos que la probabilidad de que un jurado seleccionado para el juicio de un caso criminal llegue al veredicto correcto es 0.95. La policía estima que el 99 % de los individuos que llegan a juicio son realmente culpables. Calcula la probabilidad de que un individuo sea realmente inocente, dado que el jurado ha dictaminado que es inocente.

44 Tenemos tres urnas con bolas blancas y negras en las siguientes cantidades: U_1 tiene 4 blancas y 6 negras, U_2 tiene 5 blancas y 5 negras y U_3 6 blancas y 4 negras.

(A) Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca si sabemos que la urna U_1 tiene el doble de posibilidades de ser elegida que las otras dos.
(B) Si la bola extraída es blanca, calcula las probabilidades de que sea de la urna U_1, de la U_2, y de la U_3.

45 Una persona tiene en una caja 10 dados con las caras pintadas de color rojo o negro. Dos de ellos tienen 5 caras rojas y una negra, otros 3 dados tienen 4 caras rojas y 2 negras y los restantes tienen 3 caras rojas y 3 negras. La persona extrae y lanza al azar un dado de la caja.

(A) Calcula la probabilidad de que obtenga una cara de color roja.
(B) Si obtiene una cara de color roja, calcula la probabilidad de que el dado sea de los que tienen 3 caras rojas.

Soluciones de las actividades del capítulo 5

1. (A) 1/3. (B) 1/3. (C) 4/7. **2.** (A) 1. (B) 3/5. (C) 12/17. **3.** 1/13. **4.** 1/4; 1/3; 1/2; 1/12. **5.** 1/13; 12/13. **6.** 1/35. **7.** 7/15. **8.** (A) P(F/R) = 1 ≠ P(F) = 12/40 → R favorece a F. (B) P(F/C) = 3/10 = P(F) → F y C son independientes. También P(C/F) = 3/12 = 0.25 = 10/40 = P(C). **9.** (A) $P(R \cap C) = \frac{1}{40} = P(R)\cdot P(C) = \frac{4}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{1}{40}$ (B) $P(R \cap F) = \frac{1}{40} \neq P(R)\cdot P(F) = \frac{4}{40}\cdot\frac{12}{40} = \frac{3}{100}$. (C) $P(F \cap C) = \frac{3}{40} = P(F)\cdot P(C) = \frac{12}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{3}{40}$ **10.** (A) $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ → A y B dependientes. (B) $P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ → A y C son independientes (C) $P(B \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ → B y C dependientes.

11. $P(B \cup V) = P(B)\cdot P(V)$ == 1/4, igual en los otros casos; $P(B \cap V \cap R) = 1/4 \neq 1/8 = P(B) \cdot P(V) \cdot P(R)$.
12. (A) 0.4. (B) 0.45. (C) 0.72. (D) 0.36. (E) 0.9. **13.** (A) 3/8. (B) 3/20. **14.** (A) 55/153. (B) 7/51. **15.** (A) 18/125. (B) 36/125. **16.** 1/126. **17.** (A) 1/10. (B) 1/10. (C) 1/10. **18.** (A) $\frac{4}{3705}$. (B) $\frac{1}{1000}$. **19.** (A) 0.12. (B) 0.42. (C) 0.46. **20.** (A) 1/3. (B) 1/6. (C) 1/2. **21.** 1/32. **22.** (A) p(1 – q). (B) q(1 – p). (C) pq + (1 – p)(1 – q). **23.** $\frac{1}{2}$. **24.** 23/35. **25.** 1/25. **26.** 51/100. **27.** (A) 1/2. (B) 31/135. **28.** 21/1000. **29.** 2/3. **30.** (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. **31.** (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{47}{144}$. **32.** (A) $\frac{40}{51}$; $\frac{3}{51}$; $\frac{8}{51}$. (B) 10/49; 27/49. 12/49. (C) 79/100.

Soluciones de los problemas del capítulo 5

1. 1/3, 1/2. **2.** (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. **3.** 1/2. **4.** 87/119. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** (A) 5/7. (B) 5/6. (C) 2/3. (D) 1/2. (E) 7/8. (F) 5/8. (G) No, porque P(E/M) = 5/7 ≠ 0.6 = P(E). **7.** (A) No, porque $P(T \cap I) = 0.3 \neq P(T) \cdot P(I) = 0.7 \cdot 0.3$. (B) 0.4. (C) 0.1. (D) 3/7. **8.** (A) $P(A) = \frac{67}{100}$, $P(B) = \frac{1}{10}$. (B) $\frac{7}{67}$. (C) $\frac{1}{11}$. (D) $\frac{3}{10}$. (E) $\frac{2}{3}$. **9.** (A) 0.7. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{1}{7}$. (E) 0.9. (F) 0. (G) $\frac{4}{9}$. (H) 1. **10.** (A) 0.3. (B) 0.8. (C) 0.2. (D) 0.7. **11.** (A) P(A) = 0.5 y P(B) = 0.375. (B) 0.575. (C) 0.68. **12** (A) 0.12. (B) 0.88. (C) 0.46. **13.** $P(A) = \frac{1}{2}$; (A) $P(A/A_1) = \frac{1}{4} < P(A)$. (B) $P(A/A_3) = \frac{3}{4} > P(A)$. (C) $P(A/A_2) = \frac{3}{6} = P(A)$. **14.** (A) 0.12. (B) 0.08. **15.** (A) 0.078. (B) 0.073. **16.** (A) 7/45. (B) 0.128. **17.** (A) 8/60. (B) 14/60. (C) 54/60. (D) 22/60. **18.** (A) 1/64. (B) 27/64. (C) 27/64. (D) 9/64. (E) 37/64. **19.** (A) 0.0256. (B) 0.1536. (C) 0.5904. **20.** 7/55. **21.** (A) 5/24. (B) 1/8. (C) 2/3. (D) 5/54. **22.** 3/10. **23.** (A) 1/1000. (B) 1/25. (C) 1/25000 **24.** (A) 3/16. (B) 10/16. **25.** (A) 0.036. (B) 0.188. (C) 0.36. **26.** $\frac{175}{256}$. **27.** (A) $\frac{1}{16}$. (B) Iguales. **28.** (A) 27/120. (B) 19/20. (C) 54/120. **29.** (A) 0.0064. (B) 0.24576. (C) 0.94208. (D) 0.9984. **30.** (A) 0.4213. (B) 0.3292. (C) 0.2099. (D) $\frac{1}{6}$. **31.** (A) $\frac{405}{406}$. (B) $\frac{201}{203}$

(C) $\frac{198}{203}$. **32.** (A) 3/10. (B) 4/9. (C) 1/5. **33.** (A) 0.825. (B) 9/11. **34.** (A) $\frac{5}{16}$. (B) $\frac{63}{125}$. **35.** (A) 1/200. (B) 5/21. (C) 92/979. **36.** 2/3. **37.** 30/47; 15/47; 2/47. **38.** (A) $\frac{32}{100}$. (B) $\frac{52}{100}$. (C) $\frac{60}{100}$. (D) $\frac{1}{3}$. **39.** 15/31. **40.** (A) 47/90. (B) 12/47. **41.** (A) 54/100. (B) 15/36, 1/36 y 20/36. **42.** (A) $\frac{70}{100}$. (B) $\frac{60}{100}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{90}{100}$. (E) $\frac{4}{9}$. **43.** $\frac{19}{118}$. **44.** (A) $\frac{19}{40}$. (B) $\frac{8}{19}$, $\frac{5}{19}$ y $\frac{6}{19}$. **45.** (A) $\frac{37}{60}$. (B) $\frac{15}{37}$.