Matemáticas para bachillerato

Matemáticas para bachillerato es el resultado de mucha ilusión, trabajo, tiempo y gran experiencia docente. Contiene todos los conocimientos matemáticos necesarios para comenzar los estudios de Grado de cualquier Universidad.

Este proyecto conforma los libros de matemáticas de primero y segundo de bachillerato de las modalidades de Ciencias y Tecnología y de Ciencias Sociales, según el currículum que actualmente se estudia en el estado español, y están distribuidos en 3 volúmenes por curso:

	Primer curo	Segundo curo
Modalidad de Ciencias y Tecnología	Álgebra y Geometría	Álgebra lineal y Geometría
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Estadística	Cálculo de probabilidades
Modalidad de Ciencias Sociales	Álgebra	Álgebra lineal
	Funciones	Cálculo diferencial e integral
	Cálculo de probabilidades y Estadística	Cálculo de probabilidades e Inferencia estadística

Contenido de Matemáticas para bachillerato

- **Todo el currículum** de los bachilleratos del estado español.
- Más de 1500 **ejemplos resueltos** de los epígrafes importantes.
- Más de 8000 problemas entre **actividades y ejercicios** propuestos.
- Totas las actividades y ejercicios propuestos tienen la **solución** al final del capítulo correspondiente.

Estructura y concepción del libro Matemáticas para bachillerato

Cada pareja de páginas consecutivas (8 y 9, 10 y 11…) **se conciben como una porción cerrada** del capítulo; ningún concepto quedará tratado a medias en ellas, y contiene ejemplos resueltos y actividades para resolver.

Nunca hay texto vertical paralelo. Siempre se lee de arriba hacia abajo, sin distracciones.

Para facilitar el estudio distinguimos con formas y colores:

- **Definiciones**: Siempre con recuadros de color verde, sin relleno.
- **Propiedades y teoremas**: Siempre con recuadros rellenos de color verde. Cuando hemos considerado conveniente incluir la demostración de una propiedad lo hacemos fuera del recuadro, resaltada por la izquierda con una barra vertical de color verde.
- **Ejemplos resueltos**: Lo más abundante en el libro; resueltos con detalle, para que el alumno aprenda de ellos. Muchos son aplicaciones a otras ciencias, como la Física, Biología, Economía, Topografía, por citar las más aplicadas. Están resaltados por la izquierda con una barra amarilla y numerados por capítulo.
- **Actividades propuestas**: Al menos al finalizar cada pareja de páginas (10 y 11, 12 y 13…) incluimos un recuadro, relleno de color naranja, con actividades numeradas por capítulo y relacionadas con la teoría explicada en esas páginas y con los ejemplos resueltos en ellas.
- **Problemas de recapitulación**: Además, al finalizar cada capítulo incluimos una amplia colección de problemas propuestos para acabar de reafirmar los conceptos del capítulo.
- **Soluciones**: Cada capítulo termina con las soluciones de totas las actividades y problemas propuestos en él.

Es un proceso de asimilación de los elementos conceptuales necesarios para interpretar, enunciar y resolver los problemas que plantea el estudio de los fenómenos propios de las diversas ciencias. El conocimiento matemático se organiza en forma de sistema deductivo, de modo que definiciones, postulados, propiedades, teoremas y métodos se articulan lógicamente para dar validez a las intuiciones y técnicas matemáticas. Todo este proceso culmina en ejemplos y problemas.

El lenguaje formal se introduce lentamente, pero resulta imprescindible para no perder la línea conductora de la solución del problema. Incluimos demostraciones de algunas propiedades siempre que sean adecuadas al nivel aunque no sean necesarias para el desarrollo del texto.

BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Álgebra y geometría

educàlia editorial

BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Álgebra y geometría

educàlia editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-03-9

Depósito legal: V-3239-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 2

Razones trigonométricas de cualquier ángulo

2.1 Definición general de las razones trigonométricas

La extensión de las razones trigonométricas a cualquier ángulo (no solo a los agudos) permite trabajar con cualquier tipo de triángulo y posibilita ampliar el campo de aplicaciones.

Consideramos el plano con sus ejes de coordenadas cartesianas y origen O. Consideramos además una circunferencia de radio r centrada en el origen.

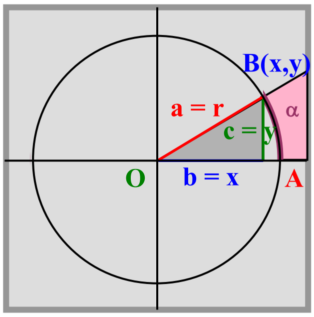
Cada ángulo con vértice en O tendrá su arco correspondiente (de igual medida) en dicha circunferencia.

Tomamos un arco, de medida α, con extremo inicial en el punto A(r, 0), y extremo final en el punto B(x, y). Si B está en el primer cuadrante redefinimos las razones trigonométricas con **a = r**, **b = x**, **c = y**:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{long. cateto opuesto}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{long. cateto contiguo}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{x}{r}$$

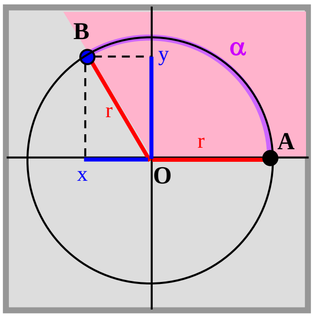
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{long. cateto opuesto}}{\text{long. cateto contiguo}} = \frac{c}{b} = \frac{y}{x}$$



➢ Extensión de la definición de las razones trigonométricas

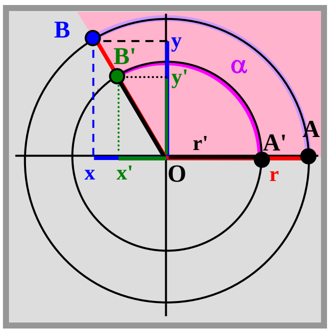
Dado un arco, de medida α, con extremo inicial en el origen de ángulos, punto A(r, 0), y extremo final en el punto B(x, y) (un punto cualquiera de la circunferencia), definimos:

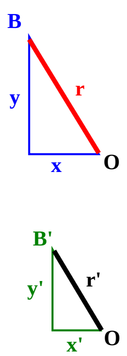
- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{ordenada de B}}{\text{radio}} = \dfrac{y}{r}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{abscisa de B}}{\text{radio}} = \dfrac{x}{r}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{ordenada de B}}{\text{abscisa de B}} = \dfrac{y}{x}$, para $x \neq 0$.



La nueva definición de las razones trigonométricas es ***independiente*** de la circunferencia elegida:

"Si tomamos dos circunferencias de radios r y r', los arcos AB y A'B' correspondientes al mismo ángulo central α, proporcionan triángulos semejantes. El **teorema de Tales** da la independencia."





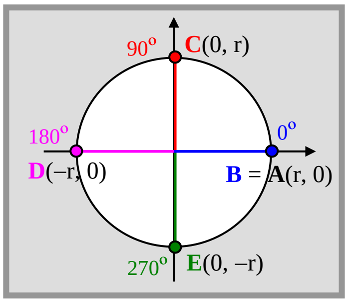
$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} = \cos\alpha$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}\alpha$$

Razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º y 270º

Ángulo α / Razón	0º	90º	180º	270º
Seno	0	1	0	–1
Coseno	1	0	–1	0
Tangente	0	No existe	0	No existe



Si $\alpha = 0º \rightarrow B = A(r, 0) \rightarrow \operatorname{sen} 0º = \frac{0}{r} = 0$ y $\cos 0º = \frac{r}{r} = 1$

Si $\alpha = 90º \rightarrow B = C(0, r) \rightarrow \operatorname{sen} 90º = \frac{r}{r} = 1$ y $\cos 90º = \frac{0}{r} = 0$

Si $\alpha = 180º \rightarrow B = D(-r, 0) \rightarrow \operatorname{sen} 180º = \frac{0}{r} = 0$ y $\cos 180º = \frac{-r}{r} = -1$

Si $\alpha = 270º \rightarrow B = E(0, -r) \rightarrow \operatorname{sen} 270º = \frac{-r}{r} = -1$ y $\cos 270º = \frac{0}{r} = 0$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ siempre que $x \neq 0$, tenemos:

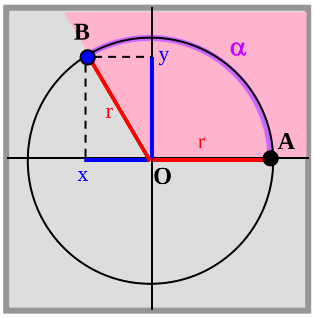
$\operatorname{tg} 0º = \frac{0}{r} = 0$ $\quad$ $\operatorname{tg} 180º = \frac{0}{-r} = 0$ $\quad$ $\operatorname{tg} 90º = \frac{r}{0}$ no existe $\quad$ $\operatorname{tg} 270º = \frac{-r}{0}$ no existe

Otras razones trigonométricas: secante, cosecante y cotangente

Bajo las mismas condiciones que las definiciones anteriores, existen otras razones trigonométricas:

Dado un arco, de medida α, con extremo inicial en el origen de ángulos, punto A(r, 0), y extremo final en el punto B(x, y) (un punto cualquiera de la circunferencia), definimos

- ***Cotangente de α:*** $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\text{abscisa de B}}{\text{ordenada de B}} = \dfrac{x}{y}$
- ***Secante de α:*** $\sec\alpha = \dfrac{\text{radio}}{\text{abscisa de B}} = \dfrac{r}{x}$
- ***Cosecante de α:*** $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\text{radio}}{\text{ordenada de B}} = \dfrac{r}{y}$



(Definiciones válidas solo si los denominadores no son nulos.)

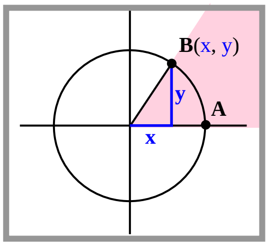
1 Comprueba, a partir de sus definiciones, las siguientes relaciones entre razones trigonométricas:

(A) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\quad$ (B) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\quad$ (C) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

2 Halla las nuevas razones trigonométricas de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º y 270º.

2.2 Signo de las razones trigonométricas

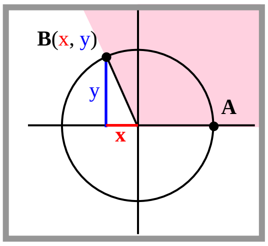
La nueva definición de las razones trigonométricas, a partir de los valores de las coordenadas x e y del extremo B del arco, proporciona el signo de dichas razones trigonométricas.



Ángulos 1.^{er} cuadrante:

$x > 0 \quad y > 0$

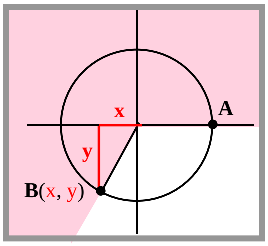
sen α > 0
cos α > 0
tg α > 0



Ángulos 2.º cuadrante:

$x < 0 \quad y > 0$

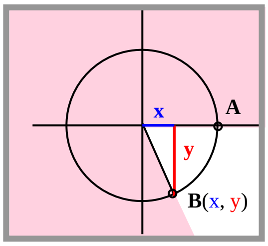
sen α > 0
cos α < 0
tg α < 0



Ángulos 3.^{er} cuadrante:

$x < 0 \quad y < 0$

sen α < 0
cos α < 0
tg α > 0



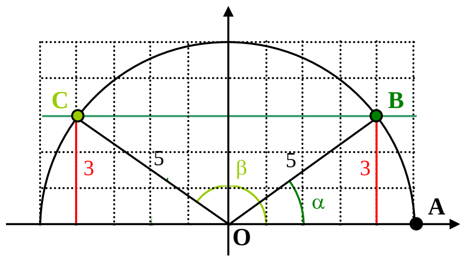
Ángulos 4.º cuadrante:

$x < 0 \quad y > 0$

sen α < 0
cos α > 0
tg α < 0

Ejemplo 1

En unos ejes coordenados dibujamos una semicircunferencia de radio r = 5, y sobre ella situamos algunos puntos, A(5, 0), B(4, 3) y C(−4, 3). Calculamos las razones trigonométricas de los arcos AB y AC, de medidas que llamamos α y β respectivamente.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Ordenada de B}}{\text{Radio}} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Abscisa de B}}{\text{Radio}} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Ordenada de B}}{\text{Abscisa de B}} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{Radio}}{\text{Ordenada de B}} = \frac{5}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{Radio}}{\text{Abscisa de B}} = \frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{Abscisa de B}}{\text{Ordenada de B}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{Ordenada de C}}{\text{Radio}} = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{\text{Abscisa de C}}{\text{Radio}} = -\frac{4}{5} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\text{Ordenada de C}}{\text{Abscisa de C}} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{\text{Radio}}{\text{Ordenada de C}} = \frac{5}{3} \qquad \sec\beta = \frac{\text{Radio}}{\text{Abscisa de C}} = -\frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{\text{Abscisa de C}}{\text{Ordenada de C}} = -\frac{4}{3}$$

3 En una circunferencia de radio r = 10 sitúa los puntos de coordenadas A(10, 0), B(8, 6) y C(−8, 6). Calcula las razones trigonométricas de los arcos AB y AC. Compara los resultados con los del ejemplo 1.

4 En la misma circunferencia, sitúa los puntos A(10, 0), B(6, 8), C(−6, 8), D(−6, −8) y E(6, −8). Calcula las razones trigonométricas de los arcos AB, AC, AD y AE.

2.3 Propiedades de las razones trigonométricas

(1) El seno y el coseno de cualquier ángulo son siempre números entre –1 y 1:

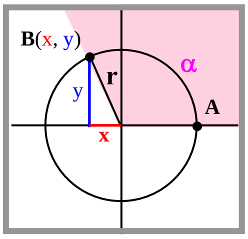
$$\mathbf{-1 \le sen\,\alpha \le 1} \quad \text{y} \quad \mathbf{-1 \le cos\,\alpha \le 1}$$

(2) Relación fundamental: $\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

(3) Otras relaciones: (A) $\mathbf{tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$ (B) $\mathbf{cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}}$

(C) $\mathbf{1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha}$ (D) $\mathbf{1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha}$

Consideramos, por ejemplo, el ángulo α del segundo cuadrante de la figura siguiente.
(1) Por el teorema de Pitágoras se verifica:



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 \le r^2 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{r^2} \le 1 \;\rightarrow\; \mathbf{-1 \le \dfrac{x}{r} = sen\,\alpha \le 1} \\ y^2 \le r^2 \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{r^2} \le 1 \;\rightarrow\; \mathbf{-1 \le \dfrac{y}{r} = cos\,\alpha \le 1} \end{cases}$$

(2) $$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

(3) (A) $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y/r}{x/r} = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ (B) $cotg\,\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x/r}{y/r} = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$

(C) y (D) se obtienen dividiendo la expresión (2) por $cos^2\alpha$ y $sen^2\alpha$ respectivamente. Veamos solo (C):

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \;\rightarrow\; \mathbf{tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$$

Ejemplo 2

Si sabemos que $tg\,\alpha = -3$, siendo α un ángulo del cuarto cuadrante, ¿cuál es el valor de $cos\,\alpha$ y de $sen\,\alpha$?

Como $tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha \;\rightarrow\; (-3)^2 + 1 = sec^2\alpha \;\rightarrow\; sec\,\alpha = \pm\sqrt{10}$

Como $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} \;\rightarrow\; cos\,\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Y como el coseno es positivo en los ángulos del cuarto cuadrante: $cos\,\alpha = +\dfrac{1}{\sqrt{10}} = +\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Además: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; sen^2\alpha + \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \;\rightarrow\; sen^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{9}{10}}$

Y puesto que el seno es negativo en el cuarto cuadrante $sen\,\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

5 Si α es un ángulo del segundo cuadrante, y $tg\,\alpha = -5$, halla las restantes razones trigonométricas de α.

6 Si α es un ángulo del tercer cuadrante, y $cos\,\alpha = -0.4$, halla las restantes razones trigonométricas de α.

7 Si α es un ángulo del segundo cuadrante, y $sen\,\alpha = 0.2$, halla las restantes razones trigonométricas de α.

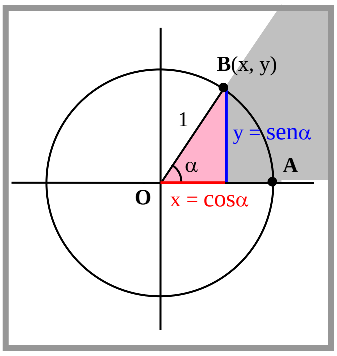
2.4 Líneas trigonométricas

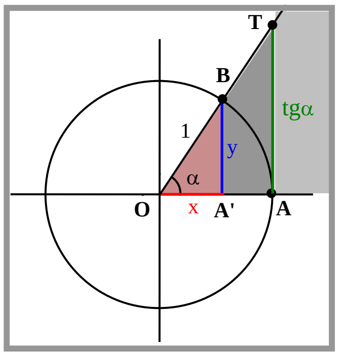
Las razones trigonométricas de cualquier ángulo tienen una cómoda representación gráfica en la circunferencia de radio unidad, r = 1, llamada ***circunferencia trigonométrica***.

Si A(1, 0) y B(x, y) son los extremos inicial y final de un arco de medida α sobre la circunferencia trigonométrica, tenemos que:

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \mathbf{y} \qquad\qquad \mathbf{cos}\,\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \mathbf{x}$$

Las coordenadas x e y del punto B coinciden con los valores del coseno y del seno respectivamente.



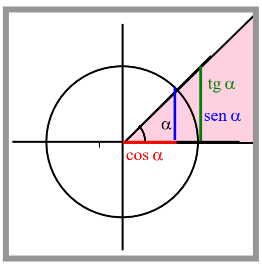


Por otra parte, como los triángulos OA'B y OAT de la segunda figura son semejantes, sus lados son proporcionales, y podemos expresar:

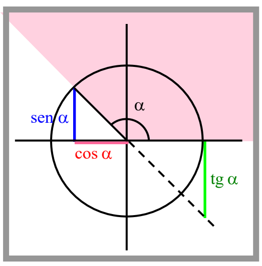
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \quad \rightarrow \quad \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{AT}$$

Así pues, en una circunferencia trigonométrica, las líneas **OA'**, **A'B** y **AT** cuyas longitudes representan los valores del **seno**, **coseno** y **tangente** de un ángulo del primer cuadrante respectivamente, son llamadas ***líneas trigonométricas seno, coseno y tangente***.

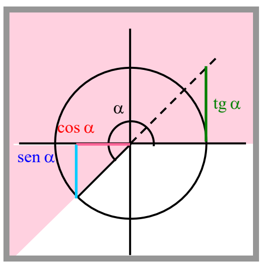
A continuación representamos las líneas trigonométricas para ángulos de los cuatro cuadrantes. Hay que tener en cuenta que la situación de las líneas nos indica el signo de la razón que representan; las líneas verticales por debajo del eje OX o las horizontales a la izquierda del eje OY representan razones trigonométricas con signo negativo (dibujadas en colores claros).



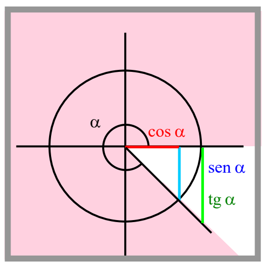
Ángulo 1.^er^ cuadrante



Ángulo 2.º cuadrante



Ángulo 3.^er^ cuadrante



Ángulo 4.º cuadrante

8 ¿Por qué representamos las líneas trigonométricas de la tangente de ángulos del segundo y tercer cuadrante en los cuadrantes cuarto y primero respectivamente?

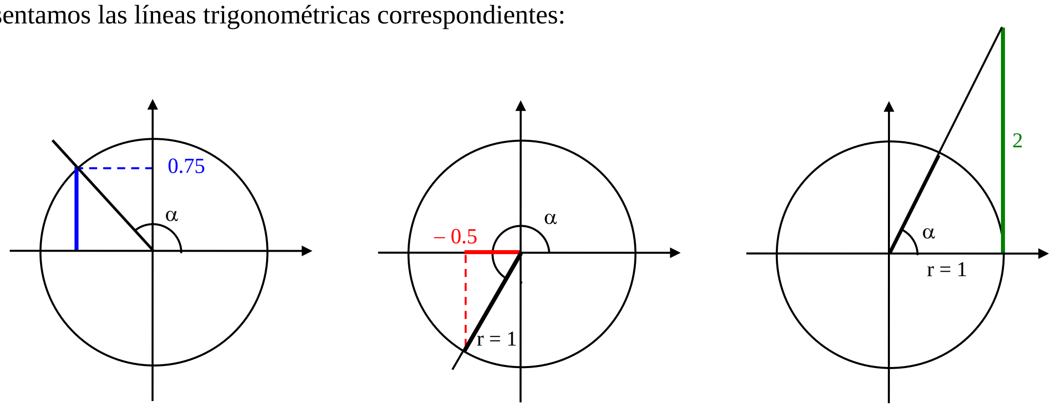
9 Expresa gráficamente las líneas trigonométricas de las razones trigonométricas secante y cosecante en cada uno de los cuadrantes.

Ejemplo 3

Con ayuda de la circunferencia trigonométrica, dibujamos los siguientes ángulos:

(A) Un ángulo del segundo cuadrante cuyo seno valga 0.75.
(B) Un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno valga –0.5.
(C) Un ángulo del primer cuadrante cuya tangente valga 2.

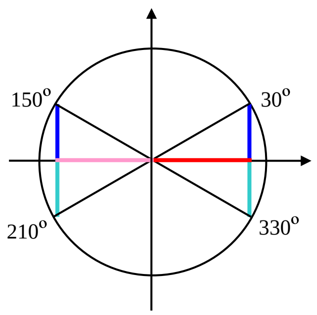
Representamos las líneas trigonométricas correspondientes:



Ejemplo 4

Conocidas las razones trigonométricas de 30º, hallamos las de los ángulos 150º, 210º y 330º utilizando la representación gráfica de sus líneas trigonométricas. Representamos solo las correspondientes al seno y coseno de los cuatro ángulos, y por simetrías vemos que las correspondientes a los senos tienen la misma longitud, al igual que con los cosenos. Sólo difieren en el signo, según el cuadrante.

	30º	**150º**	**210º**	**330º**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



10 Utiliza una circunferencia trigonométrica para dibujar los dos ángulos menores de 360º con las siguientes propiedades:

(A) El coseno de dichos ángulos vale 0.3.
(B) El coseno de dichos ángulos vale –0.3.
(C) El seno de dichos ángulos vale 0.3.
(D) El seno de dichos ángulos vale –0.3.
(E) La tangente de dichos ángulos vale 0.3.
(F) La tangente de dichos ángulos vale –0.3.
(G) La tangente de dichos ángulos vale –2.

11 ¿Cómo podrías dibujar un ángulo del primer cuadrante cuya tangente valga 100?

12 Construye tablas, como la del ejemplo anterior, que contengan los valores de las razones trigonométricas de los siguientes grupos de ángulos (obtenidas por simetría a partir de las del primer ángulo enunciado):

(A) 45º, 135º, 225º y 315º.
(B) 60º, 120º, 240º y 300º.

2.5 Relaciones trigonométricas de distintos ángulos

En el ejemplo 4 hemos obtenido las razones trigonométricas de 150º, 210º y 330º a partir de las de 30º sin más que comparar sus líneas trigonométricas. Procediendo de igual modo obtendremos estas y otras relaciones de modo general relacionándolas, principalmente por comodidad con ángulos del 1.^{er} cuadrante.

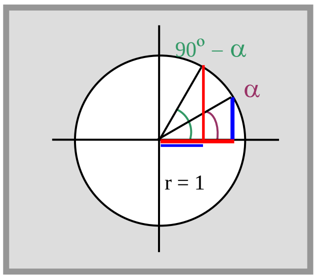
(A) Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Dos ángulos α y β son ***complementarios*** si suman 90º, es decir, si α + β = 90º, o equivalentemente **β = 90º – α**. Tenemos las siguientes relaciones entre sus razones trigonométricas:

$$\mathbf{sen(90^o - \alpha) = cos\,\alpha}$$

$$\mathbf{cos(90^o - \alpha) = sen\,\alpha}$$

$$\mathbf{tg(90^o - \alpha) = cotg\,\alpha}$$



Recuerda el valor de las razones trigonométricas de 30º y 60º y comprueba la propiedad de los complementarios:

$$\operatorname{sen} 60^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen} 30^o = \cos 60^o = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^o} = \operatorname{cotg} 30^o$$

(B) Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

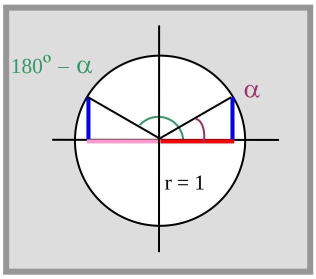
Dos ángulos α y β son ***suplementarios*** si suman 180º, es decir, si **α + β = 180º**, o equivalentemente **β = 180º – α**.

Observa en la siguiente circunferencia trigonométrica los tamaños y signos de las líneas trigonométricas

$$\mathbf{sen(180^o - \alpha) = sen\,\alpha}$$

$$\mathbf{cos(180^o - \alpha) = -\,cos\,\alpha}$$

$$\mathbf{tg(180^o - \alpha) = -\,tg\,\alpha}$$



Ejemplo 5

¿Qué ángulos entre 0º y 360º tienen por seno el valor 0.6?

El seno es positivo en los ángulos del primer y segundo cuadrantes.

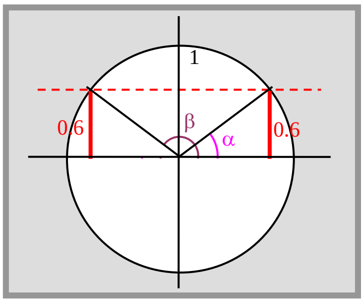
La calculadora proporciona el del primer cuadrante **α = 36.87º**.

Pero el del segundo cuadrante **no lo proporciona**.

Si lo llamamos β, sabemos que debe ser **suplementario de α:**

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 180^o} \quad \rightarrow \quad \beta = 180^o - \alpha$$

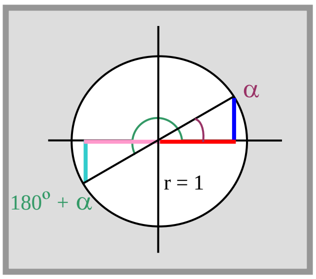
Y si $\alpha = 36.87 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 143.13^o}$



(C) Razones trigonométricas de ángulos que difieren en 180º

Consideramos dos ángulos α y β ***que difieren en*** **180º**: $\boldsymbol{\beta - \alpha = 180^o}$, es decir, $\boldsymbol{\beta = 180^o + \alpha}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{sen(180^o + \alpha) = -\,sen\,\alpha} \\ \mathbf{cos(180^o + \alpha) = -\,cos\,\alpha} \\ \mathbf{tg(180^o + \alpha) = tg\,\alpha} \end{array}}$$



Los ángulos 40º y 220º **se diferencian en 180º**, pues $220^o - 40^o = 180^o \;\rightarrow\; 220^o = 180^o + 40^o$

Entonces: $\quad sen\,220^o = -\,sen\,40^o \qquad cos\,220^o = -\,cos\,40^o \qquad tg\,220^o = tg\,40^o$

Ejemplo 6

¿Qué ángulos entre 0º y 360º tienen por coseno el valor –0.5?

El coseno es negativo en los ángulos del segundo y tercer cuadrantes.

Sabemos que $cos\,60^o = 0.5$, y el coseno del suplementario de 60º será del mismo valor pero negativo:

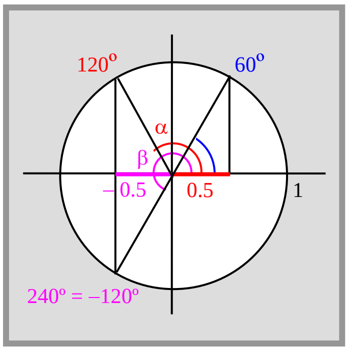
$$\boldsymbol{\alpha = 180^o - 60^o = 120^o} \quad \text{y} \quad \mathbf{cos\,120^o = -0.5}$$

Lo mismo ocurre con el ángulo que difiere de 60º en 180º:

$$\boldsymbol{\beta = 180^o + 60^o = 240^o} \quad \text{y} \quad \mathbf{cos(240^o) = -0.5}$$

Los ángulos buscados son**:**

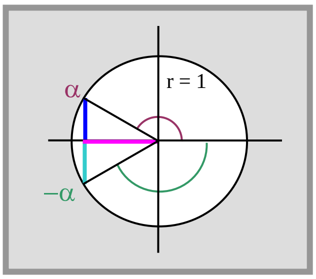
$$\boldsymbol{\alpha = 120^o} \;\; \text{y} \;\; \boldsymbol{\beta = 240^o}$$

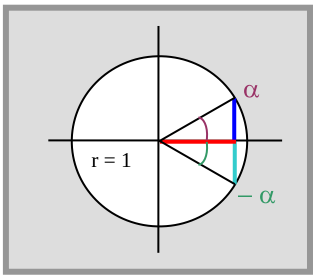


(D) Razones trigonométricas de ángulos opuestos

Consideramos dos ángulos α y β ***opuestos***, es decir, $\boldsymbol{\beta = -\,\alpha}$. Tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{sen(-\alpha) = -\,sen\,\alpha} \\ \mathbf{cos(-\alpha) = cos\,\alpha} \\ \mathbf{tg(-\alpha) = -\,tg\,\alpha} \end{array}}$$





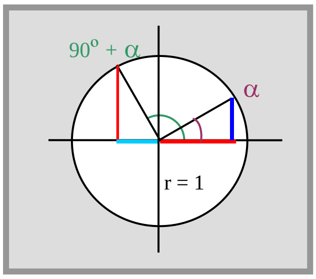
13 Halla todos los ángulos α entre 0º y 360º que verifiquen:

(A) $sen\,\alpha = 0.5$	(B) $sen\,\alpha = -0.5$	(C) $sen\,\alpha = 0$	(D) $sen\,\alpha = -1$
(E) $cos\,\alpha = 0.5$	(F) $cos\,\alpha = -0.5$	(G) $tg\,\alpha = 0$	(H) $cotg\,\alpha = -1$
(I) $tg\,\alpha = 0.5$	(J) $tg\,\alpha = -0.5$	(K) $tg\,\alpha = 1$	(L) $tg\,\alpha = -1$
(M) $sen\,\alpha = 0.2$	(N) $cos\,\alpha = -0.8$	(Ñ) $tg\,\alpha = 3$	(O) $cotg\,\alpha = -3$

(E) Razones trigonométricas de ángulos que difieren en 90º

Consideramos dos ángulos α y β que difieren en 90º: $\boldsymbol{\beta - \alpha = 90^o}$, es decir, $\boldsymbol{\beta = 90^o + \alpha}$.

$$\mathbf{sen}(90^o + \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}(90^o + \alpha) = -\,\mathbf{sen}\,\alpha$$
$$\mathbf{tg}(90^o + \alpha) = -\mathbf{cotg}\,\alpha$$



Los ángulos 40º y 130º **se diferencian en 90º**, pues $130^o - 40^o = 90^o \rightarrow 130^o = 90^o + 40^o$

Entonces: $\quad \text{sen}\,130^o = \cos 40^o \qquad \cos 130^o = -\,\text{sen}\,40^o \qquad \text{tg}\,130^o = -\text{cotg}\,40^o$

(F) Razones trigonométricas de ángulos equivalentes

Ya vimos que β es un ***ángulo equivalente*** a α si difiere de él en cualquier número exacto de vueltas completas:

$$\beta - \alpha = k \cdot 360^o \quad \text{(k es el número de vueltas)} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \alpha + k \cdot 360^o$$

Es inmediato que se verifica:

Dos ángulos equivalentes tienen las mismas razones trigonométricas:

$$\mathbf{sen}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{sen}\,\alpha \qquad \mathbf{cos}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{tg}\,\alpha$$

Las razones trigonométricas de los ángulos 390º y 1830º son idénticas pues son ángulos equivalentes a 30º:

$390^o = 30^o + 360^o \rightarrow \text{sen}\,390^o = \text{sen}\,30^o \qquad \cos 390^o = \cos 30^o \qquad \text{tg}\,390^o = \text{tg}\,30^o$

$1830^o = 30^o + 5 \cdot 360^o \rightarrow \text{sen}\,1830^o = \text{sen}\,30^o \qquad \cos 1830^o = \cos 30^o \qquad \text{tg}\,1830^o = \text{tg}\,30^o$

Ejemplo 7

¿Qué ángulos entre 0º y 360º tienen por seno el valor –0.6?

El seno es negativo en ángulos del tercer y cuarto cuadrantes.

La calculadora nos proporciona el ángulo negativo $\alpha = -36.87$,

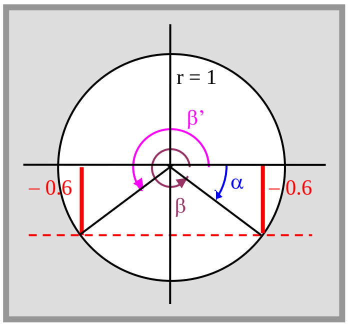
(veremos en su día por qué nos da este ángulo negativo).

Este ángulo es equivalente al ángulo positivo:

$$\boldsymbol{\beta = 360^o + \alpha = 360^o - 36.87^o = 323.13^o}$$

El ángulo del tercer cuadrante lo obtenemos por simetría:

$$\boldsymbol{\beta' = 180^o + 36.87^o = 216.87^o}$$



14 Calcula el seno, el coseno y la tangente de 165º y de 255º sabiendo que sen 75º = 0.966.

15 Calcula todos los ángulos entre 0º y 720º que verifican la ecuación $\text{sen}\alpha = -0.5$.

Ejemplo 8

- ¿Cuáles son todos los ángulos cuyo seno vale 0.75?

  La calculadora nos proporciona el ángulo $\alpha \simeq 48.6º$, pero también es solución, como vemos en la primera figura, el suplementario de α: $\beta = 180º - \alpha \simeq 180º - 48.6º = 131.4º$.

  Cualquier ángulo equivalente a los anteriores (sumando vueltas) es también solución. A continuación tenemos la solución general, y en la tabla unos cuantos ángulos obtenidos dando valores al **número de vueltas k**.

  $$\{\mathbf{48.6º + k \cdot 360º},\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{131.4º + k \cdot 360º},\ \text{con } \mathbf{k \in \mathbb{Z}}\}$$

k	...	–2	–1	0	1	2	...
α	...	–588.6º	–228.6º	**48.6º**	408.6º	768.6º	...
β	...	–671.4º	–311.4º	**131.4º**	491.4º	851.4º	...

- ¿Cuáles son todos los ángulos que verifican $\cos\alpha = 0.75$?

  La calculadora nos proporciona el ángulo $\alpha \simeq 41.4º$, y, como vemos en la segunda figura, también es solución el ángulo $\beta = 360º - \alpha \simeq 360º - 41.4º = 318.6º$. La solución general es:

  $$\{\mathbf{41.4º + k \cdot 360º},\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{318.6º + k \cdot 360º},\ \text{con } \mathbf{k \in \mathbb{Z}}\}$$

- ¿Cuáles son los 2 ángulos más próximos a 2005º que verifican la ecuación $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$?

  $$\operatorname{tg}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \text{o} \quad \operatorname{tg}\alpha = -1$$

  La calculadora nos proporciona el ángulo 45º para la primera ecuación, y –45º para la segunda; no obstante, tenemos 2 ángulos válidos para cada ecuación en la primera vuelta, como vemos en la tercera figura:

  45º **135º** **225º** **315º**

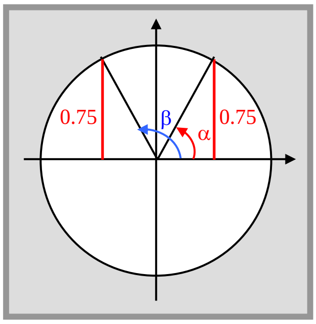
  La solución general es:

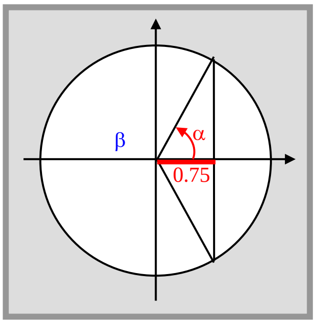
  $$\{\mathbf{45º + k \cdot 360º,\ 135º + k \cdot 360º,\ 225º + k \cdot 360º,\ 315º + k \cdot 360º},\ \text{con } \mathbf{k \in \mathbb{Z}}\}$$

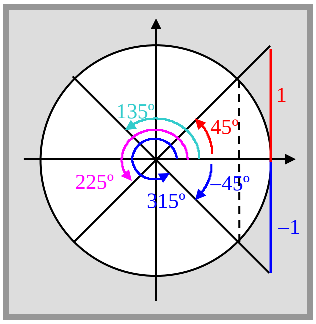
  Como $2005º = 205º + 5 \cdot 360º$, es un ángulo de la 5ª vuelta (k = 5). Las soluciones de la ecuación $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$ que sean de la 5ª vuelta son:

  $45º + 5 \cdot 360º = 1845º$ $135º + 5 \cdot 360º = 1935º$ $225º + 5 \cdot 360º = 2025º$ $315º + 5 \cdot 360º = 2115º$

  Y de ellas, las más próximas a 2005º son **1935º** y **2025º**.







16 Obtén todos los ángulos que son solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\operatorname{sen}\alpha = 0.25$ (B) $\cos\alpha = -0.8$ (C) $\operatorname{tg}\alpha = 5$ (D) $\operatorname{tg}\alpha = -10$

(E) $\operatorname{sen}10\alpha = 0.25$ (F) $\cos 10\alpha = -0.8$ (G) $\operatorname{tg}10\alpha = 5$ (H) $\operatorname{tg}10\alpha = -10$

17 Calcula los ángulos entre 1000º y 2000º que son solución de las ecuaciones:

(A) $\operatorname{sen}\alpha = 3\cos$ (B) $\operatorname{sen}^2\alpha = 3\cos^2\alpha$

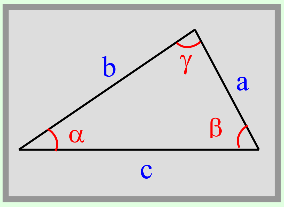
2.6 Resolución de triángulos cualquiera

A continuación estudiamos dos teoremas, ***teorema del seno*** y ***teorema del coseno***, que nos permitirá resolver problemas planteados con la ayuda de triángulos no rectángulos. Conocidos tres datos, entre lados y ángulos, salvo el caso en que conozcamos los tres ángulos, obtendremos los restantes lados y ángulos.

➢ Teorema del seno

Las longitudes **a**, **b** y **c** de los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos **α**, **β** y **γ**:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\gamma}}$$

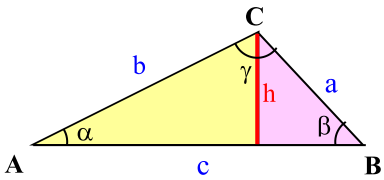


Demostremos la primera igualdad. Trazamos la altura h relativa al lado de medida c que puede ser interior o exterior al triángulo:

En el triángulo rectángulo amarillo: $\text{sen}\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\,\text{sen}\,\alpha$

En el triángulo rectángulo violeta: $\text{sen}\beta = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\,\text{sen}\,\beta$

Por igualación: $b\,\text{sen}\alpha = a\,\text{sen}\beta \quad \rightarrow \quad \frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta}$



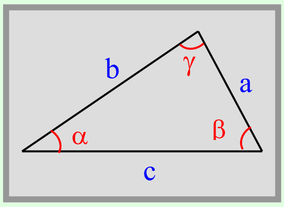
➢ Teorema del coseno

Si llamamos **a**, **b** y **c** a las longitudes de los lados de cualquier triángulo y **α**, **β** y **γ** a las medidas de sus ángulos opuestos, se verifica:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos}\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos}\,\boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos}\,\boldsymbol{\gamma}$$

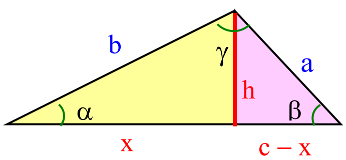


Demostremos la primera igualdad. Llamamos h a la longitud de la altura del triángulo de la figura. Esta altura divide nuestro triángulo en dos triángulos rectángulos con bases de longitudes x y c – x.

El teorema de Pitágoras permite expresar:

En el triángulo violeta: $a^2 = h^2 + (c - x)^2 \qquad (1)$

En el triángulo amarillo: $b^2 = h^2 + x^2 \qquad (2)$



Despejamos h^2 en (2): $h^2 = b^2 - x^2$

Sustituimos en (1): $a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$

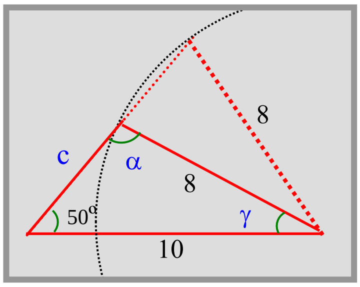
Obtenemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad (3)$

Pero en el triángulo amarillo se verifica: $\cos\alpha = \frac{x}{b} \quad \rightarrow \quad x = b\cos\alpha$

Y sustituyendo la expresión anterior en (3): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Ejemplo 9

¿Cuáles son las medidas de los lados y ángulos desconocidos del triángulo del dibujo?



Las longitudes 8 y 10 son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos:

$$\frac{8}{\text{sen}\,50^\circ} = \frac{10}{\text{sen}\,\alpha} \quad \rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{10 \cdot \sin 50^\circ}{8} \simeq 0.957$$

La calculadora da un ángulo del primer cuadrante, pero también es válido el suplementario: $\alpha = 73.25^\circ$ y $180^\circ - \alpha = 106.75^\circ$.

Las dos posibles soluciones de **sen α = 0.957** proporcionan soluciones distintas:

(A) Si $\alpha = 73.25^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 73.25^\circ \rightarrow \boldsymbol{\gamma = 56.75^\circ}$

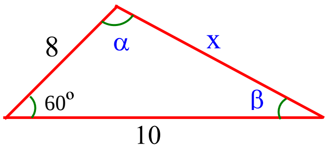
$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{8}{\text{sen}\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{8 \cdot \text{sen}\,56.75^\circ}{\text{sen}\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c \simeq 8.73}$$

(B) Si $\alpha = 106.75^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 106.75^\circ \rightarrow \boldsymbol{\gamma = 23.25^\circ}$

$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{8}{\text{sen}\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{8 \cdot \text{sen}\,23.25^\circ}{\text{sen}\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c \simeq 4.12}$$

Ejemplo 10

¿Cuáles son las medidas de los ángulos desconocidos del triángulo siguiente?



Cuando conocemos dos lados y el ángulo que constituyen, el teorema del coseno permite calcular el otro lado:

$$x^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 60^\circ \quad \rightarrow \quad x^2 = 84 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = \sqrt{84}}$$

Conocidos ya los 3 lados, solo podemos obtener una solución válida para los ángulos. También con el teorema del coseno (si bien ahora podríamos utilizar el teorema del seno), obtenemos:

$$10^2 = 8^2 + \left(\sqrt{84}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{84}\,\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{48}{16\sqrt{84}} \simeq 0.3273 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 70.89^\circ}$$

y como $\alpha + \beta + 60^\circ = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - 60^\circ - 70.89 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 49.1^\circ}$

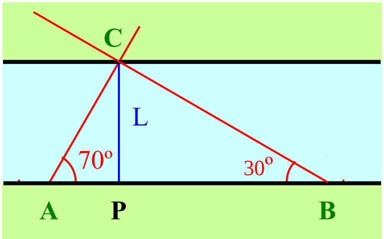
18 Calcula las restantes medidas de los lados y ángulos de un triángulo con $a = 15$, $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 80^\circ$.

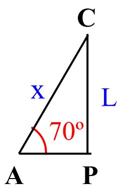
19 Calcula los restantes lados y ángulos de un triángulo habitual con
(A) $a = 30$ m, $b = 20$ m, $\gamma = 60^\circ$. (B) $b = 50$ m, $c = 30$ m, $\alpha = 50^\circ$.

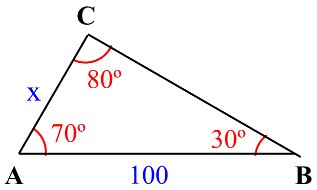
20 Comprueba si un triángulo puede tener las siguientes medidas: $a = 45$ m, $b = 30$ m, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$.

Ejemplo 11

Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde dos puntos A y B de una orilla, distantes entre sí 100 metros, observamos un punto C de la orilla opuesta con visuales que forman, con la dirección que determinan A y B, unos ángulos de 70º y 30º respectivamente. ¿Cuál es la anchura del río? (***Distancia a un punto inaccesible***.)







Resolvimos este ejercicio (ejemplo 13, capítulo 1) con un sistema de ecuaciones; ahora con el teorema del seno.

En primer lugar hallamos la longitud x del triángulo ABC con el **teorema del seno:**

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{sen\,30^o}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{sen\,80^o}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{100\,\text{sen}\,30^o}{\text{sen}\,80^o} = 50.77$$

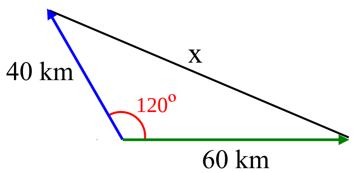
En el triángulo rectángulo APC hallamos la longitud pedida:

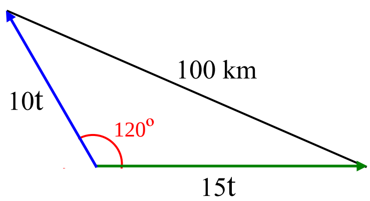
$$\text{sen}\,70^o = \frac{\text{long. cateto opuesto}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{L}{x} \quad \rightarrow \quad L = x \cdot \text{sen}\,70^o = \frac{100\,\text{sen}\,30^o\,\text{sen}\,70^o}{\text{sen}\,80^o} \simeq \mathbf{47.70\ metros}$$

Ejemplo 12

Dos barcos A y B salen de un puerto al mismo tiempo, con trayectorias rectilíneas formando un ángulo de 120º. La velocidad de A es de 10 km/h y la de B 15 km/h.

(A) ¿Qué distancia los separará después de 4 horas? (B) ¿Cuándo se encontrarán a 100 km de distancia?





(A) En 4 horas recorren $4 \cdot 10 = 40$ km y $4 \cdot 15 = 60$ km respectivamente. Por el **teorema del coseno**:

$$x^2 = 40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 120^o \quad \rightarrow \quad x^2 = 7600 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \simeq 87.18\ km}$$

(B) Llamamos t al tiempo que tardarán en distar 100 km. Los barcos habrán recorrido 10t y 15t km:

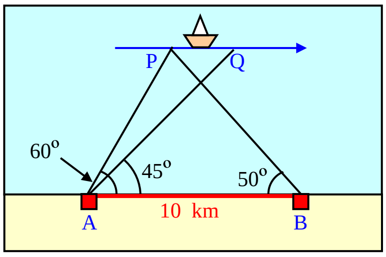
$$(100)^2 = (10t)^2 + (15t)^2 - 2 \cdot 10t \cdot 15t \cos 120^o \quad \rightarrow \quad 10\,000 = 100t^2 + 225t^2 + 150t^2$$

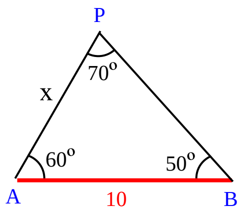
$$475t^2 = 10\,000 \quad \rightarrow \quad t^2 = \frac{10\,000}{475} \quad \rightarrow \quad \mathbf{t \simeq 4.59\ horas}$$

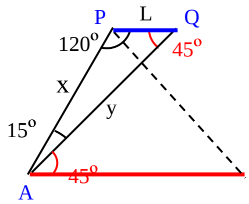
21 Desde un helicóptero a 3 000 m de altitud observamos el pico de una montaña, de 1500 m de altitud, con un ángulo, respecto de la horizontal, de 30º. Si nos desplazáramos en dirección al pico durante 2 minutos (sin variar nuestra altitud ni velocidad) lo veríamos con un ángulo, también respecto de la horizontal, de 60º. Halla la velocidad del helicóptero y el tiempo que tardaríamos en sobrevolar el pico.

Ejemplo 13

Un barco navega **paralelamente** a la orilla rectilínea de una playa donde disponemos de dos observatorios A y B separados entre sí 10 km. En un momento dado, la visual dirigida al barco desde A forma un ángulo de 60º con la orilla (recta AB) y desde B un ángulo de 50º. Transcurridos 10 minutos, la visual desde A forma un ángulo de 45º. Calculamos la distancia recorrida por el barco en esos 10 minutos.







Llamamos P a la posición inicial del barco. En el triángulo ABP aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{x}{\text{sen}\,50^\circ} = \frac{10}{\text{sen}\,70^\circ} \quad \to \quad x = \frac{10\,\text{sen}\,50^\circ}{\text{sen}\,70^\circ} \quad \to \quad \mathbf{x \simeq 8.15\ km}\ \ (\textbf{distancia inicial de A al barco})$$

Llamamos Q a la posición final del barco. En el triángulo APQ aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{y}{\text{sen}\,120^\circ} = \frac{x}{\text{sen}\,45^\circ} \quad \to \quad y = \frac{x\ \text{sen}\,120^\circ}{\text{sen}\,45^\circ} \quad \to \quad \mathbf{y \simeq 9.98\ km}\ \ (\textbf{distancia final de A al barco})$$

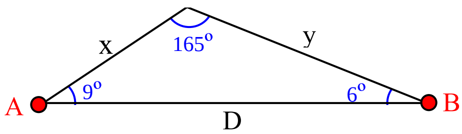
También en el triángulo APQ: $\dfrac{L}{\text{sen}\,15^\circ} = \dfrac{x}{\text{sen}\,45^\circ} \quad \to \quad L = \dfrac{x\ \text{sen}\,15^\circ}{\text{sen}\,45^\circ} \quad \to \quad \mathbf{L \simeq 2.98\ km}$

Ejemplo 14

Dos ciudades A y B se encuentran a igual altitud a una distancia de 5 km, pero la carretera rectilínea que las une asciende en primer lugar con una inclinación de 9º para descender posteriormente con una inclinación de 6º. Hallamos la distancia entre las ciudades.

En el triángulo de la figura conocemos los tres ángulos y además que x + y = 5. Para calcular x o y planteamos un sistema de ecuaciones con ayuda del teorema del seno:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\[2mm] \dfrac{x}{\text{sen}\,6^\circ} = \dfrac{y}{\text{sen}\,9^\circ} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x\ \text{sen}\,9^\circ}{\text{sen}\,6^\circ}$$



Sustituimos la expresión de y en la primera ecuación:

$$x + \frac{x\ \text{sen}\,9^\circ}{\text{sen}\,6^\circ} = 5 \quad \to \quad x\,\text{sen}\,6^\circ + x\,\text{sen}\,9^\circ = 5\,\text{sen}\,6^\circ \quad \to \quad x = \frac{5\ \text{sen}\,6^\circ}{\text{sen}\,6^\circ + \text{sen}\,9^\circ}$$

De este modo D es $\dfrac{D}{\text{sen}\,165^\circ} = \dfrac{x}{\text{sen}\,6^\circ} \quad \to \quad D = \dfrac{x\ \text{sen}\,165^\circ}{\text{sen}\,6^\circ} = \dfrac{5\ \text{sen}\,6^\circ}{\text{sen}\,6^\circ + \text{sen}\,9^\circ}\,\dfrac{\text{sen}\,165^\circ}{\text{sen}\,6^\circ} \simeq \mathbf{4.958\ km}$

22 Si el barco del ejemplo 13 no navega paralelamente a la orilla se requiere conocer el ángulo PBQ = 25º (visual desde B a las posiciones del barco). Halla la distancia recorrida por el barco en este caso.

23 Un vehículo A está estacionado en una carretera rectilínea y otros dos vehículos B y C están estacionados en una autopista, paralela a la primera, distantes entre sí 10 km. El ángulo que forma la línea BA con la dirección de la autopista es de 20º y el ángulo que forma la línea CA con la misma dirección es de 40º. Calcula:
(A) La distancia de A a B. (B) La distancia de A a C. (C) La distancia entre las dos carreteras.

2.7 Razones trigonométricas de la suma y la diferencia

Si conocemos las razones trigonométricas de dos ángulos α y β podemos calcular les de $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$:

(1) $\mathbf{sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta}$

(2) $\mathbf{cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta}$

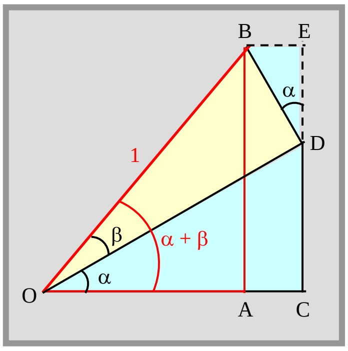
(3) $\mathbf{tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$

(4) $\mathbf{sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta}$

(5) $\mathbf{cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta}$

(6) $\mathbf{tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}}$

Demostremos (1). Construimos la figura siguiente con la condición que OB = 1.



Entonces, como OB es la hipotenusa del triángulo OAB tenemos que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = AB = CD + DE \qquad \textbf{(A)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle OCD:\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{CD}{OD} \ \rightarrow\ CD = OD\,\text{sen}\,\alpha \\ \triangle OBD:\ (OB = 1) \qquad\qquad OD = \cos\beta \end{array}\right\} \rightarrow CD = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \quad \textbf{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BDE:\ \cos\alpha = \dfrac{DE}{BD} \ \rightarrow\ DE = BD\cos\alpha \\ \triangle OBD:\ (OB = 1) \qquad\qquad BD = \text{sen}\,\beta \end{array}\right\} \rightarrow DE = \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad \textbf{(C)}$$

y si sustituimos las expresiones (B) y (C) en (A) obtenemos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Ejemplo 15

Si sabemos que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y $\text{sen}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, siendo estos dos ángulos del primer cuadrante, calculemos el valor exacto de $\text{sen}(\alpha-\beta)$. ¿Qué se deduce del resultado?

Si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Si $\text{sen}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\text{sen}^2\beta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Entonces: $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{sen(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad \alpha-\beta = 45^\circ}$$

24 Calcula el valor exacto de las razones trigonométricas de 75º y de 15º, conocidas las de 30º y 45º.

25 Si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y $\text{sen}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, siendo los dos ángulos del primer cuadrante, demuestra que $\alpha+\beta = 45^\circ$.

26 Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\text{sen}(\alpha+30^\circ) + \cos(\alpha+60^\circ) = \cos\alpha$.

27 Si α y β son ángulos del primer cuadrante, $\text{tg}(\alpha+\beta) = 3$ y $\text{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$, calcula el valor de α.

2.8 Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad

(1) $\mathbf{sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}$ **(2)** $\mathbf{cos\ 2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$ **(3)** $\mathbf{tg\ 2\alpha = \dfrac{2\ tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

(4) $\mathbf{sen\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}}$ **(5)** $\mathbf{cos\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}}$ **(6)** $\mathbf{tg\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

Las expresiones para las razones trigonométricas del ángulo doble se obtienen a partir de las de la suma de dos ángulos. Por ejemplo, veamos la del seno:

$$\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}(\alpha+\alpha) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha$$

Para las del ángulo mitad, consideremos las expresiones

$$\left.\begin{array}{ll}\cos^2x + \sin^2x = 1 & \text{(A)}\\ \cos^2x - \sin^2x = \cos 2x & \text{(B)}\end{array}\right\}$$

Calculando (A) + (B): $2\cos^2x = 1+\cos 2x \;\rightarrow\; \cos^2x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \;\rightarrow\; \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ (1)

Y calculando (A) – (B): $2\sin^2x = 1-\cos 2x \;\rightarrow\; \text{sen}^2x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \;\rightarrow\; \text{sen}\,x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ (2)

Si en (1) y (2) llamamos $x = \alpha/2$ y por tanto, $2x = \alpha$, obtenemos las fórmulas del ángulo mitad:

$$\mathbf{sen(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad \mathbf{cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

El doble signo de las raíces significa que el signo correcto depende del cuadrante a que pertenezca $\alpha/2$.

Ejemplo16

Si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante, calculamos los valores exactos de:

(A) $\text{sen}\,2\alpha$ (B) $\cos 2\alpha$ (C) $\text{tg}\alpha/2$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \;\rightarrow\; \cos^2\alpha = 1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \;\rightarrow\; \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$

porque en el segundo cuadrante $\cos\alpha$ es negativo. De esta manera:

(A) $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$ (B) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$

(C) Como α es un ángulo del segundo cuadrante, entonces $\alpha/2$ es del primer cuadrante y $\text{tg}\alpha/2$ es positivo:

$$\text{tg}\alpha/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-(-4/5)}{1+(-4/5)}} = \sqrt{9} = 3$$

28 Calcula las razones trigonométricas de 15º a partir de las de 30º.

29 Si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{5}{13}$ y $90º < \alpha < 180º$, calcula los valores de las razones trigonométricas de α, 2α, 3α y 4α.

30 Si $\text{tg}\,\alpha = 3/4$ y $180º < \alpha < 270º$, calcula el valor exacto de $\text{tg}2\alpha$ y $\text{tg}\alpha/2$.

31 Demuestra que: (A) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (B) $\text{sen}\,3\alpha = 3\,\text{sen}\,\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha$

32 Deduce relaciones para las razones trigonométricas de $45º + \alpha$ y de $45º - \alpha$ en función de las de α.

2.9 Suma y diferencia de senos y cosenos

(1) $\mathbf{sen\, p + sen\, q = 2\, sen\, \frac{p+q}{2}\, cos\, \frac{p-q}{2}}$ **(2)** $\mathbf{sen\, p - sen\, q = 2\, cos\, \frac{p+q}{2}\, sen\, \frac{p-q}{2}}$

(3) $\mathbf{cos\, p + cos\, q = 2\, cos\, \frac{p+q}{2}\, cos\, \frac{p-q}{2}}$ **(4)** $\mathbf{cos\, p - cos\, q = -2\, sen\, \frac{p+q}{2}\, sen\, \frac{p-q}{2}}$

Demostramos la primera de ellas. Utilizamos las expresiones del seno de la suma y diferencia de dos ángulos, que sumamos miembro a miembro:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta \quad (1)$$

Si llamamos

$$p = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad q = \alpha - \beta \qquad (2)$$

deducimos que

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{p-q}{2} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}$$

Ejemplo 17

Hallamos los valores de x entre 0º y 360º que verifican la ecuación trigonométrica:

$$\mathbf{sen\,x + sen\,3x = cos\,x}$$

Para ello, transformamos la suma senx + sen3x en un producto, con la fórmula (1):

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = 2\,\text{sen}\,\frac{x+3x}{2}\,\cos\frac{x-3x}{2} = 2\,\text{sen}\,2x\,\cos(-x) = 2\text{sen}2x\,\cos x$$

El último paso se debe a que $\cos(-x) = \cos x$. La ecuación a resolver se transforma en:

$$\mathbf{sen\,x + sen\,3x = cos\,x} \;\Leftrightarrow\; 2\,\text{sen}\,2x\,\cos x = \cos x \;\Leftrightarrow\; 2\,\text{sen}\,2x\,\cos x = \cos x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\,\text{sen}\,2x\,\cos x - \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{cos\,x\,(2\,sen\,2x - 1) = 0}$$

Como el producto de dos factores es 0 solo si alguno de los dos factores es 0, la última ecuación equivalente se resuelve así:

$$\mathbf{cos\,x\,(2\,sen\,2x - 1) = 0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cos x = 0 \;\rightarrow\; x = 90^\circ + k\cdot180^\circ,\; k\in\mathbb{Z} \\ \text{sen}\,2x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} 2x = 30^\circ + k\cdot360^\circ,\; k\in\mathbb{Z} \;\rightarrow\; x = 15^\circ + k\cdot180^\circ,\; k\in\mathbb{Z} \\ 2x = 150^\circ + k\cdot360^\circ,\; k\in\mathbb{Z} \;\rightarrow\; x = 75^\circ + k\cdot180^\circ,\; k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones entre 0º y 360º son **15º, 75º, 90º, 105º, 255º** y **270º**.

33 Resuelve la ecuación $\cos x + \cos 3x = 0$.

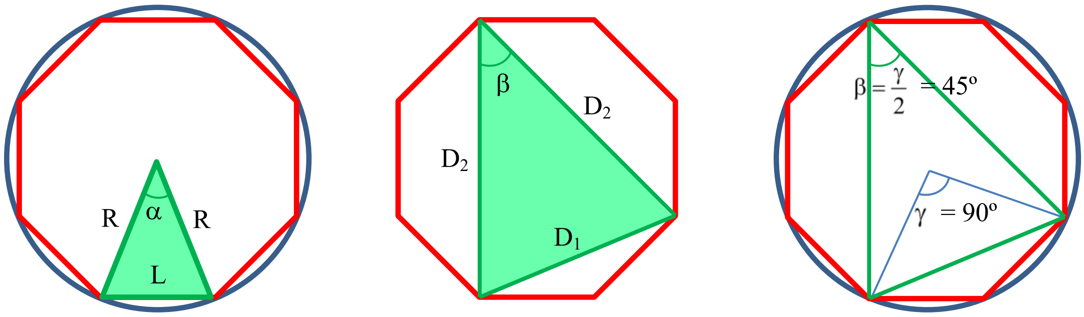
34 Calcula el valor de $\text{sen}(\alpha + 120^\circ) + \text{sen}(\alpha + 240^\circ)$ en función de $\text{sen}\,\alpha$.

35 Demuestra las relaciones trigonométricas: $\text{tg}\,p + \text{tg}\,q = \dfrac{\text{sen}(p+q)}{\cos p\,\cos q}$ y $\text{tg}\,p - \text{tg}\,q = \dfrac{\text{sen}(p-q)}{\cos p\,\cos q}$.

2.10 La proporción cordobesa

Ejemplo 18

Dada una circunferencia de radio R, hallamos la longitud L del lado del octógono regular inscrito en ella.



El triángulo isósceles con base un lado del octógono y vértice en el centro de la circunferencia tiene el ángulo desigual de $\alpha = 360º/8 = 45º$.

Utilizando el teorema del coseno obtenemos la longitud L del lado del octógono:

$$L^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot R\cdot \cos 45º = 2R^2 - 2R^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = R^2\left(2-\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

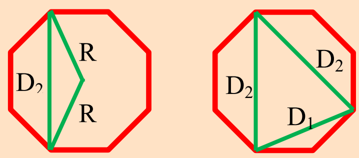
El cociente entre el radio R de la circunferencia y el lado L del octógono $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}} \simeq \mathbf{1.30656}$ es una proporción constante, conocida como ***la proporción cordobesa***, estudiada por el arquitecto Rafael de La Hoz, hallada entre las razones de las dimensiones de la Mezquita de Córdoba y otros diseños árabes andaluces. También se observa en otras construcciones como las pirámides de Teotihuacan (México) y en las proporciones humanas que hay en los mosaicos y esculturas romanos halladas en Alcolea (Córdoba).

Llamamos ***triángulo cordobés*** a cualquier triángulo isósceles cuyos lados están en proporción cordobesa. Veamos que el triángulo isósceles del segundo dibujo, construido con 3 diagonales del octógono, es semejante al triángulo del primer octógono.

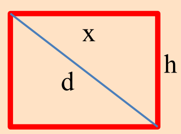
Como los ángulos γ y β del tercer dibujo abarcan el mismo arco de circunferencia, siendo γ central y β inscrito, se verifica que **β = γ/2**, y como γ = 2α = 90º al abarcar dos lados del octógono, resulta que **β = 45º = α**. Por tanto los dos triángulos son semejantes y la proporción entre sus lados es la misma, la proporción cordobesa:

$$\frac{\mathbf{D_2}}{\mathbf{D_1}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}}$$

36 Calcula las diagonales D_2 y D_1 del ejemplo anterior a partir del siguiente dibujo y comprueba que verifican la proporción cordobesa.

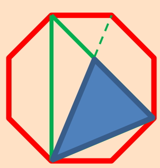


37 Un ***rectángulo cordobés*** es aquel cuyos lados mantienen la proporción cordobesa. Calcula, en función de la base x, la altura h y la diagonal d del rectángulo cordobés del dibujo.



38 Utilizando el teorema del coseno, comprueba que todo triángulo isósceles con un ángulo desigual de 45º es cordobés.

39 Comprueba que el triángulo de la figura de la derecha es también un triángulo cordobés.



Problemas del capítulo 2

1 Si α es un ángulo del cuarto cuadrante y cos α = 3/4 calcula les restantes razones trigonométricas de este ángulo.

2 Si α es un ángulo del tercer cuadrante y tgα = 4/3 calcula les restantes razones trigonométricas de este ángulo.

3 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y senα = 2/3 calcula el valor exacto de cosα y tgα.

4 Si α es un ángulo del cuarto cuadrante y tg$\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ calcula el valor exacto de senα y cosα.

5 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y cosα = –1/3 calcula el valor exacto de senα y tgα.

6 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen$\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ calcula el valor exacto de cosα y tgα.

7 Si α es un ángulo del tercer cuadrante y tg$\alpha = \sqrt{8}$ calcula el valor exacto de cosα y senα.

8 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y tg$\alpha = -\sqrt{2}$ calcula el valor exacto de:
(A) senα (B) cosα (C) cotgα (D) secα (E) cosecα

9 Si α es un ángulo del primer cuadrante y cosα = 2/3 calcula el valor exacto de:
(A) $\cos(\pi + \alpha)$ (B) $\cos(\pi - \alpha)$ (C) $\cos(90^\circ - \alpha)$ (D) $\cos(360^\circ - \alpha)$
(E) $\cos(-\alpha)$ (F) $\cos(360^\circ + \alpha)$ (G) $\cos(90^\circ + \alpha)$ (H) $\text{ctg}(270^\circ + \alpha)$

10 Si α es un ángulo del tercer cuadrante y senα = –1/3 calcula el valor exacto de:
(A) $\text{sen}(\pi + \alpha)$ (B) $\text{sen}(\pi - \alpha)$ (C) $\text{sen}(90^\circ - \alpha)$ (D) $\text{sen}(360^\circ - \alpha)$
(E) $\text{sen}(-\alpha)$ (F) $\text{sen}(360^\circ + \alpha)$ (G) $\text{sen}(90^\circ + \alpha)$ (H) $\text{sen}(270^\circ + \alpha)$

11 Si α es un ángulo del tercer cuadrante y tg$\alpha = \sqrt{8}$ calcula el valor exacto de:
(A) $\text{tg}(\pi + \alpha)$ (B) $\text{tg}(\pi - \alpha)$ (C) $\text{tg}(90^\circ - \alpha)$ (D) $\text{tg}(360^\circ - \alpha)$
(E) $\text{tg}(-\alpha)$ (F) $\text{tg}(360^\circ + \alpha)$ (G) $\text{tg}(90^\circ + \alpha)$ (H) $\text{tg}(270^\circ + \alpha)$

12 Expresa con un ángulo del primer cuadrante les siguientes razones trigonométricas:
(A) sen250º (B) cos320º (C) tg250º (D) sen(–200º) (E) cos(–290º)
(F) tg(–160º) (G) sen105º (H) cos170º (I) tg340º (J) sen1250º
(K) tg(–500º) (L) sen845º (M) cos870º (N) tg1000º (Ñ) sen630º
(O) cos(–600º) (P) tg1580º (Q) sen(–450º) (R) cos1800º (S) tg10000º

13 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
(A) sen x = –1/2 (B) cos x = –1/2 (C) tg x = –1
(D) sen 2x = –1/2 (E) cos 2x = –1/2 (F) tg 2x = –1
(G) sen 3x = –1/2 (H) cos 3x = –1/2 (I) tg 3x = –1
(J) senx/2 = –1/2 (K) cosx/2 = –1/2 (L) tgx/2 = –1

14 Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio R.
(A) Un triángulo (B) Un cuadrado (C) Un hexágono

15 Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos regulares circunscritos a la circunferencia de radio R.
(A) Un triángulo (B) Un cuadrado (C) Un hexágono

16 Calcula las longitudes de los lados y la altura de un triángulo isósceles, con el ángulo desigual de 120º y circunscrito a una circunferencia de radio R.

17 En un hexágono regular de lado 1 metro se forma otro hexágono regular inscrito uniendo los puntos medios de los lados del primero. ¿Cuánto mide el lado de este hexágono? ¿Y su área?

18 Halla el área de un octógono regular de 5 metros de lado.

19 Demuestra que el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1 m es de $2\sqrt{2}$ m^2.

20 Demuestra que el área de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio R es $3R^2$.

21 Halla la diagonal de un pentágono regular de 3 metros de lado.

22 Halla el área de un segmento circular de 5 metros de radio y $\pi/5$ rad de amplitud.

23 Si dos circunferencias son tangentes exteriores de 6 y 2 metros de radio, halla el área del triángulo que constituyen sus tangentes exteriores comunes.

24 Halla el radio de una circunferencia inscrita en un sector circular de 10 metros de radio y 60º de amplitud.

25 Demuestra que para cualquier triángulo de lados a, b y c y ángulos opuestos α, β y γ, se cumple que el área es:

$$A = \frac{1}{2}ab \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \sin\alpha = \frac{1}{2}ac \sin\beta$$

26 Si un ángulo de un triángulo rectángulo tiene la relación $\text{tg}\alpha = 4\ \text{ctg}\alpha$, ¿qué relación guardan los catetos entre sí?

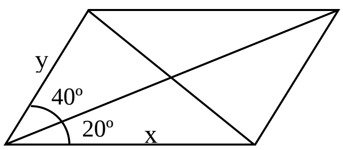
27 Sobre un segmento AB, de longitud 2a, tomado como base se construyen tres triángulos isósceles ACB, AC'B y AC''B, de alturas respectivas a, 2a y 3a. Demuestra que $C + C' + C'' = 180º$.

28 Calcula la altura de un poste clavado en un terreno horizontal, si sabemos que los ángulos con los que se ve el poste desde dos puntos A y B situados a izquierda y derecha del mismo son 75º y 60º respectivamente y la distancia entre A y B es de 20 m.

29 Un barco se encuentra en un puerto P a 10 km de distancia en línea recta de otro puerto Q. Si el barco navega siguiendo una trayectoria rectilínea que forma un ángulo de 30º con la línea PQ:
(A) Calcula la distancia a la que se encontrará de Q después de recorrer 5 km.
(B) Calcula la distancia que recorrerá para encontrarse de nuevo a 10 km de Q.

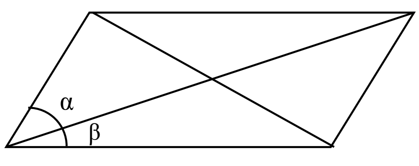
30 Dos barcos parten desde un mismo punto siguiendo trayectorias rectilíneas que forman un ángulo de 60º. En un momento dado, la distancia entre ellos es 70 km. Si uno de ellos ha recorrido el triple de distancia que el otro, calcula a qué distancia se encontrarán cada uno de ellos del punto de partida.

31 Del paralelogramo de la figura sabemos que su diagonal mayor mide 10 cm y forma con los lados ángulos de 20º y de 40º. Calcula:
(A) Las longitudes x e y de sus lados.
(B) La longitud de la otra diagonal.
(C) El área del paralelogramo.



32 Dos puntos de observación A y B se encuentran a 15 km de distancia sobre una carretera rectilínea. Desde A observamos un punto P, situado en el mismo plano vertical que A y B, Tal que el ángulo PAB mide 50º. Desde B observamos el mismo punto P, de manera que el ángulo PBA mide 70º.
(A) Calcula la distancia de P a A.
(B) Calcula la mínima distancia de P a la carretera.

33 Del paralelogramo de la figura sabemos que la longitud de las diagonales son 20 y 10 cm y que el menor de los ángulos que forman entre sí es de 40º. Calcula:
(A) Las longitudes de los lados del paralelogramo.
(B) Los ángulos α y β que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.



34 Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 5, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$ cm.

35 Demuestra que el área de un triángulo circunscrito a una circunferencia de radio 1 cm es de $3\sqrt{3}$ cm^2.

36 Un faro se encuentra sobre un acantilado que forma un ángulo de 55º con la superficie del mar. Desde un barco situado en el mar, a 400 metros de distancia del acantilado, medimos el ángulo que forma la visual al punto más bajo del faro con la superficie del mar, que resulta ser de 35º, y el ángulo con el que se ve el faro, que es de 1º. Calcula la altura del faro.

37 Dos móviles A y B se encuentran a 22 km de distancia y se desplazan sobre una superficie plana siguiendo trayectorias rectilíneas diferentes con velocidades de 6 y 8 km/h respectivamente. Si los móviles coinciden en el mismo punto P tras 2.5 horas de desplazamiento:
(A) Calcula el ángulo que forman sus trayectorias en punto P.
(B) Si tras el encuentro en P, los móviles continúan desplazándose sin modificar sus respectivas trayectorias ni velocidades, calcula el tiempo que ha de transcurrir para que disten 50 km entre sí y la distancia recorrida por cada uno.

38 El tejado de una casa tiene una inclinación de 30º por un lado y 50º por el otro. Si la anchura de la casa es de 10 metros, calcula al altura del punto más alto del tejado respecto del techo de la casa.

39 Una casa tiene un tejado asimétrico con vertientes de 6 y 4 metros siendo el ángulo de inclinación de la vertiente corta el doble que por la larga. Calcula la anchura de la casa.

40 Calcula la longitud de una pista de esquí si sabemos que tiene una inclinación de 50º y que si nos situamos en un plano horizontal, a 250 m de la base de la pista, el ángulo que forma la línea dirigida al punto más alto de la pista con la horizontal es de 20º.

41 En un triángulo ABC la base AB mide 10 cm y la altura relativa a ella forma con los otros lados, AC y BC del triángulo, ángulos de 20º y 40º. Calcula las longitudes de los lados y la altura.

42 Dos móviles situados en los puntos A y B distan 110 km y se desplazan sobre una superficie plana con trayectorias rectilíneas diferentes y velocidades respectivas de 15 y 20 km/h. Si 5 horas más tarde coinciden en un punto P:
(A) Calcula el ángulo que forman sus trayectorias en el punto P.
(B) Calcula los ángulos que forman sus trayectorias con la línea AB.

43 Avanzamos por una carretera rectilínea. En un punto A parte un camino recto que forma un ángulo de 30º respecto a la dirección de la marcha. Más adelante, en otro punto B de la carretera y a 5 km de A, parte otro camino recto que forma un ángulo de 50º con la carretera y sentido de la marcha. Ambos caminos se cortan en un punto P.
(A) Calcula la distancia de la carretera al punto P siguiendo cada uno de los dos caminos.
(B) Calcula la distancia mínima desde P a la carretera.

44 Desde un punto P, en la orilla de un río, observamos un punto A en la orilla opuesta donde hay un árbol cuya altura deseamos hallar (problema de la ***altura de pie inaccesible***). Desde nuestra posición inicial P vemos el árbol con un ángulo de inclinación de 2º respecto de la horizontal. A continuación nos desplazamos 240 metros (no necesariamente siguiendo líneas paralelas a la orilla) hasta otra posición Q desde donde divisamos el árbol y la posición P. Medimos los ángulos APQ = 30º y AQP = 131.92º. Halla la altura del árbol.

45 En el punto más alto de una pista de esquí de 250 m de longitud hay una casa de 10 m de altura. En el punto más bajo de la pista, un hombre ve la casa con un ángulo de 1.79º. Calcula el ángulo de inclinación de la pista respecto de la horizontal.

46 Queremos instalar dos paneles solares de 5 metros de longitud que vistos de perfil tienen una inclinación de 30º con la horizontal.
(A) Calcula la mínima distancia de separación entre los paneles para que el primero no haga sombra al segundo cuando los rayos solares incidan en el suelo con un ángulo de 50º.
(B) Con la separación obtenida en el apartado anterior, calcula la longitud de la sombra que el primer panel hará sobre el segundo si los rayos inciden en el suelo con un ángulo de 40º.

47 Queremos instalar dos paneles solares de 4 metros de longitud que vistos de perfil tienen una inclinación de 60º con la horizontal y distante 6 m entre sí. Calcula el menor ángulo que pueden formar los rayos solares sin que el primer panel haga sombra al segundo.

48 Queremos instalar dos paneles solares de 5 metros de longitud que vistos de perfil tienen una inclinación de 30º con la horizontal y distantes 4 m entre sí. Calcula el ángulo que formarán los rayos solares con el suelo en el momento en que el primer panel haga una sombra sobre el segundo de 2.5 m.

49 Dos postes de 12 y 9 m de altura distan entre sí 15 m. Calcula los ángulos que tenemos que inclinarlos (respecte de la horizontal) para que se toquen sus partes superiores. Calcula además la altura que tendrán respecto al suelo en ese caso.

50 Dos puntos A y B están situados en la orilla de un canal y distantes en 300 m. En un punto P de la otra orilla hay un edificio. Desde A se ve un lateral del edificio bajo un ángulo de 15º. Medimos los ángulos PAB y PBA, respecto de ese lateral del edificio, que son 40º y 60º respectivamente

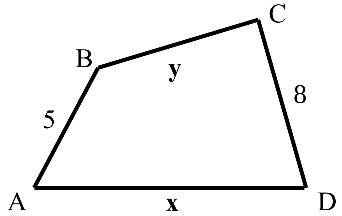
(A) Calcula la altura del edificio.
(B) Calcula el ángulo bajo el que se ve el edificio desde B.

51 En la orilla de un río canalizado hay un edificio de 50 m de altura. Frente a él, en la otra orilla del canal, está estacionado un tren. Desde el principio del tren se ve el edificio con un ángulo de elevación de 10º y desde el final del tren con un ángulo de 12º. Desde el extremo superior del edificio se ve la amplitud del tren con un ángulo de 40º.

(A) Calcula la longitud del tren.
(B) Calcula el ángulo con el que se ve el tren desde el extremo inferior del edificio.
(C) Calcula la distancia del tren al edificio.

52 Calcula las longitudes **x** e **y** del trapecio ABCD de la figura, si conocemos las medidas de los ángulos siguientes:

Ángulo(BAD) = 70º (con vértice en A).
Ángulo (CAD) = 40º (con vértice en A).
Ángulo (ADC) = 80º (con vértice en D).

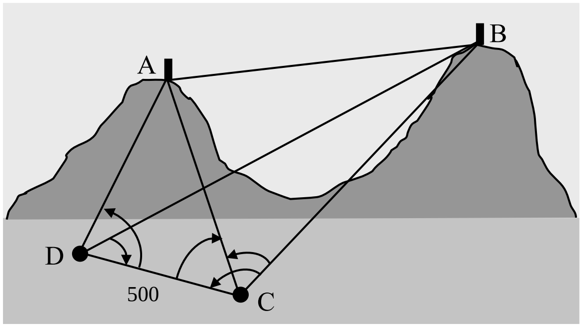


53 Dos faros A y B distan entre sí 10 km. En el mar hay fondeados dos barcos P y Q, halla la distancia entre ellos sabiendo que hemos tomado las siguientes medidas angulares:

Desde A: ángulo(PAQ) = 28º y ángulo(BAQ) = 35º.
Desde B: ángulo(PBQ) = 15º y ángulo(ABP) = 50º.

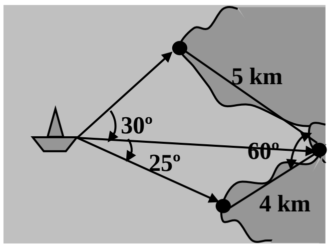
54 Calcula la distancia entre las cimas de dos montañas A y B para poder construir entre ellas un teleférico, teniendo los siguientes datos: desde dos puntos C y D, situados lejos de las montañas y distantes entre sí 500 metros, tomamos las siguientes medidas angulares:

Desde C: ACB = 55º, ACD = 65º y BCD = 105º.
Desde D: ADC = 80º y BDC = 70º.



55 En el punto más alto del edificio de un ayuntamiento ondea una bandera con un mástil vertical. Desde el suelo observamos los extremos superior e inferior del mástil con un ángulo de inclinación, respecto de la horizontal de 56º y 52º respectivamente. Si nos alejamos 20 m, en sentido opuesto al de la visual del mástil, observamos el extremo inferior del mismo bajo un ángulo de 34º. Calcula la altura de dicho mástil.

56 Desde un barco se divisan 3 puntos de tierra A, B y C. Calcula la distancia del barco a cada uno de ellos sabiendo que la distancia (en línea recta) de A a B es de 5 km y la de B a C es de 4 km. Se conocen los ángulos indicados en el dibujo.



57 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen$\alpha = \frac{2}{3}$ calcula el valor exacto de:

(A) $\cos\alpha$ (B) $\text{sen}2\alpha$ (C) $\text{tg}2\alpha$ (D) $\text{sen}(\pi - \alpha)$

58 Si α es un ángulo del primer cuadrante y sen$\alpha = \frac{2}{3}$ calcula el valor exacto de:

(A) $\text{sen}2\alpha$ (B) $\cos 2\alpha$ (C) $\text{sen}4\alpha$

59 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y cos$\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ calcula el valor exacto de:

(A) $\text{sen}\alpha$ (B) $\text{sen}2\alpha$ (C) $\text{sen}3\alpha$

60 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y cos$\alpha = -\frac{3}{5}$ calcula el valor exacto de:

(A) $\text{sen}\alpha$ (B) $\text{sen}2\alpha$ (C) $\text{sen}4\alpha$ (D) $\text{sen}\alpha/2$

61 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y tg$\alpha = -4/3$ calcula el valor exacto de:
(A) $\cos 2\alpha$ (B) $\cos 3\alpha$ (C) $\cos 4\alpha$

62 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha = 5/13$ calcula el valor exacto de:
(A) $\text{tg}\alpha$ (B) $\text{tg}\alpha/2$ (C) $\text{tg}2\alpha$ (D) $\text{tg}3\alpha$ (E) $\text{tg}4\alpha$

63 Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen$\alpha = \frac{3}{5}$ calcula el valor exacto de:

(A) $\text{tg}\alpha$ (B) $\text{tg}(\alpha + 45º)$ (C) $\text{tg}2\alpha$ (D) $\text{tg}3\alpha$

64 Si α y β son ángulos del primero cuadrante, sen$\alpha = 3/5$ y sen$\beta = 5/13$ calcula el valor exacto de:
(A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C) $\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$ (E) $\text{tg}(\alpha + \beta)$ (F) $\text{tg}(\alpha - \beta)$

65 Si α y β son ángulos del primero cuadrante, sen$\alpha = \frac{3}{5}$ y sen$\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ calcula el valor exacto de sen$(\alpha + 2\beta)$. ¿Qué deduces del resultado?

66 Si α y β son ángulos del primero cuadrante, cos$\alpha = 1/8$, cos$\beta = 3/4$ calcula el valor exacto de $\cos(\alpha + \beta)$.

67 Si α y β son dos ángulos del primero cuadrante:

(A) Si tg$\alpha = 2$ y tg$\beta = \frac{1}{3}$, demuestra que $\alpha - \beta = 45º$.

(B) Si $\text{tg}(\alpha + \beta) = 3$ y tg$\beta = \frac{1}{2}$, demuestra que $\alpha = 45º$.

68 Si α y β son dos ángulos del primero cuadrante, sen$\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y sen$\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, calcula el valor exacto de sen$(\alpha - \beta)$ y la medida del ángulo $(\alpha - \beta)$.

69 Si α y β son dos ángulos del primero cuadrante, cos$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y cos$\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, calcula el valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$ y la medida del ángulo $(\alpha - \beta)$.

70 Si sabemos que $\text{tg}(\alpha + \beta) = -3$ y $\text{tg}(\alpha - \beta) = 1/3$, calcula el valor exacto de tgα y de tgβ.

71 Demuestra las siguiente igualdades:

(A) $\text{tg}75º - \text{tg}60º = 2$ (B) $\text{tg}60º + \text{tg}15º = 2$ (C) $\text{tg}75º + \text{tg}15º = 4$

72 Demuestra que $\text{sen}75º - \text{sen}15º = \text{sen}45º$.

73 Si sabemos que tg$\alpha = 2 + \sqrt{3}$ y tg$\beta = 2 - \sqrt{3}$, demuestra que $\alpha - \beta = 60º$.

74 Si sabemos que $\text{tg}(\alpha + 45º) = 2$, calcula el valor exacto de tgα.

75 Demuestra que si $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}+1$ y $\text{tg}\beta = \sqrt{2}-1$ se tiene que $\alpha + \beta = 90º$ y $\alpha - \beta = 45º$ por tanto $\alpha = 67.5º$ y $\beta = 22.5º$.

76 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

(A) $\text{sen}2\alpha \cdot (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha) = 2$

(B) $\cos(\pi/3 - \alpha) + \cos(\pi/3 + \alpha) = \cos\alpha$

(C) $\cos(\pi/3 - \alpha) + \text{sen}(\pi/6 - \alpha) = \cos\alpha$

(D) $\text{tg}(\alpha + 45º) + \text{tg}(\alpha - 45º) = 2\text{tg}2\alpha$

(E) $\left(\dfrac{1+\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}\alpha}\right)^2 = \dfrac{1+\text{sen}\,2\alpha}{1-\text{sen}\,2\alpha}$

(F) $\left(\dfrac{\text{sen}\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha-\cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{1+\text{sen}2\alpha}{1-\text{sen}2\alpha}$

(G) $\dfrac{(\cos\alpha+\text{sen}\alpha)^2-(\cos\alpha-\text{sen}\alpha)^2}{(\cos\alpha+\text{sen}\alpha)(\cos\alpha-\text{sen}\alpha)} = 2\text{tg}2\alpha$

(H) $\text{tg}3\alpha = \dfrac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$

77 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

(A) $(\text{sen}\ x + \cos\ x)^2 - (\text{sen}\ x - \cos\ x)^2 = 2\ \text{sen}\ 2x$

(B) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$

(C) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}$

(D) $\text{cotg}\ x = \dfrac{1+\cos 2x}{\text{sen}\,2x}$

(E) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}+\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha} = 1+\text{tg}2\alpha$

(F) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

(G) $\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha} = 2\,\text{tg}2\alpha$

(H) $\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}+\dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}$

78 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

(A) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)(\text{sen}\beta + \cos\beta) = \text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

(B) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - (\text{sen}\beta - \cos\beta)^2 = \text{sen}2\alpha + \text{sen}2\beta$

79 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

(A) $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 + (\text{sen}\,x - \cos x)^2 = 2$

(B) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

(C) $\dfrac{1-\text{sen}\ x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\text{sen}\ x}$

(D) $\text{tg}\ x + \dfrac{\cos x}{1+\text{sen}\ x} = \dfrac{1}{\cos x}$

(E) $\dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x}+\dfrac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = 1$

(F) $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{1+\cos x}{\text{sen}x}$

(G) $\dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \text{tg}\alpha$

(H) $\dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} = -\text{cotg}\alpha$

(I) $\dfrac{\text{sen}(60º+\alpha)+\text{sen}(60º-\alpha)}{\cos(60º+\alpha)+\cos(60º-\alpha)} = \sqrt{3}$

(J) $\dfrac{\text{sen}(\alpha+45º)+\cos(\alpha+45º)}{\text{sen}(\alpha-45º)+\cos(\alpha-45º)} = \text{cotg}\alpha$

80 Demuestra que:

(A) $\dfrac{\text{sen}15º + \cos 15º}{\text{sen}105º + \cos 105º} = \sqrt{3}$

(B) $\dfrac{\text{sen}105º + \text{sen}15º}{\cos 105º + \cos 15º} = \sqrt{3}$

(C) $\dfrac{\text{sen}105º - \text{sen}15º}{\cos 105º - \cos 15º} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

81 Demuestra que:

(A) $\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$

(B) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta} = \dfrac{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$

82 Obtén los ángulos entre 0º y 360º que verifiquen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ (B) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (F) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ (G) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ (H) $\operatorname{tg}\alpha = 1$

(I) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (J) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (K) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ (L) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

83 Obtén los ángulos entre 0º y 360º que verifiquen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\cos\alpha = -0.1$ (B) $\operatorname{sen}\alpha = 2/3$ (C) $\cos\alpha = 0.8$ (D) $\sin\alpha = -0.8$

(E) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (F) $\operatorname{tg}\alpha = 100$ (G) $\operatorname{tg}\alpha = 1000$ (H) $\operatorname{tg}\alpha = -1000$

84 Dada la ecuación $\operatorname{sen}x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

(A) Obtén las soluciones comprendidas entre 0º y 360º.
(B) Obtén las soluciones más próximas a 2000º.
(C) Expresa las cuatro soluciones anteriores en radianes.

85 Obtén todas las soluciones que verifiquen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\dfrac{6\cos x+5}{2} = 4$ (B) $\dfrac{3\operatorname{tg}x-1}{2} = 1$ (C) $\dfrac{2}{3-2\operatorname{sen}x} = 1$ (D) $\dfrac{\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x} = 1$

(E) $\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x} = \dfrac{1}{3}$ (F) $\dfrac{3+2\cos x}{3-2\cos x} = \dfrac{1}{2}$ (G) $\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2-\operatorname{tg}x} = \dfrac{1}{3}$ (H) $\dfrac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{2+\sqrt{3}\operatorname{tg}x} = -\dfrac{2}{5}$

86 Obtén todas las soluciones que verifiquen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $3 - \operatorname{tg}^2x = 0$ (B) $\dfrac{\cos x}{1+\cos x} = -1$ (C) $2\operatorname{sen}^2x - 3\operatorname{sen}x + 1 = 0$

87 Dada la ecuación $\dfrac{3\cos x+4}{5\cos x+6} = \dfrac{5}{7}$:

(A) Obtén las soluciones comprendidas entre 0º y 360º.
(B) Obtén la solución más próxima a 2012º.
(C) Expresa la anterior solución en radianes.

88 Dada la ecuación $\dfrac{2-3\cos^2x}{1+2\cos^2x} = \dfrac{5}{6}$, obtén todas sus soluciones y exprésalas en radianes.

89 Obtén las soluciones comprendidas entre 0º y 360º de la ecuación $\cos 4x = \dfrac{1}{2}$.

90 Obtén las soluciones de la ecuación: $\operatorname{sen}5x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

91 Obtén las soluciones comprendidas entre 0º y 1000º de la ecuación $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2x}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

92 Obtén todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\operatorname{tg}^2x = 3\operatorname{tg}x - 2$ (B) $\dfrac{2\cos x - 1}{3\cos x - 2} = \dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{2\operatorname{tg}^2x - 1}{2\operatorname{tg}^2x + 1} = \dfrac{5}{7}$

93 Obtén todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $2\text{sen}^2\alpha + \text{sen}\alpha = 0$ (B) $2\text{sen}^2\alpha + \text{sen}\alpha = 1$ (C) $\text{tg}^3x - 3\text{tg}x = 0$

94 Obtén todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\text{sen}^2x = \dfrac{3}{4}$ (B) $\cos^2x = \dfrac{1}{4}$ (C) $\text{tg}^2x = 1$ (D) $3\text{tg}^2x = 1$

(E) $2\text{sen}^2x + 1 = 2$ (F) $2\cos^2x + \dfrac{1}{2} = 2$ (G) $\dfrac{2\text{sen}^2x + 1}{2\text{sen}^2x + 3} = \dfrac{1}{2}$ (H) $\dfrac{3\text{tg}^2x - 1}{4\text{tg}^2x - 1} = \dfrac{5}{7}$

95 Obtén todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\text{sen}x \cdot \cos x = 0$ (B) $\text{sen}x(2\cos x+1) = 0$ (C) $2\text{sen}^2x = \text{sen}x$

(D) $2\text{sen}^2x - \text{sen}x = 1$ (E) $2\cos^2x + \cos x = 1$ (F) $2\text{sen}^2x + 3\text{sen}x + 1 = 0$

(G) $2\text{tg}^2x + \text{tg}x = 0$ (H) $2\text{tg}^2x + \text{tg}x = 3$ (I) $\text{sen}x = \cos x$

(J) $\text{sen}x = 2\cos x$ (K) $\text{sen}^2x = \cos^2x$ (L) $\text{sen}^2x = 3\cos^2x$

(M) $1 + \text{sen}^2x = \cos^2x$ (N) $\text{tg}^2x + \text{tg}x = 0$ (Ñ) $\text{sen}^2x + \text{sen}x = \cos^2x$

(O) $1 + \text{sen}x = 2\cos^2x$ (P) $\cos^2x - \text{sen}^2x = 1$ (Q) $\cos^2x - 3\text{sen}^2x = -1$

(R) $8\cos^2x + 12\text{sen}^2x = 11$ (S) $\text{sen}x + \cos x = \sqrt{2}$

96 Obtén las soluciones comprendidas entre 0º y 360º de la ecuación: $\dfrac{1}{\text{sen}^2x} + \dfrac{3}{\cos^2x} = 8$.

97 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(A) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ (B) $\text{sen}x = \cos 2x$ (C) $\text{sen}2x = \cos x$

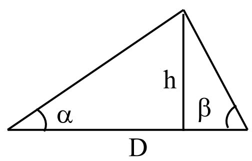
(D) $\text{sen}3x + \text{sen}x = 0$ (E) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ (F) $\text{tg}x + \text{tg}2x = 0$

(G) $\cos 2x + \text{sen}x = 4\,\text{sen}^2x$ (H) $\text{sen}4x + \text{sen}2x = \text{sen}3x$ (I) $\text{sen}x + \text{sen}3x = \text{sen}5x$

(J) $\text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x = 0$ (K) $\text{tg}2x + 2\text{sen}x = 0$ (L) $2 - 3\text{sen}x = \cos 2x$

98 Una máquina situada en el suelo produce un rayo láser que proyecta un punto luminoso sobre una pared vertical. Encuentra el ángulo α que forma el rayo láser con el suelo si sabemos que en caso de que dicho ángulo fuera el doble el punto luminoso se proyectaría al triple de altura en la pared.

99 En el triángulo de la figura, demuestra que $h = \dfrac{D\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$



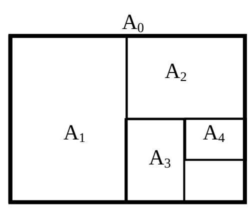
100 Las hojas rectangulares con formato DIN se construyen con las condiciones:

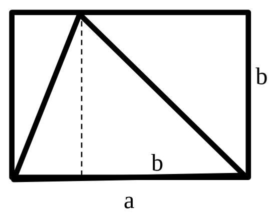
- La hoja mayor DIN A0 mide 1 m^2.
- Las dimensiones de sus lados a i b (con a > b) son tales que al dividir la hoja por la mitad las dimensiones de los lados, b y a/2, de la nueva hoja DIN A1, son proporcionales a las de la hoja DIN A0. Esto se puede repetir más veces obteniendo las hojas menores DIN A2, DIN A3, DIN A4....

(A) Calcula las dimensiones a y b de la hoja DIN A0.

(B) Dibuja en la hoja DIN A0 el cuadrado de lado b sobre un lateral y comprueba que el triángulo dibujado a partir de él es un triángulo cordobés.

(C) Calcula las dimensiones de la hoja DIN A4 y comprueba también la propiedad (B) de la hoja DIN A0.





Soluciones de las actividades del capítulo 2

2.

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**	**180º**	**270º**
secα	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	No	–1	0
cosecα	No	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	No	–1
cotgα	No	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	No	0

4.

α	**senα**	**cosα**	**tgα**	**cosecα**	**secα**	**cotgα**
AB	4/5	3/5	4/3	5/4	5/3	3/4
AC	4/5	–3/5	–4/3	5/4	–5/3	–3/4
AD	–4/5	–3/5	4/3	–5/4	–5/3	3/4
AE	–4/5	3/5	–4/3	–5/4	5/3	–3/4

5. cosα = $-\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, senα = $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$, secα = $-\sqrt{26}$, cosecα = $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$, cotgα = $-\dfrac{1}{5}$. **6.** senα = $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$, tgα = $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, secα = $-\dfrac{5}{2}$, cosecα = $-\dfrac{5}{\sqrt{21}}$, cotgα = $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$. **7.** cosα = $-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, tgα = $-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$, cosecα = 5, secα = $-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$, cotgα = $-2\sqrt{6}$. **8.** Por su signo.

12.

	45º	**135º**	**225º**	**315º**
senα	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
cosα	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
tgα	1	–1	1	–1

	60º	**120º**	**240º**	**300º**
senα	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
cosα	1/2	–1/2	–1/2	1/2
tgα	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

13. (A) 30º, 150º. (B) 210º, 330º. (C) 0º, 180º, 360º. (D) 270º. (E) 60º, 300º. (F) 120º, 240º. (G) 0º, 180º, 360º. (H) 135º, 315º. (I) 26.57º, 206.57º. (J) 153.44º, 333.44º. (K) 45º, 225º. (L) 135º, 315º. (M) 11.54º, 168.46º. (N) 143.13º, 216.87º. (Ñ) 71.57º, 251.57º. (O) 161.57º, 341.57º. **14.** sen165º = 0.259, cos165º = 0.966, tg165º = –0.267; sen255º = –0.966, cos255º = –0.259, tg255º = 3.736. **15.** 210º, 330º, 570º, 690º.
16. (A) 14.48º + k·360º, 165.52º + k·360º. (B) 143.13º + k·360º, 216.87º + k·360º. (C) 78.69º + k·180º. (D) 95.71º + k·180º. (E) 1.45º + k·36º, 16.55º + k·36º. (F) 14.31º + k·36º, 21.69º + k·36º. (G) 7.87º + k·18º. (H) 9.57º + k·18º. **17.** (A) 1151.57º, 1331.57º, 1511.57º, 1691.57º, 1871.57º. (B) 1140º, 1200º, 1320º, 1380º, 1500º, 1560º, 1680º, 1740º, 1860º, 1920º. **18.** b = 29.54, c = 28.19, γ = 70º. **19.** (A) c = $10\sqrt{7}$, α = 79.11º o α = 100.89º, β = 40.89º o 19.11º. (B) a = 38.36, B = 93.2º, C=36.8º. **20.** No. **21.** 51.96 km/h, 1 minuto. **22.** 3.89 km.
23. Coches a ambos lados de A: (A) 7.42 km. (B) 3.95 km. (C) 2.54 km. Coches a un mismo lado de A: (A) 18.79 km. (B) 10 km. (C) 6.42 km. **24.** sen75º = $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cos75º = $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, tg75º = 2 + $\sqrt{3}$; sen15º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$, cos15º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$, tg15º = 2 – $\sqrt{3}$. **25.** tg(α + β) = 1. **27.** α = 45º.
28. sen15º = $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, cos15º = $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, tg15º = 2 – $\sqrt{3}$. **29.** cosα = $-\dfrac{12}{13}$, tgα = $-\dfrac{5}{12}$; sen2α = $-\dfrac{120}{169}$, cos2α = $\dfrac{119}{169}$, tg2α = $-\dfrac{120}{119}$; sen3α = $\dfrac{2035}{2197}$, cos3α = $-\dfrac{828}{2197}$, tg3α = $-\dfrac{2035}{828}$. **30.** tg2α = $\dfrac{24}{7}$, tgα/2 = –3.
32. sen(45º+α) = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\right)$ = cos(45º–α); cos(45º+α) = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\right)$ = sen(45º–α); tg(45º+α) = $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ = $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(45º-\alpha)}$. **33.** x = $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, k∈ℤ. **34.** –senα. **36.** D_2 = $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, D_1 = $R\sqrt{2}$.

37. h = $x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, d = $x\sqrt{3-\sqrt{2}}$. **38.** Si x es la medida del lado desigual e y la medida de los otros, por el teorema del coseno, x = y $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **39.** Un ángulo está inscrito y abarca dos lados del octógono, por tanto mide 45º = 90º/2, y el otro también está inscrito pero abarca 3 lados del octógono y mide 135º/2.

Soluciones de los problemas del capítulo 2

1. sen$\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, tg$\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$. **2.** sen$\alpha = -\frac{4}{5}$, cos$\alpha = -\frac{3}{5}$. **3.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **4.** $-\frac{3}{\sqrt{11}}$ y $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **5.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $-2\sqrt{2}$. **6.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ y –2. **7.** –1/3 y $-\frac{\sqrt{8}}{3}$. **8.** (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\sqrt{3}$. (E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

9. (A) –2/3. (B) –2/3. (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (D) 2/3. (E) 2/3. (F) 2/3. (G) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. (H) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **10.** (A) 1/3. (B) –1/3. (C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) 1/3. (E) 1/3. (F) –1/3. (G) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (H) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **11.** (A) $2\sqrt{2}$. (B) $-2\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $-2\sqrt{2}$. (E) $-2\sqrt{2}$. (F) $2\sqrt{2}$. (G) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. (H) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.** (A) –sen70º. (B) cos40º. (C) tg70º. (D) sen20º. (E) cos70º. (F) tg20º. (G) sen75º. (H) –cos10º. (I) –tg20º. (J) sen10º. (K) tg40º. (L) sen55º. (M) –cos30º. (N) –tg80º. (Ñ) –sen90º. (O) –cos60º. (P) –tg40º. (Q) –sen90º. (R) cos0º. (S) –tg80º. **13.** (A) {210º, 330º} + k·360º. (B) {120º, 240º} + k·360º. (C) 135º + k·180º. (D) {105º, 165º} + k·180º. (E) {60º, 120º} + k·180º. (F) 67.5º + k·90º. (G) {70º, 110º} + k·120º. (H) {40º, 80º} + k·120º. (I) 45º + k·60º. (J) {420º, 660º} + k·720º. (K) {240º, 480º} + k·720º. (L) 270º + k·360º. **14.** (A) P = $3\sqrt{3}$R, A = $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. (B) P = $4\sqrt{2}$R, A = $2R^2$. (C) P = 6R, A = $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. **15.** (A) P = $6\sqrt{3}$R, A = $3\sqrt{3}R^2$. (B) P = 8R, A = $4R^2$. (C) P = $4\sqrt{3}$R, A = $2\sqrt{3}R^2$.

16. Lados iguales: R(tg30º+ tg75º), base: 2Rtg75º, altura: Rtg30º tg75º. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$m, $\frac{9\sqrt{3}}{8}m^2$.

18. 50/tg22.5º = $25\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$. **21.** 6cos36º. **22.** 0.5066 m^2. **23.** $12\sqrt{3}$ m^2. **24.** 10/3 m. **26.** y = 2x.

28. 23.66 m. **29.** 6.2 km. y $10\sqrt{3}$ km. **30.** $10\sqrt{7}$ km y $30\sqrt{7}$ km. **31.** (A) 3.95 y 7.42 cm. (B) 6.43 cm. (C) 25.39 cm^2. **32.** (A) 16.27 km. **(**B) 12.47 km. **33.** (A) 6.96 y 14.2 cm. (B) 27.5º y 13.08º. **34.** 5/2 cm^2. **36.** 20.67 m. **37.** (A) 76.4º. (B) 5.68 h; 34.09 km y 45.45 km. **38.** 3.89 m. **39.** 5 m. **40.** 171 m. **41.** 8.85 y 10.85 cm; 8.31 cm. **42.** (A) 76.41º. (B) 62.09º y 41.5º. **43.** (A) 7.31 y 11.2 km. (B) 5.6 km. **44.** 20 m. **45.** 36.87º. **46.** (A) 6.43 m. (B) 0.6 m. **47.** 40.9º. **48.** 34.26º. **49.** 36.87º y 53.13º; 7.2 m. **50.** (A) 70.69 m. (B) 19.85º. **51.** (A) 186.15 m. (B) 40.73º. (C) 233.8 m. **52.** x = 10.78, y = 8.31. **53.** 4.32 km. **54.** 4948.70 m.

55. 4.51 m. **56.** 4.23, 8.19 y 5.42 km. **57.** (A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. (B) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$. (C) $-4\sqrt{5}$. (D) $\frac{2}{3}$. **58.** (A) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$. (B) $\frac{1}{9}$. (C) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$. **59.** (A) $\frac{2}{3}$. (B) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$. (C) $\frac{22}{27}$. **60.** (A) 4/5. (B) –24/25. (C) 336/625. (D) senα/2.

61. (A) –7/25. (B) 117/125. (C) –527/625. **62.** (A) $-\frac{5}{12}$. (B) 5. (C) $-\frac{120}{119}$. (D) $-\frac{2035}{828}$. (E) $-\frac{28560}{239}$.

63. (A) –3/4. (B) 1/7. (C) –24/7. (D) 117/44. **64.** (A) 56/65. (B) 33/65. (C) 16/65. (D) 63/65. (E) 56/33. (F) 16/63. **65.** 1; $\alpha + 2\beta = 90º$. **66.** –9/16. **68.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha - \beta = 45º$. **69.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha - \beta = 45º$. **70.** 2 y 1. **74.** 1/3.

82. (A) 120º y 240º. (B) 240º y 300º. (C) 45º y 315º. (D) 45º y 135º. (E) 30º y 210º. (F) 60º y 240º. (G) 120º y 300º. (H) 45º y 225º. (I) 135º y 225º. (J) 225º y 315º. (K) 135º y 315º. (L) 150º y 330º. **83.** (A) 95.7º y 264.3º. (B) 41.8º y 138.2º. (C) 36.9º y 323.1º. (D) 233.1º y 306.9º. (E) 63.4º y 243.4º. (F) 89.4º y 269.4º (G) 89.9º y 269.9º. (H) 90.1º y 270.1º. **84.** (A) 225º y 315º. (B) 2025º y 2115º. (C) 5π/4, 7π/4, 45π/4 y 47π/4.
85. (A) 60º + k·360º, 300º + k·360º. (B) 45º + k·180º. (C) 30º + k·360º, 150º + k·360º. (D) 90º + k·360º.

(E) 30º + k·360º, 150º + k·360º. (F) 120º + k·360º, 240º + k·360º. (G) 135º + k·180º. (H) 60º + k·180º.
86. (A) x = 60º + k·180º, 120º + k·180º. (B) x = 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 90º + k·360º. **87.** (A) 0º y 360º. 120º, 240º. (B) 2040º. (C) 34π/3. **88.** (A) 60º + k·360º, 120º + k·360º, 240º + k·360º, 300º + k·360º. (B) π/3 + 2kπ, 2π/3 + 2kπ, 4π/3 + 2kπ, 5π/3 + 2kπ. **89.** 15º, 75º, 105º, 165º, 195º, 255º, 285º, 355º. **90.** 9º + k·72º, 27º + k·72º. **91.** 45º, 225º, 585º, 765º. **92.** (A) 45º + k· 180º, arctg2 + k·180º. (B) 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) 60º + k·360º, 120º + k·360º. **93.** (A) 0º + k· 180º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (B) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (C) k·180º, 60º + k·180º, 120º + k·180º.
94. (A) y (B): 60º + k·180º, 120º + k·180º. (C) 45º + k·90º. (D) 30º + k·180º, 150º + k·360º. (E) 45º + k·90º. (F) 30º + k·180º, 150º + k·180º. (G) 45º + k·90º. (H) 54.7º + k·180º, 125.3º + k·180º. **95.** (A) k·90º. (B) k·180º, 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) k·180º, 30º + k·360º, 150º + k·360º. (D) 90º + k·360º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (E) 180º + k·360º, 60º + k·360º, 300º + k·360º. (F) 270º + k·360º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (G) k·180º, 153.4º + k·180º. (H) 45º + k·180º, 123.7º + k·180º. (I) 45º + k·180º. (J) 63.4º + k·180º. K) 45º + k·90º. (L) 60º + k·180º, 120º + k·180º. (M) k·180º. (N) k·180º, 135º + k·180º. (Ñ) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (O) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (P) k·180º. (Q) 45º + k·90º. (R) 60º + k·180º, 120º + k·180º. (S) 45º + k·360º. **96.** 30º, 45º, 135º, 150º, 210º, 225º, 315º, 330º.
97. (A) {90º, 120º, 240º, 270º} + k·360º. (B) {30º, 150º, 270º} + k·360º. (C) {30º, 150º, 90º, 270º} + k·360º. (D) k·90º. (E) {120º, 180º, 240º} + k·360º. (F) {0º, 60º, 120º} + k·180º. (G) {30º, 150º, 199.47º, 340.53º} + k·360º. (H) k·60º. (I) k·180º, {15º, 75º} + k·90º. (J) k·60º. (K) k·180º, {60º, 300º} + k·360º. (L) {30º, 90º, 150º} + k·360º.
98. 30º. **100.** (A) $a = \sqrt[4]{2} \simeq 1.189\,\mathrm{m}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \simeq 0.841\,\mathrm{m}$. (C) base = $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4} \simeq 0.297$ m, altura = $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{2}} \simeq 0.210$ m. Es inmediato que los triángulos son isósceles con el ángulo desigual de 45º.

BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Funciones

educàlia editorial

BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Funciones

educàlia
editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-03-9

Depósito legal: V-3239-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 1

Funciones elementales

1.1 Correspondencias

Elementos de muy diversos conjuntos son relacionados en la vida cotidiana: personas con números (como edades, pesos o longitudes) o con letras (nacionalidad, NIF), países con continentes o idiomas, pero sobre todo, números con números (pesos con longitudes, temperaturas con latitudes, ...). Los conceptos que vamos a estudiar, **correspondencia** y posteriormente **función,** se utilizan para establecer estas relaciones.

➢ Definición de correspondencia

Llamamos ***correspondencia*** a cualquier relación entre elementos de dos conjuntos, A y B.
El primero considerado, A, se llama ***conjunto inicial*** y el segundo, B, ***conjunto final***.
Utilizaremos letras como f, g, h... para representar las correspondencias. Así, la expresión

$$\mathbf{f: A \to B}$$

se leerá **"f es una correspondencia entre el conjunto inicial A y el final B"**.

Al establecer una correspondencia debemos indicar los elementos de ambos conjuntos relacionados entre sí, que constituyen un conjunto de **parejas ordenadas**, la primera del conjunto inicial y la segundo del final, llamado ***grafo de la correspondencia***, **G**.

El grafo es un subconjunto del conjunto de todas las posibles parejas ordenadas que se pueden formar con elementos A y B, el llamado ***producto cartesiano***, **A × B**:

$$\mathbf{G \subset A \times B}$$

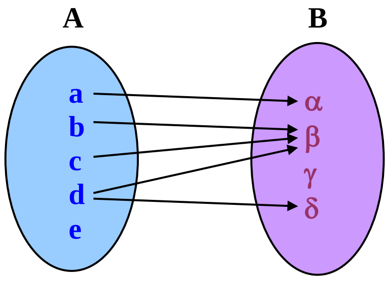
Ejemplo 1

Un grupo excursionista A, constituido por 5 chicas que llamamos a, b, c, d, e, acuerda comunicarse por correo con otro grupo B, constituido por 4 chicos que llamamos α, β, γ, δ. Las chicas envían los siguientes correos: a escribe a α, b y c escriben a β y d escribe a β y δ.

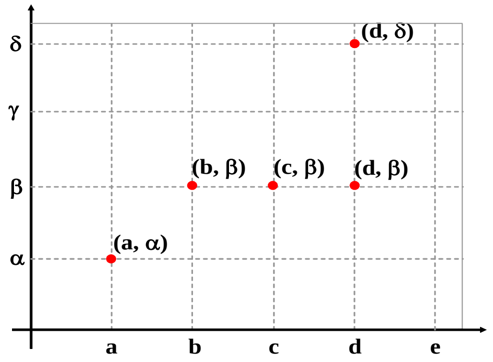
Hemos establecido una correspondencia f, entre el conjunto inicial A de chicas excursionistas y el final B de chicos excursionistas, consistente en los correos que las chicas envían a los chicos, de grafo

$$\mathbf{G_f = \{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \beta), (d, \beta), (d, \delta)\}}$$

que representamos gráficamente de dos formas, la primera mediante ***diagramas de Venn***, uniendo con una flecha cada par de elementos relacionados y la segunda mediante un ***sistema de ejes cartesianos***, representando cada par de elementos relacionados como un punto del plano (en el eje de abscisas situamos los elementos del conjunto inicial y en el de ordenadas los del conjunto final).



Diagramas de Venn



Orígenes e imágenes

En una correspondencia f consideramos todos los elementos del grafo, los pares ordenados.

En ellos, llamamos ***origen*** o ***antiimagen*** al primer elemento del par e ***imagen*** o ***valor*** al segundo elemento del par.

Consideramos la correspondencia f del ejemplo 1, de grafo G_f = { **(a, α), (b, β), (c, β), (d, β), (d, δ)** }.

Del par (**b, β**) deducimos que **"β es imagen de b"** y **"b es origen de β"**.

Del par (**d, β**) deducimos que **"β es imagen de d"** y **"d es origen de β".**

Esta diferenciación nos conduce a las siguientes definiciones.

Consideramos la correspondencia **f: A → B** de grafo **G**.

- Dado **x∈A,** el ***conjunto de las imágenes o valores de*** **x**, denotado por **f(x)**, está constituido por los elementos de B relacionados con x:

$$\mathbf{f(x) = \{y \in B, \text{ tal que } (x, y) \in G\}}$$

- Dado **y∈B,** el ***conjunto de los orígenes o antiimágenes de*** **y**, denotado por $\mathbf{f^{-1}(y)}$, está constituido por los elementos de A relacionados con y:

$$\mathbf{f^{-1}(y) = \{x \in A, \text{ tal que } (x, y) \in G\}}$$

De los datos del ejemplo 1, deducimos los siguientes **conjuntos de imágenes**:

$$f(\mathbf{a}) = \{\alpha\} = \alpha \qquad f(\mathbf{b}) = \beta \qquad f(\mathbf{c}) = \beta \qquad f(\mathbf{d}) = \{\beta, \delta\} \qquad f(\mathbf{e}) = \varnothing$$

Cuando los conjuntos de imágenes son unitarios, no se escriben entre llaves.

También tenemos los siguientes **conjuntos de orígenes** o antiimágenes:

$$f^{-1}(\alpha) = \mathbf{a} \qquad f^{-1}(\beta) = \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \qquad f^{-1}(\gamma) = \varnothing \qquad f^{-1}(\delta) = \mathbf{d}$$

Dominio y recorrido

Consideramos la correspondencia f: A → B.

- Llamamos ***dominio de la correspondencia*** **f,** representado por $\mathbf{D_f}$, al subconjunto de elementos del conjunto inicial A que poseen alguna imagen.
- Llamamos ***recorrido o rango de la correspondencia*** **f,** representado por $\mathbf{R_f}$, al subconjunto de elementos del conjunto final B que poseen algún origen.

Tomamos el grafo de la correspondencia del ejemplo 1: G_f = {**(a, α), (b, β), (c, β), (d, β), (d, δ)**}.

El dominio de f lo constituyen los orígenes de los elementos de B, mientras que el recorrido lo constituyen las imágenes de los elementos de A:

$$\mathbf{D_f = \{a, b, c, d\}} \subset A \qquad \mathbf{R_f = \{\alpha, \beta, \delta\}} \subset B$$

1 Halla el producto cartesiano A×B constituido con los elementos de los conjuntos A y B del ejemplo 1.

2 Si A = B = {1, 2, 3, …, 10}, considera la correspondencia que relaciona cada número con sus divisores propios (ni el 1 ni él mismo). Calcula la imagen de cada elemento de A y el origen de cada elemento de B. Obtén el dominio y el recorrido.

➤ Expresiones para una correspondencia

Ejemplo 2

Cualquier ecuación con 2 incógnitas define dos correspondencias; por ejemplo, la ecuación de la circunferencia con centro (0, 0) y radio 5, $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$, define una correspondencia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grafo

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x^2 + y^2 = 25}\}$$

al considerar los elementos **x** como conjunto inicial (la otra correspondencia surge si son los elementos de **y** los que constituyen el conjunto inicial).

Los pares de números reales relacionados son las soluciones de dicha ecuación. Dichos números deben estar comprendidos entre –5 y 5, por lo que el dominio y el recorrido de esta correspondencia es el mismo:

$$\mathbf{D_f = R_f = [-5, 5]}$$

Obtenemos algunas imágenes de elementos del dominio:

- Para **x = 3** tenemos 2 imágenes que se obtienen al resolver la ecuación de incógnita **y**:

$$3^2 + y^2 = 25 \quad \to \quad y^2 = 16 \quad \to \quad y = \pm 4 \quad \to \quad \mathbf{f(3) = \{-4, 4\}}.$$

- En general, las imágenes de cualquier valor **x** del dominio las obtenemos de la misma forma:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \to \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2} \quad \to \quad f(x) = \left\{-\sqrt{25 - x^2}, \sqrt{25 - x^2}\right\}.$$

La correspondencia f se puede expresar indicando las imágenes de cada elemento del dominio:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x) = \left\{-\sqrt{25 - x^2}, \sqrt{25 - x^2}\right\}} \quad \textbf{para} \quad \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

De esta expresión resulta fácil calcular cualquier imagen; por ejemplo:

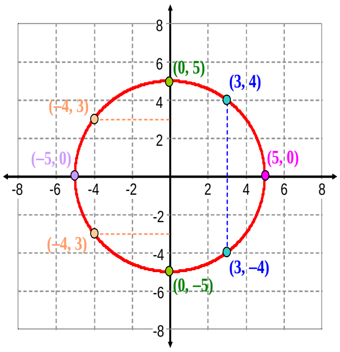
$$f(0) = \left\{-\sqrt{25 - 0^2}, \sqrt{25 - 0^2}\right\} = \{-5, 5\}$$

Observa que los valores $x = 5$ y $x = -5$ solo tienen una imagen y no dos pues ambas raíces son iguales:

$$f(5) = \left\{-\sqrt{25 - 5^2}, \sqrt{25 - 5^2}\right\} = \{0\} \qquad f(-5) = \left\{-\sqrt{25 - (-5)^2}, \sqrt{25 - (-5)^2}\right\} = \{0\}$$

La siguiente tabla contiene algunos elementos del grafo que representamos en la gráfica:

Conjuntos de imágenes	Pares de la gráfica
f(0) = {–5, 5}	(0, –5) (0, 5)
f(3) = {–4, 4}	(3, –4) (3, 4)
f(–4) = {–3, 3}	(–4, –3) (–4, 3)
f(5) = {0}	(5, 0)
f(–5) = {0}	(–5, 0)



3 Obtén las imágenes y el dominio de las correspondencias que definen las ecuaciones siguientes tomando x como elemento del conjunto inicial:

(A) $2x + 3y = 5$ (B) $xy + x = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ (E) $y^2 = 4x$

4 Repite la actividad anterior si la variable y corresponde al conjunto inicial.

1.2 Funciones

Una ***función*** es cualquier correspondencia que verifique:

- **Los conjuntos inicial y final son numéricos** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) **o sus productos cartesianos.**
- **Todo elemento del conjunto inicial posee, a lo sumo, una imagen.**

Ejemplo 3

Supongamos que el dueño de una tienda de calzado tiene mercancías entre 10 y 50 euros. En período de rebajas efectúa un descuento del x % para cada precio x.

Edita pegatinas con el precio inicial y el final (rebajado), estableciendo de este modo una correspondencia entre el conjunto A de precios iniciales de los zapatos (entre 10 y 50) y el conjunto de precios finales rebajados B. Algunos elementos del grafo son (10, 9), (20, 6), (30, 21), (40, 24), (50, 25), pues:

Si el precio inicial es 10 € la rebaja del 10 % produce un precio rebajado de 10 – (10 % de 10) = 9 €.
Si el precio inicial es 20 € la rebaja del 20 % produce un precio rebajado de 20 – (20 % de 20) = 16 €.

Antes: 10 €	Antes: 20 €	Antes: 30 €	Antes: 40 €	Antes: 50 €
Ahora: 9 €	Ahora: 16 €	Ahora: 21 €	Ahora: 24 €	Ahora: 25 €

Obtenemos **una expresión matemática para definir la correspondencia**:

Llamamos **x** al precio inicial e **y** al precio final, obtenido este último restando el descuento del x %:

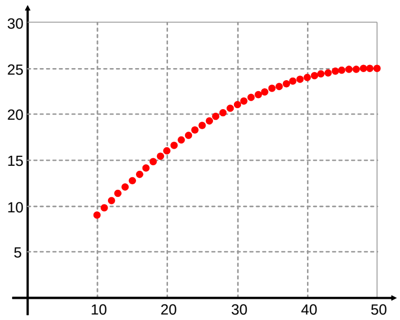
$$y = x - \frac{x}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y = x - 0.01\,x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f(x) = x - 0.01\,x^2}$$

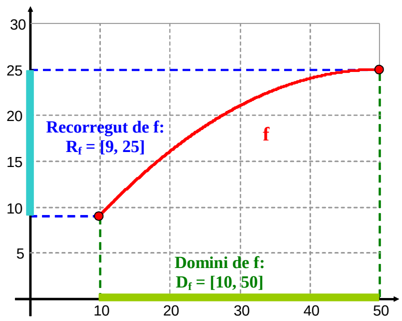
Queda establecida una correspondencia entre dos conjuntos numéricos f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (consideramos que cualquier número real puede ser un precio), en la que cada elemento del dominio ($0 \le x \le 50$) tan solo tiene una imagen:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \mathbf{f(x) = x - 0.01\,x^2} \quad \text{para } \mathbf{10 \le x \le 50}$$

En la ***tabla de valores*** expresamos algunos pares de elementos relacionados que trasladamos, a continuación, a la gráfica. En la primera gráfica están representados todos los precios iniciales con valores enteros entre 10 y 50 €, y sus precios finales, pero la gráfica completa es la segunda, en la que rellenamos todos los huecos entre cada pareja de puntos, considerando que cualquier número real entre 10 y 50 puede ser el precio de un par de zapatos.

x	y
10	9
15	12.75
20	16
25	18.75
30	21
40	24
50	25





5 Queremos comprar orégano y albahaca por un total de 20 €. El orégano tiene un precio de 4 €/kg mientras que la albahaca es de 2 €/kg. Llamamos x e y, respectivamente, a las cantidades de orégano y albahaca que podemos comprar. Obtén una ecuación que relacione estas cantidades, expresa y en función de x, obtén su dominio y su recorrido.

➢ Funciones reales de variable real

Consideramos f: A $\rightarrow$ B una función por lo que las imágenes f(x) constan de un único valor $\forall x \in D_f$, y el grafo de f es:

$$\mathbf{G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x), x \in D_f\}}$$

De las dos variables utilizadas para representar las parejas del grafo, llamamos:

- ***Variable independiente*** a la que representa los valores del dominio (en este caso **x**).
- ***Variable dependiente*** a la que representa los valores del recorrido (en este caso **y**).

Los conjuntos numéricos inicial y final considerados conducen a establecer una pequeña clasificación entre las funciones:

- Una función f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ se llama ***función entera*** (porque las imágenes son números enteros) ***de variable entera*** (porque los orígenes son números enteros).
- Una función g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama ***función real de variable real***.
- Una función h: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama ***función real de variable natural*** o ***sucesión de números reales***.
- Una función F: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama ***función real de variable vectorial***, donde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 4

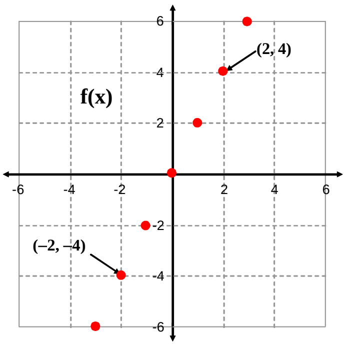
Vemos algunos ejemplos de funciones y alguna de sus representaciones gráficas:

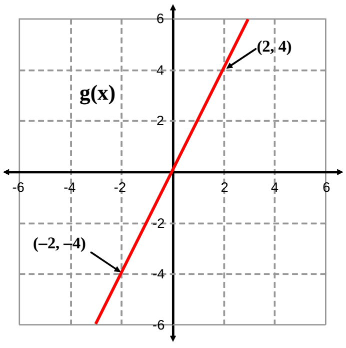
(A) f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como f(n) = 2n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (función entera de variable entera).

(B) g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como g(x) = 2x, $\forall x \in \mathbb{R}$, (función real de variable real).

(C) h: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, (función real de variable vectorial).

Esta última función relaciona a cada vector de $\mathbb{R}^2$ con su longitud.





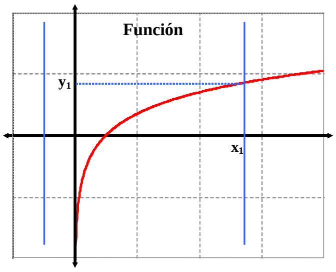
6 (A) Expresa la longitud L del lado de un cuadrado en función de su área x.
(B) Expresa la longitud D de la diagonal de un rectángulo de perímetro 10 en función de la longitud x de su base.
(C) Expresa el área A de un rectángulo en función de las longitudes x e y de sus lados.

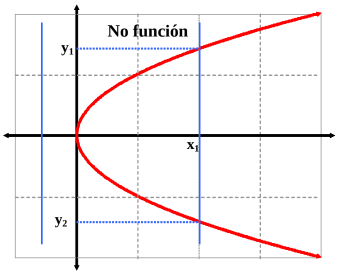
7 Establece la correspondencia que relaciona cada vector libre del plano con su pendiente. ¿Es una función? ¿Cuál es su dominio y recorrido? Obtén la imagen del vector (5, 3) y la antiimagen de 2.

➤ Propiedad de las gráficas de las funciones

Una correspondencia con conjuntos inicial y final $\mathbb{R}$ será una función si:

Cualquier recta vertical corta a su gráfica en un punto, a lo sumo.





Observa que en ambas gráficas tenemos rectas verticales que no cortan a las gráficas, es debido a que no todo número real pertenece al dominio. En la primera, las rectas verticales que pasan por los puntos del dominio cortan tan solo una vez a la gráfica mientras que en la segunda lo hacen dos veces en casi todos ellos.

Ejemplo 5

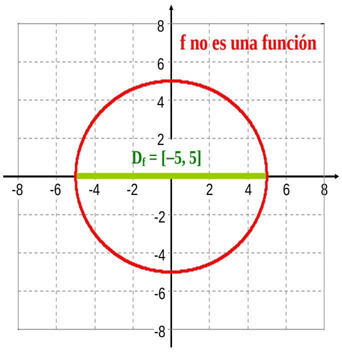
Como hemos visto en el ejemplo 2, a partir de la ecuación de la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$ obtuvimos la correspondencia f que expresábamos:

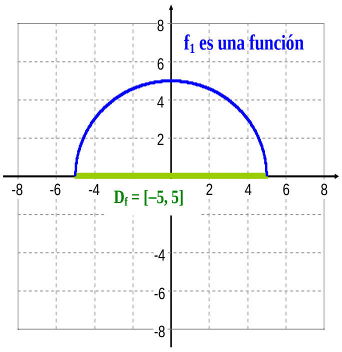
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x) = \left\{-\sqrt{25-x^2}, \sqrt{25-x^2}\right\}} \quad \textbf{para } \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

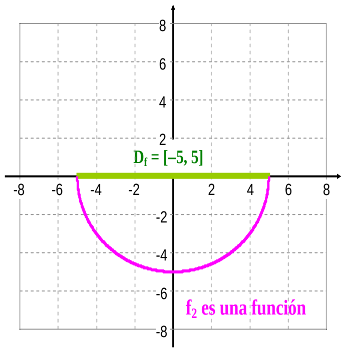
Esta correspondencia no es una función, pues cada elemento del dominio tiene dos imágenes. Sin embargo, la gráfica se puede descomponer en dos partes, representado cada una de ellas una función diferente:

$$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f_1(x) = \sqrt{25-x^2}} \quad \text{para } \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

$$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f_2(x) = -\sqrt{25-x^2}} \quad \text{para } \mathbf{-5 \le x \le 5}$$







8 De las correspondencias dadas por las ecuaciones siguientes, obtén las funciones que determinan (de modo análogo al ejemplo anterior) e indica los dominios respectivos:

(A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ (B) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (C) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ (D) $y^2 = 4x$

Realiza la representación gráfica correspondiente.

1.3 Funciones polinómicas

Una función **f:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ***polinómica de grado n*** si sus imágenes se expresan mediante un polinomio de grado n:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}, \text{ donde } a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

El **dominio** de todas ellas es $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$.

➢ Funciones polinómicas de grados 0 y 1

Las gráficas de las funciones polinómicas de grados 0 y 1 son rectas, y sus expresiones son:

(A) **f(x) = mx + n**, con m ≠ 0, que llamamos ***funciones afines***, donde:

- El coeficiente **m** es la **pendiente de la recta** e indica su inclinación.
- El coeficiente **n** es la **ordenada en el origen** e indica el punto de corte con el eje OY. Si n = 0, la función afín se llama ***función lineal.***

(B) **f(x) = n**, que llamamos ***funciones constantes***. Son rectas horizontales (pendiente nula).

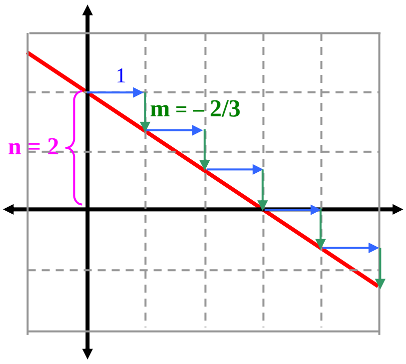
Ejemplo 6

Representamos gráficamente la función afín dada por:

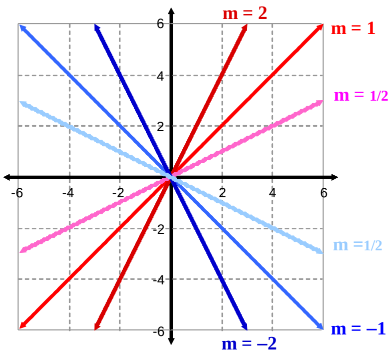
$$\mathbf{f(x) = -\frac{2}{3}x + 2}$$

La ecuación que representa dicha función es $\mathbf{y = -\frac{2}{3}x + 2}$, que es la **ecuación explícita de una recta**. Su pendiente y su ordenada en el origen son respectivamente:

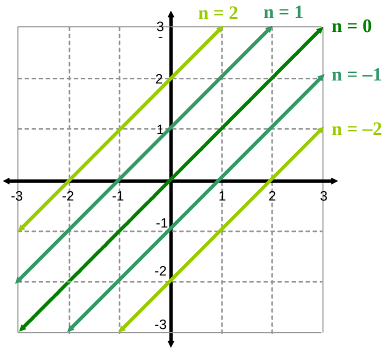
$$\mathbf{m} = -\frac{2}{3} \qquad \mathbf{n = 2}$$



A continuación tenemos representaciones gráficas de funciones afines para distintos valores de m y n:



f(x) = mx (m = ±1/2, ±1, ±2)



f(x) = x + n (n = 0, ±1, ±2)

Observa que, manteniendo el mismo valor de n (n = 0 en el primer dibujo), las rectas pasan por el origen y tienen diferente pendiente. Manteniendo el mismo valor de m (m = 1 en el 2.º dibujo) las rectas son todas paralelas.

Ejemplo 7

Tres empresas de alquiler de vehículos ofrecen a sus clientes las siguientes condiciones contractuales:

Empresa A: 50 € por día.
Empresa B: 10 € por día, más 0.2 € por km.
Empresa C: 20 € por día, más 0.1 € por km.

Un cliente quiere alquilar un coche durante 10 días.

(A) Si **x** es el número total de km recorridos en 10 días, expresamos 3 funciones que representen **el coste** del alquiler del vehículo en cada empresa, en función de x.

(B) Comparamos las funciones para determinar qué empresa conviene contratar según los km que realicemos.

(A) Llamamos f_A, f_B y f_C a las funciones que representan los costes en función de los km recorridos, en los 10 días, para la empresa A, B y C, respectivamente. Del enunciado deducimos:

$$\mathbf{f_A(x) = 500 \qquad \text{para } x \geq 0}$$
$$\mathbf{f_B(x) = 100 + 0.2x \qquad \text{para } x \geq 0}$$
$$\mathbf{f_C(x) = 200 + 0.1x \qquad \text{para } x \geq 0}$$

(B) Vemos que si el cliente recorre pocos km le conviene la empresa C, pero si recorre muchos le conviene A.

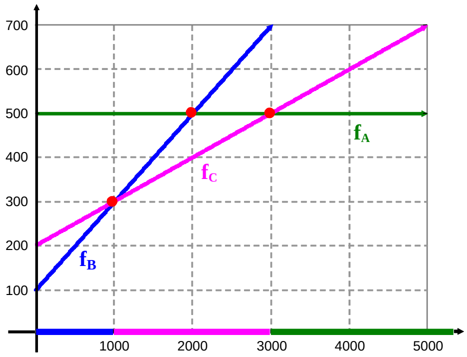
Para resolver la cuestión representamos gráficamente las funciones: "si una recta queda debajo de las otras dos es que la función que representa tiene sus imágenes menores". Por tanto, el precio es menor para la recta que se dibuja por debajo. Los puntos de intersección de las rectas nos proporcionan los valores de x para los que los costes son los mismos; a partir de ellos, podemos decidir la empresa que conviene.

$$f_A(x) = f_B(x) \quad \rightarrow \quad 500 = 100 + 0.2x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2000}$$
$$f_A(x) = f_C(x) \quad \rightarrow \quad 500 = 200 + 0.1x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 3000}$$
$$f_B(x) = f_C(x) \quad \rightarrow \quad 100 + 0.2x = 200 + 0.1x \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 1000}$$

Si $0 \leq x \leq 1000$ conviene la empresa B.

Si $1000 \leq x \leq 3000$ conviene la empresa C.

Si $x \geq 3000$ conviene la empresa A.



9 Representa gráficamente las siguientes funciones afines:
(A) $f(x) = 2x - 3$ (B) $f(x) = 2x + 3$ (C) $f(x) = -2x+3$ (D) $f(x) = -2x-3$

10 ¿Cuál es la función afín cuya gráfica pasa por los puntos A(2, –3) y B(10, 1)? ¿Y por A(0, –3) y B(–3, 0)?

11 Halla las funciones, de gráficas paralelas a las rectas del ejercicio anterior, que pasan por el punto A(1,2).

12 Una persona solicita un préstamo para cancelar un año después. Las condiciones del banco A son una comisión de 50 euros más un 10 % de interés anual. Las condiciones del banco B son una comisión de 100 euros más un 5 % de interés anual. Si llamamos x a la cantidad que solicita al banco, se pide:
(A) Expresa, para cada banco, el coste del préstamo en función de x.
(B) Representa gráficamente las anteriores funciones obtenidas e indica en qué banco conviene solicitar el préstamo.

➢ Funciones polinómicas de grado 2

Son llamadas también ***funciones cuadráticas.*** Su expresión general es:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Su representación gráfica es una **parábola**, con **vértice** en el punto de abscisa $\mathbf{x_v = -\dfrac{b}{2a}}$.

Ejemplo 8

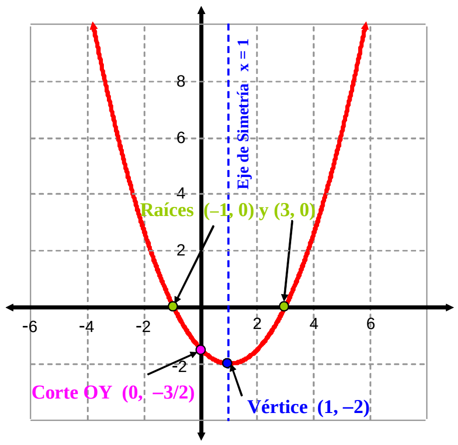
Representamos gráficamente la función cuadrática dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

- Obtenemos el punto de corte con el eje OY, que es en el punto de abscisa $x = 0$: $(0, -3/2)$.
- Obtenemos los puntos de corte (si los hay) con el eje OX, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$:

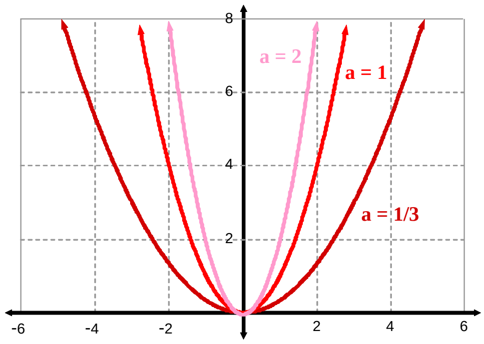
$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3,\ x = -1 \quad \rightarrow \quad (3, 0)\ \text{ y }\ (-1, 0)$$

- Obtenemos la abscisa del vértice, $x_v = -\frac{b}{2a} = 1$, luego el vértice es $V(x_v, f(x_v)) = V(1, -2)$.
- Calculamos al menos 5 puntos de la gráfica (entre ellos el vértice y los cortes con los ejes). Como estas parábolas son **simétricas respecto de la recta vertical que pasa por su vértice**, es conveniente dar valores de x en la tabla equidistantes respecto del vértice, pues la imagen será la misma:

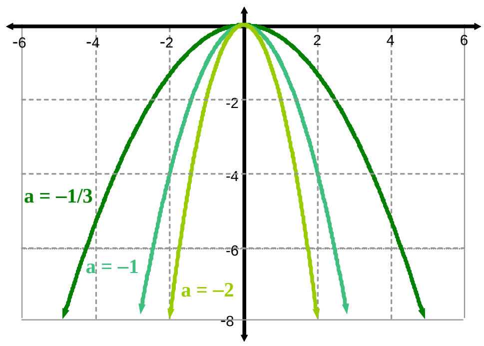
x	f(x)
–2	5/2
–1	0
0	–3/2
$x_v = 1$	–2
2	–3/2
3	0
4	5/2



A continuación representamos gráficas de funciones cuadráticas para **b = c = 0** y distintos valores de a.
Si a > 0, la parábola dirige sus ramas hacia arriba, y si a < 0, hacia abajo. La magnitud de |a| está directamente relacionada con la apertura de las ramas: a mayor valor, menor apertura.



Gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a = 1, 2, 1/3$



Gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a = –1, –2, –1/3$

Ejemplo 9

Un club de tenis tiene 100 socios que pagan una cuota anual de 1000 €.
Se realiza una campaña para captar nuevos socios. Todos se implican puesto que por cada socio nuevo se acuerda disminuir la cuota anual en 5 € a cada uno.
Llamamos x al número de socios nuevos y C(x) al capital total obtenido por cuotas anuales.

(A) Obtenemos la expresión general de C(x) y su representación gráfica.
(B) ¿Cuál es el número de socios para el que se obtiene mayor capital? ¿Y cuál es el valor de éste?
(C) ¿Para qué valores de x la campaña de captación de socios hace aumentar el capital anual del club?

(A) Con x socios nuevos, el número total de socios es de **100 + x**, y la cuota anual de cada socio pasa a ser de **1000 – 5x** euros, con lo que el capital que obtiene el club es:

$$\mathbf{C(x) = (100 + x)(1000 - 5x)}$$

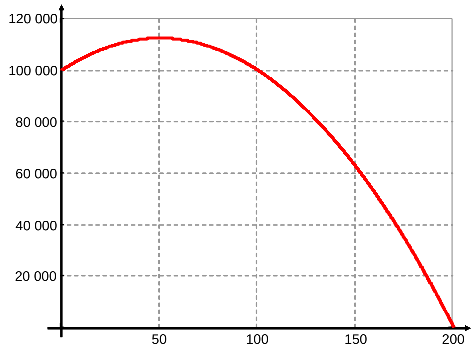
Si efectuamos las operaciones, obtenemos una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola:

$$\mathbf{C(x) = -5x^2 + 500x + 100000}$$

Pero se debe verificar que $\mathbf{x \geq 0}$ y **entero** (número de socios nuevos) y $\mathbf{C(x) \geq 0}$ (pues es el capital).

Esto trae como consecuencia que el dominio de la función C(x) son los valores enteros x para los que la parábola queda dibujada en el primer cuadrante (en realidad la parábola no es tal, solo son puntos no conexos de ella).

x	C(x)
0	100 000
25	109 375
50	112 500
75	109 375
100	100 000
150	62 500
200	0



(B) El mayor capital se obtiene en el vértice de la parábola, cuya coordenada x es:

$$\mathbf{x_v} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} = -\frac{500}{2\cdot(-5)} = \mathbf{50}$$

y el capital máximo se obtiene en dicho valor, **C(50) = 112500 €**.

(C) El capital total del club, sin admitir nuevos socios, es C(0) = 100000 €.

Los valores de x que permiten aumentar el capital del club son las soluciones de la inecuación

$$C(x) > 100000 \quad \rightarrow \quad -5x^2 + 500x + 100000 > 100000 \quad \rightarrow \quad -5x(x - 100) > 0$$

que se verifica para $\mathbf{0 < x < 100}$.

Por tanto, el capital total aumenta, respecto al valor inicial, para los valores de **x = 1, 2, 3, ..., 99**.

13 Representa gráficamente las funciones cuadráticas:

(A) $f(x) = x^2 - 4$ (B) $g(x) = x^2 + 4$ (C) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8$ (D) $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

14 Encuentra la función cuadrática cuya gráfica pasa por los puntos A(2, 0), B(3, 0) y C(0,6). Encuentra también la que pasa por el punto A(0, 4) y tiene por vértice V(2, 2).

15 Expresa el área de un rectángulo de perímetro 50 en función de la longitud x de su base. ¿Qué función es?

1.4 Funciones racionales

Las funciones racionales tienen como expresión una ***fracción racional***, el cociente de dos polinomios p(x) y q(x):

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}$$

El **dominio** son todos los números reales excepto las raíces del polinomio del denominador:

$$\mathbf{D_f} = \mathbb{R} \sim \{\textbf{soluciones de la ecuación q(x) = 0}\}$$

Ejemplo 10

Calculamos los dominios de las siguientes funciones racionales:

(A) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ (B) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$ (C) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ (D) $F(x) = \dfrac{1}{x^3-x^2-2x+2}$

(A) El único valor de x para el que no existe imagen $f(x)$ es el que anula el denominador:

$$2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = 3/2$$

$$\mathbf{D_f} = \mathbb{R} \sim \{\text{soluciones de } 2x - 3 = 0\} = \mathbb{R} \sim \left\{ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \right\}$$

(B) La ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución real y, por tanto, no existe ningún valor que anule el denominador de la función $g(x)$, por lo que su dominio es:

$$\mathbf{D_g} = \mathbb{R}$$

(C) $D_h = \mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 = 0\}$.

Como $x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ o $x = -2$

$$\mathbf{D_h} = \mathbb{R} \sim \{\mathbf{-2, 2}\}$$

(D) $D_f = \mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R}: x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0\}$. Factorizamos la ecuación de tercer grado, por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{\mathbf{0}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 2x - 2 & x - 1 \\ \hline \mathbf{0} & x^2 - 2 \end{array} \quad \to \quad x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2)$$

Entonces: $x^3 - x^2 - 2x + 2 \underset{(1)}{=} 0 \iff (x-1)(x^2-2) = 0 \iff \begin{cases} x - 1 = 0 \to x = 1 \\ x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Por tanto $D_F = \mathbb{R} \sim \left\{ \mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}} \right\}$.

16 Calcula el dominio de las siguientes funciones racionales:

(A) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+4}$ (B) $g(x) = \dfrac{x+2}{x^3-4x}$ (C) $h(x) = \dfrac{x-4}{-x^2+9}$ (D) $t(x) = \dfrac{x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

(E) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$ (F) $g(x) = \dfrac{x}{x^3-2}$ (G) $h(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$ (H) $t(x) = \dfrac{x+1}{x^4-10x^2+9}$

Ejemplo 11

Se conoce por ***índice de complexión física*** **i** al cociente entre el peso **p** de una persona, en kg, y el cuadrado de su altura **x**, en metros. Definimos:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{x}^2}$$

Distinguimos cuatro tipos de complexiones, según los valores de i:

Complexión:	Delgada	Normal	Gruesa	Obesa
Valores de i:	$i \leq 22$	$22 \leq i \leq 27$	$27 \leq i \leq 32$	$i \geq 32$

Por ejemplo, si una persona pesa 70 kg y mide 1.75 m, entonces es de complexión normal, pues:

$$i = \frac{70}{(1.75)^2} = 22.8 \qquad y \qquad 22 \leq 22.8 \leq 27$$

- Si una persona pesa 80 kg el índice de complexión es una **función racional** que depende de su altura:

$$\mathbf{i(x)} = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{x}^2}, \quad \mathbf{x > 0}$$

Se trata de una función **decreciente**, pues el valor de **i** disminuye al aumentar el valor de x, como vemos en la tabla siguiente y en la gráfica posterior.

Valores de x:	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
Valores de i:	35.5	31.25	27.7	24.7	22.2	20
Complexión:	Obesa	Gruesa	Gruesa	Normal	Normal	Delgada

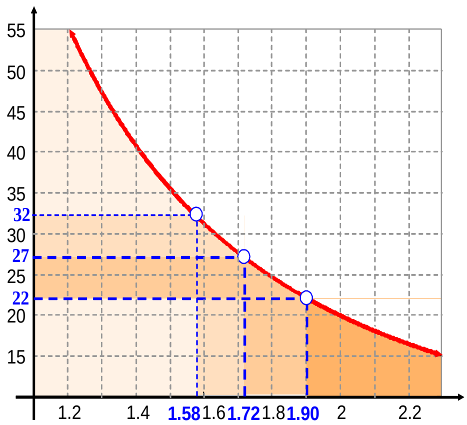
Para una persona de 80 kg, ¿cuáles serán los límites de la altura x que lo sitúan en los diferentes tipos de complexiones? A la vista de la gráfica, son obtenidas despejando x en la ecuación de la función.

Por ejemplo, la altura mínima para los delgados y máxima para los normales se obtiene de:

$$i = 22 \;\rightarrow\; 22 = \frac{80}{x^2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{80}{22} \;\rightarrow\; \mathbf{x} = \sqrt{\frac{80}{22}} \simeq \mathbf{1.90}$$

Mientras que la altura máxima para los obesos y mínima para los gruesos se obtiene de:

$$i = 32 \;\rightarrow\; 32 = \frac{80}{x^2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{80}{32} \;\rightarrow\; \mathbf{x} = \sqrt{\frac{80}{32}} \simeq \mathbf{1.58}$$



Obtenemos la siguiente tabla, para un peso de 80 kg:

Complexión:	Delgada	Normal	Gruesa	Obesa
Valores de la altura x:	$x \geq 190$	$1.72 \leq x \leq 1.90$	$1.58 \leq x \leq 1.72$	$i \leq 1.58$

17 Repite el ejemplo anterior para una persona con peso de 100 kg. Obtén los límites que corresponden a cada tipo de complexión.

➢ Funciones de proporcionalidad inversa

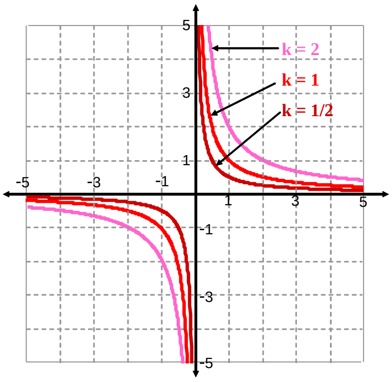
Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones racionales cuya expresión es:

$$\mathbf{f(x) = \frac{k}{x}}, \quad \text{con dominio } \mathbb{R}\sim\{0\}.$$

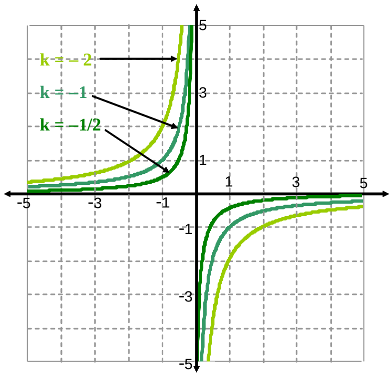
- El número no nulo **k** se llama ***constante de proporcionalidad inversa***.
- Las gráficas de estas funciones son ***hipérbolas***, con asíntota vertical **r: x = 0** y asíntota horizontal **s: y = 0**.

Veamos las gráficas de algunas funciones de proporcionalidad inversa, para distintos valores de k:

$\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$, para **k = 1**, **k = 2**, **k = 1/2**



$\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$, para **k = –1**, **k = –2**, **k = –1/2**



Ejemplo 12

Para llenar un depósito de 100 litros de agua disponemos de un grifo.

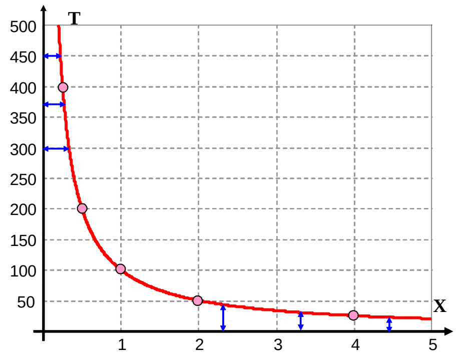
Si llamamos **x** a la velocidad de verter agua (capacidad del grifo), medida en litros por segundo, y **t** al tiempo necesario, en segundos, para llenar el depósito, ambas variables están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{x \cdot t = 100} \qquad (1)$$

Observa en la tabla que al aumentar la velocidad al doble el tiempo de llenado se reduce a la mitad, y viceversa. "Las variables son **inversamente proporcionales**" y el número **100 es la constante de proporcionalidad inversa**. Si x es la variable independiente, la función que proporciona el tiempo de llenado es

$$\mathbf{t(x)} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{x}}, \quad \text{para } x > 0.$$

x	t
0.25	400
0.5	200
1	100
2	50
4	25



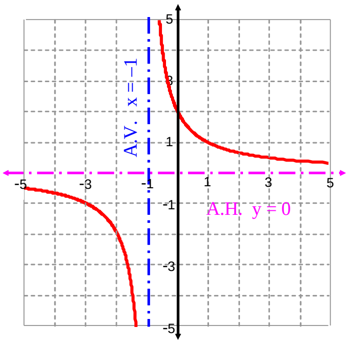
➤ Desplazamientos horizontales y verticales

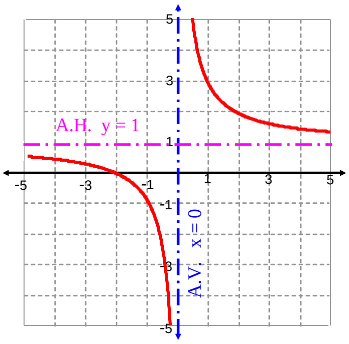
- La gráfica de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x-a}}$, con dominio $\mathbb{R} \sim \{a\}$, supone un desplazamiento respecto de la de proporcionalidad inversa de a unidades a la derecha. Su asíntota vertical es ahora **r: x = a**.
- La gráfica de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$, con dominio $\mathbb{R} \sim \{0\}$, supone un desplazamiento respecto de la de proporcionalidad inversa de b unidades hacia arriba. Su asíntota horizontal es **s: y = b**.
- La gráfica de la función racional $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{Cx+D}}$ es una hipérbola con dominio $\mathbb{R} \sim \left\{-\dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}\right\}$, y:

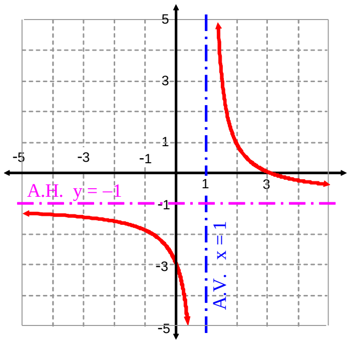
  (A) Asíntota vertical en **r: x =** $-\dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}$. (B) Asíntota horizontal en **s: y =** $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}$.

Representamos gráficamente las funciones racionales siguientes, y obtenemos las ecuaciones de sus asíntotas:

$f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2}{x} + 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{-x+3}{x-1}$







- La gráfica de f(x) = $\dfrac{2}{x+1}$, de dominio $\mathbb{R} \sim \{-1\}$, es un desplazamiento horizontal de –1 unidades de y = $\dfrac{2}{x}$ (hacia la izquierda), y sus asíntotas son r: **x = –1** y **s: y = 0.**
- La gráfica de g(x) = $\dfrac{2}{x}$ + 1, con dominio $\mathbb{R} \sim \{0\}$, es un desplazamiento vertical de 1 unidad de y = $\dfrac{2}{x}$, (hacia arriba), y sus asíntotas son r: **x = 0** y **s: y = 1.**
- La gráfica de h(x) = $\dfrac{-x+3}{x-1}$, con dominio $\mathbb{R} \sim \{0\}$, es una hipérbola con asíntota vertical r: x = 1 y asíntota horizontal s: y = –1, y resulta de dos desplazamientos, uno horizontal de 1 unidad y otro vertical de –1 unidad, de la hipérbola y = $\dfrac{2}{x}$. Esto lo podemos ver si efectuamos la división:

–x + 3	x – 1
2	– 1

$\rightarrow \quad -x + 3 = -1(x-1) + 2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{-x+3}{x-1} = -1 + \dfrac{2}{x-1}$

18 Un rectángulo tiene 1 000 m^2 de superficie. Establece una función que mida las dimensiones de un lado en función de las dimensiones del otro lado.

19 Dadas las funciones de proporcionalidad inversa f(x) = $\dfrac{5}{x}$ y g(x) = $\dfrac{-5}{x}$, desplaza 4 unidades hacia arriba y 2 hacia la izquierda las gráficas de dichas funciones. ¿Cómo son las nuevas expresiones?

20 Representa gráficamente las funciones: (A) f(x) = $\dfrac{x+3}{x-2}$ (B) $\dfrac{2x+4}{3x-6}$ (C) $\dfrac{2x-3}{3x+1}$

1.5 Correspondencia recíproca

Dada una correspondencia **f: A → B**, representamos por $\mathbf{f^{-1}}$ la ***correspondencia recíproca o inversa de* f,** que verifica:

- El conjunto inicial de f^{-1} es el final de f, y el conjunto final de f^{-1} es el inicial de f:

$$\mathbf{f^{-1}: B \to A}$$

- Los pares de elementos relacionados en f^{-1} son los de f pero cada par intercambia orden:

$$\mathbf{(x, y) \in G_f} \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{(y, x) \in G_{f^{-1}}}$$

Así pues, los orígenes de f^{-1} son las imágenes de f y viceversa, por lo que:

$$\mathbf{D_{f^{-1}} = R_f} \ \text{ y } \ \mathbf{R_{f^{-1}} = D_f}$$

Las gráficas de cualquier correspondencia y de su recíproca son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Ejemplo 13

Obtenemos la correspondencia recíproca de la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Su grafo es $G_f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5)...\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}: y = 2x + 1\}$

Entonces el de f^{-1} es $G_{f^{-1}} = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2)...\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x-1}{2}\right\}$

La ecuación de la correspondencia f^{-1} se obtiene cambiando x por y en la ecuación de f, y después despejando y:

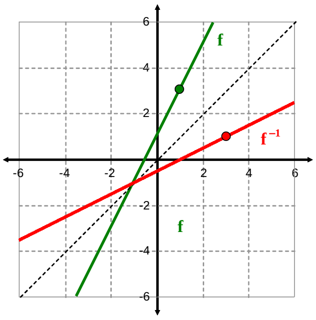
$$y = 2x + 1 \quad \to \quad x = 2y + 1 \quad \to \quad 2y = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x-1}{2}$$

Como la solución obtenida es siempre única, cada elemento tiene una única imagen, y por tanto la correspondencia inversa de la función f, que representamos por $\mathbf{f^{-1}}$, **es una función**:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9



x	y
1	0
3	1
5	2
7	3
9	4

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

La tabla de valores de f^{-1} se puede obtener intercambiando x por y en la tabla de valores de f, como hemos hecho en las tablas anteriores. Por eso las dos gráficas son simétricas respecto de la bisectriz y = x.

Dada una función f, la expresión general de su correspondencia inversa se obtiene:

- Cambiando x por y en la ecuación **y = f(x)**.
- Despejando la variable y en la ecuación **x = f(y)**.

➢ Funciones inyectivas

Decimos que una función es ***inyectiva*** si verifica la siguiente propiedad:

Cada elemento del recorrido tiene un único origen o antiimagen.

➢ Propiedades de las funciones inyectivas

Si f es una función inyectiva, entonces:

- Para cualquier elemento **y** del recorrido, la ecuación **f(x) = y solo tiene una solución x**.
- Toda recta horizontal corta a la gráfica en un único punto como máximo.
- La correspondencia recíproca de f es una función, que también es inyectiva, y que llamamos ***función recíproca* o *inversa de* f.**

Ejemplo 14

Obtenemos la correspondencia recíproca de la función $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, y comprobamos que no es inyectiva:

De la ecuación $y = x^2$ intercambiamos x por y, y despejamos y. Obtenemos la correspondencia recíproca:

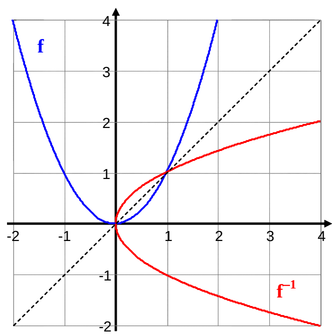
$$y = x^2 \;\rightarrow\; x = y^2 \;\rightarrow\; y^2 = x \;\rightarrow\; y = \pm\sqrt{x} \;\rightarrow\; \mathbf{f^{-1}(x) =} \pm\sqrt{x}$$

La correspondencia recíproca de $\mathbf{f(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}}$, es $\mathbf{f^{-1}(x) = \left\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right\},\ \forall x \geq 0}$.

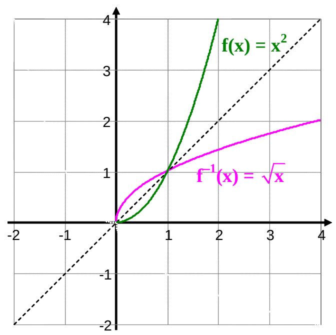
La función f no es inyectiva, porque cada valor del recorrido tiene dos orígenes y $\mathbf{f^{-1}}$ no es una función. Observa el primer dibujo.

Si consideramos la función $\mathbf{f(x) = x^2,\ \forall x \geq 0}$, cuya gráfica está en el segundo dibujo, f si que es inyectiva, y su correspondencia inversa es una función, que se llama ***función raíz cuadrada***:

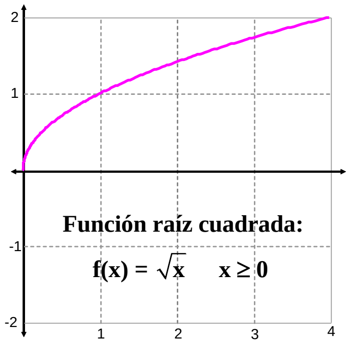
$$\mathbf{f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ \ x \geq 0}$$



f no inyectiva, $\mathbf{f^{-1}}$ no es función.



f inyectiva, $\mathbf{f^{-1}}$ es función.



21 Comprueba si son inyectivas las siguientes funciones y obtén sus correspondencias o funciones recíprocas:

(A) $f(x) = 3x - 4$ (B) $f(x) = x^4 - 1$ (C) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (D) $f(x) = x^2 + x$ (E) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$

22 Representa gráficamente y obtén el dominio y el recorrido de las funciones:

(A) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (B) $f(x) = \sqrt{x+1}$ (C) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ (D) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$ (E) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

1.6 Funciones definidas a trozos

Hasta este momento las expresiones que definen las funciones se obtienen de una ecuación que liga la variable independiente con la dependiente.

Existen muchas funciones que no pueden ser deducidas simplemente de una ecuación, requieren varias, cada una aplicable en determinadas circunstancias. Aparecen así las ***funciones definidas a trozos***.

Ejemplo 15

En el mercado de la telefonía móvil irrumpe una nueva empresa, TELEFONA S.A., que ofrece sus servicios con tarifas fijas. El precio del servicio se calcula en el recibo bimensual de la siguiente manera:

- Las primeras 15 horas contabilizadas tienen un precio de 1 euro por hora.
- El tiempo que excede de las 15 horas tiene un precio de 0.5 euros por hora.

La empresa considera el tiempo totalmente fraccionable en minutos, segundos…

¿Cuál será la **función gasto G**, en telefonía móvil, **dependiendo del tiempo acumulado t**, si contratamos los servicios de TELEFONA?

$$\text{GASTO} = \text{PRECIO UNITARIO} \cdot \text{TIEMPO}$$

(A) Si el tiempo acumulado t en llamadas no supera las 15 horas, el coste es de 1 euro por hora:

$$\text{si} \quad t \in [0, 15] \quad \rightarrow \quad G(t) = 1 \cdot t = t$$

(B) Si el tiempo acumulado t supera las 15 horas (y como máximo hay 1440 h en dos meses), el coste de las primeras 15 h es un euro por hora y el resto a 0.5 euros:

$$\text{si} \quad t \in]15, 1440] \quad \rightarrow \quad G(t) = 1 \cdot 15 + 0.5 \cdot (t - 15) = 7.5 + 0.5t$$

En resumen, la función gasto G se expresa como:

$$\mathbf{G(t)\!:}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{G(t)} = \begin{cases} \mathbf{t} & \mathbf{si} \quad \mathbf{0 \le t \le 15} \\ \mathbf{7.5 + 0.5t} & \mathbf{si} \quad \mathbf{15 < t \le 1440} \end{cases}$$

La anterior función se llama ***definida a trozos***, porque está constituida con **dos trozos de funciones distintas**:

$$\mathbf{G_1(t) = t} \ \text{ si } \ \mathbf{0 \le t \le 15} \qquad\qquad \mathbf{G_2(t) = 7.5 + 0.5t} \ \text{ si } \ \mathbf{15 < t \le 1440}$$

Para ver el cálculo de las imágenes de la función G, nos referimos a dos casos particulares:

- ¿Cuál es el gasto si empleamos un tiempo de t = 5.2 horas?

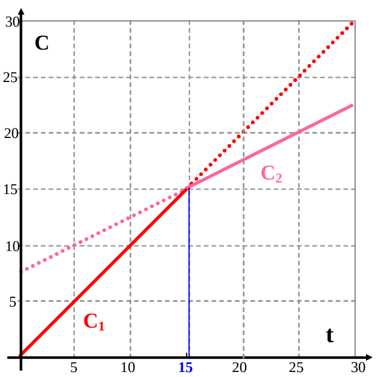
$$\text{Como} \quad 0 \le 5.2 \le 15 \quad \rightarrow \quad G(5.2) = G_1(5.2) = 5.2\ €$$

- ¿Y si empleamos un tiempo de t = 22.5 horas?

$$\text{Como} \quad 15 \le 22.5 \le 1440 \quad \rightarrow \quad G(22.5) = G_2(22.5) = 7.5 + 0.5 \cdot 22.5 = 18.75\ €$$

A continuación tenemos una tabla de valores de la función G(t) y la representación gráfica para $0 \le t \le 30$.

	t	C(t)
	0	0
C_1	5	5
	15	15
	16	15.5
	20	17.5
C_2	30	22.5
	1440	727.5



➢ El valor absoluto de una función

Llamamos ***función valor absoluto de* f**, que representamos por | **f** |, a la función definida a trozos:

$$|\mathbf{f(x)}| = \begin{cases} \mathbf{f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) \geq 0} \\ \mathbf{-f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) < 0} \end{cases}$$

En el caso particular de h(x) = x, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtenemos la ***función valor absoluto de* x:**

$$|h(x)| = |\,\mathbf{x}\,| = \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{-x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

Ejemplo 16

Representamos gráficamente las funciones:

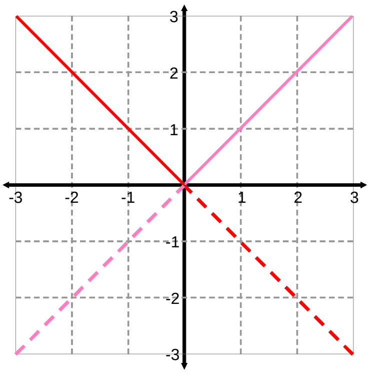
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

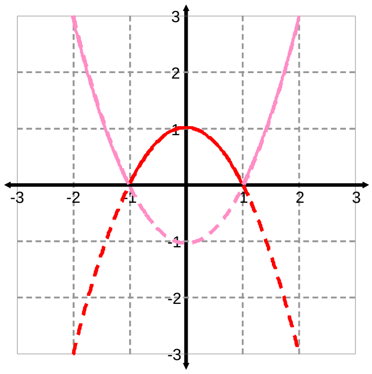
Como $x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1 \Rightarrow$ $\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 - 1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \geq 1 \text{ o } x \leq 1} \\ \mathbf{-x^2 + 1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{-1 < x < 1} \end{cases}$

Para representar f y g, hacemos lo propio (sobre los mismos ejes) con las funciones que definen sus ramas:

$f_1(x) = x$ y $\mathbf{f_2(x) = -x}$ $\qquad$ $g_1(x) = x^2 - 1$ y $\mathbf{g_2(x) = -x^2 + 1}$

Las gráficas de f y de g son, respectivamente, los "trozos" dibujados en trazo continuo.





23 Expresa una función que represente el coste (en euros) del agua doméstica en función del consumo realizado (en m^3) a partir de los siguientes datos:
(A) Los 15 primeros m^3 tienen un coste de 0.25 € por m^3.
(B) Los 30 siguientes m^3 cuestan a 0.40 € por m^3.
(C) A partir de los 45 m^3 cuestan a 1 €/m^3.

24 Representa gráficamente las funciones

(A) $f(x) = |2x - 3|$ (B) $g(x) = |x^2 - 3x - 4|$ (C) $h(x) = \left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ (D) $t(x) = \left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

1.7 Suma y diferencia de funciones

Consideramos las funciones f y g. Llamamos:

- ***Función suma de* f *y* g**, que representamos por **f + g**, a la función cuyas imágenes son:

$$\mathbf{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}$$

- ***Función diferencia de* f *y* g**, representada por **f – g**, a la función cuyas imágenes son:

$$\mathbf{(f - g)(x) = f(x) - g(x)}$$

Sus respectivos **dominios** son $\mathbf{D_{f+g} = D_f \cap D_g}$ y $\mathbf{D_{f-g} = D_f \cap D_g}$.

Ejemplo 17

En general existen muchas funciones que son suma de otras dos. Una de ellas es la función de costes totales de una empresa

$$C(x) = C_0 + C_v(x)$$

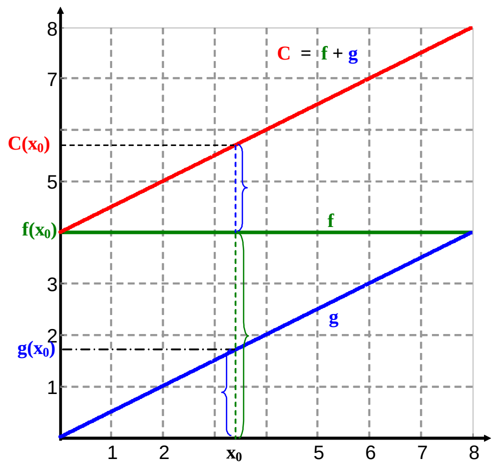
donde x representa las unidades producidas.

Esta función es la suma de la *función constante de costes fijos*, $f(x) = C_0$, y la *función lineal de costes variables* $g(x) = C_v(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = 5 = C_0$ y $g(x) = \frac{1}{2}x = C_v(x)$:

$$C(x) = f(x) + g(x) = 5 + \frac{1}{2}x$$

En un contexto económico como el presente, los dominios de f y g son [0, +∞[, luego el dominio de C(x) es [0, +∞[.



Ejemplo 18

Calculamos el dominio de la función $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-4}$.

Como h es la suma de las funciones racionales $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$ de dominios:

$$D_f = \mathbb{R}\sim\{\text{soluciones de } x - 1 = 0\} = \mathbb{R}\sim\{1\} \text{ y } D_g = \mathbb{R}\sim\{\text{soluciones de } x^2 - 4 = 0\} = \mathbb{R}\sim\{-2, 2\}.$$

Por tanto $\mathbf{D_h} = D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}\mathbf{\sim\{-2, 1, 2\}}$.

25 Obtén la expresión de las funciones suma y diferencia, y los dominios respectivos, en los siguientes casos:

(A) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-3}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-x}$ (C) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

26 Calcula el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x}$.

1.8 Producto y cociente de funciones

Consideramos las funciones f y g. Llamamos:

- ***Función producto de* f *y* g, f · g**, a la función cuyas imágenes son **(f · g)(x) = f(x) · g(x)**.
- ***Función cociente de* f *y* g, f/g**, a la función cuyas imágenes son **(f/g)(x)** = $\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$.

Sus respectivos **dominios** son $\mathbf{D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g}$ y $\mathbf{D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \sim \{\text{soluciones de } g(x) = 0\}}$.

Ejemplo 19

Consideramos las funciones, con dominio ℝ, definidas por:

$$f(x) = 2x \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

Calculamos las funciones producto y cociente de f y g:

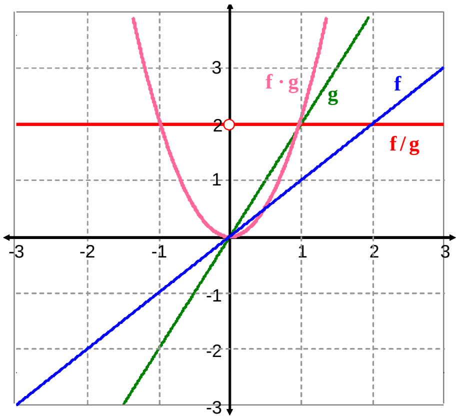
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot 2x = 2x^2$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x} = 2, \text{ siempre que } x \neq 0$$

pues g(0) = 0, y no podemos dividir por cero.

Deducimos que

$$\mathbf{(f \cdot g)(x) = 2x^2,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } (f/g)(x) = 2,\ \forall x \in \mathbb{R} \sim \{0\}}$$



Ejemplo 20

Calculamos el dominio de la función $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x} - 4}$.

Esta función es el cociente de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-2}, \text{ con dominio } D_f = [2, +\infty[\quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x} - 4, \text{ con dominio } D_g = [0, +\infty[.$$

Entonces $D_h = (D_f \cap D_g) \sim \{\text{soluciones de } \sqrt{x} - 4 = 0\}$. Pero $D_f \cap D_g = [2, +\infty[\cap [0, +\infty[= [2, +\infty[$, y

$$\sqrt{x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 16$$

Obtenemos:

$$\mathbf{D_h = [2, +\infty[\sim \{16\} = [2, 16[\cup]16, +\infty[.}$$

27 Obtén la expresión de las funciones producto y cociente, y los dominios respectivos, en los siguientes casos:

(A) $f(x) = x + 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (B) $f(x) = \sqrt{1-x},\ g(x) = \sqrt{1+x}$ (C) $f(x) = 1 + \sqrt{x},\ g(x) = 1 - \sqrt{x}$

28 ¿Son iguales los dominios de las funciones $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$?

1.9 Composición de funciones

Las operaciones suma, diferencia, producto y cociente son una extensión de las operaciones numéricas al conjunto de las funciones. La operación que definimos a continuación no tiene relación con los números, pero hay que decir que la mayoría de las funciones son compuestas de otras más elementales. Su importancia se verá a lo largo de los próximos capítulos.

Dadas dos funciones f y g, llamamos ***función compuesta de* f *y* g**, representada por **g o f** (leemos f compuesto con g), a aquella función cuyas imágenes se obtienen de la expresión:

$$\mathbf{(g \circ f)(x) = g((f(x))}$$

Ejemplo 21

Consideramos las funciones $f(x) = 2x$, con dominio $D_f = \mathbb{R}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, con dominio $D_g = [0, +\infty[$.
Calculamos el valor de la función compuesta **g o f** en x = 8, x = 1, x = 2.

Para obtener $(g \circ f)(8)$, efectuamos dos operaciones; primero calculamos el valor de f en 8 y después el valor de g en f(8):

$$f(8) = 2 \cdot 8 = 16 \quad \rightarrow \quad g(f(8)) = g(16) = \sqrt{16} = 4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{(g \circ f)(8) = 4}$$

$$8 \xrightarrow{f(x) = 2x} 16 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{x}} 4$$

Del mismo modo, calculamos las otras imágenes:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{(g \circ f)(1) = \sqrt{2}}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{(g \circ f)(2) = 2}$$

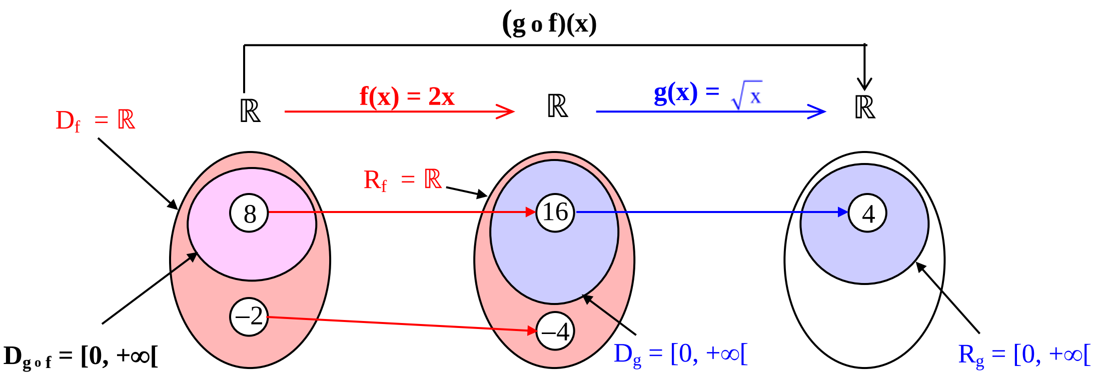
Pero hay elementos del conjunto inicial que no poseen imagen; por ejemplo:

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-4) = \mathbf{?} \quad \text{pues } \sqrt{-4} \text{ no es un número real}$$

Observa que $f(-2)$ se puede calcular pero no $g(f(-2)) = g(-4)$, porque -4 no pertenece al dominio de g (cosa que ocurre en este ejemplo con cualquier número negativo). Deducimos que:

$$\mathbf{(g \circ f)(x)} \quad \text{solo se puede calcular si} \quad \mathbf{x \in D_f} \text{ y } \mathbf{f(x) \in D_g}$$

Ilustramos con diagramas de Venn la composición de f y g:



➢ El dominio de la función compuesta

El dominio de la función compuesta **g o f** está formado por los elementos del dominio de f cuyas imágenes pertenecen al dominio de g:

$$\mathbf{D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}}$$

Ejemplo 22

Dadas las funciones f y g del ejemplo 21, calculamos la expresión general de de gof, fog y sus dominios.

- Actuando para x de la misma forma que allí hacíamos para al número 8:

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \sqrt{2x}$$

  Para calcular el valor de g(2x) es necesario que $2x \ge 0$, que ocurre si $x \ge 0$, por tanto $\mathbf{D_{g\circ f} = [0, +\infty[}$.

- De la misma forma, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}$.

  Para calcular el valor de g(x) es necesario que $x \ge 0$, por tanto también $\mathbf{D_{f\circ g} = [0, +\infty[}$.

Observemos que **la función compuesta f o g es diferente de g o f**.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f(x) = 2x"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)(x) = g(2x) = \sqrt{2x}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g(x) = \sqrt{x}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g(x) = \sqrt{x}"] \arrow[rr, bend right, "(f\circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f(x) = 2x"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 23

Hallamos el domino de la función irracional dada por $F(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

Esta función es compuesta de las funciones $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, pues:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} = F(x)$$

Siempre que $x \ne 1$ $(x \in D_f)$ y que $\dfrac{x^2+1}{x-1} \ge 0$ $(f(x) \in D_g)$ existirá la función F = g o f. Además:

$$\frac{x^2+1}{x-1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$$

De este modo, si $x \ne 1$ y $x > 1$ existe la función compuesta, es decir, $D_{g\circ f} = \mathbf{]1, +\infty[}$.

29 Halla las funciones compuestas f o g y g o f en los siguientes casos:

(A) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3 - 1$ (B) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ (C) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$

(D) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (E) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ (F) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

➢ Propiedades de la composición de funciones

1 Existe una función que al componerla con cualquier otra no altera las imágenes de ella. Es el elemento neutro de la composición, la llamada ***función identidad*** **i(x)**:

$$\mathbf{i}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \mathbf{i(x) = x},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Para cualquier función f: $\quad \mathbf{f \circ i = f} \qquad \mathbf{i \circ f = f}$

2 Si f es una función inyectiva, su recíproca f^{-1} es **inversa de f respecto de la composición**, es decir, al componerlas entre sí obtenemos la identidad (en los dominios reducidos):

(A) $\mathbf{(f^{-1} \circ f)(x) = i(x) = x,\ \forall x \in D_f}$ **(B)** $\mathbf{(f \circ f^{-1})(x) = i(x) = x,\ \forall x \in D_{f^{-1}}}$

1 Como i(x) = x, $\forall x \in \mathbb{R}$, la definición de composición de funciones conduce a:

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x),\ \forall x \in D_f \ \text{(pues } i(x) = x\text{)}$$
$$(i \circ f)(x) = i(f(x)) = f(x),\ \forall x \in D_f \ \text{(pues } f(x) \in \mathbb{R}\text{)}$$

2 Si f es inyectiva, su correspondencia recíproca f^{-1} verifica $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.

Para cualesquiera $x \in D_f$, $y \in R_f$ se tiene:

$$\mathbf{f(x) = y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f^{-1}(y) = x} \quad (*)$$

(A) Para cualquier $x \in D_f$, si f(x) = y:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \overset{(*)}{=} x$$

(B) Para cualquier $y \in R_f$, si $f^{-1}(y) = x$:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) \overset{(*)}{=} y$$

$$\begin{tikzcd}
D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f^{-1} \circ f"] & R_f \arrow[r, "f^{-1}"] & D_f \\
x \arrow[r] & y \arrow[r] & x
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "f \circ f^{-1}"] & D_f \arrow[r, "f"] & R_f \\
y \arrow[r] & x \arrow[r] & y
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 24

Dada la función $\mathbf{f(x) = 3x - 5}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, hallamos su función recíproca f^{-1} y comprobamos que:

$$f \circ f^{-1} = i \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = i$$

Para obtener la función recíproca, cambiamos x por y en la ecuación y = f(x), y a continuación despejamos y:

$$y = f(x) \ \to \ y = 3x - 5 \ \to \ x = 3x - 5 \ \to \ y = \frac{x+5}{3}$$

Como la solución es siempre única **f es inyectiva** y su correspondencia inversa $\mathbf{f^{-1}}$ **es una función**:

$$\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3},\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Calculamos la composición de f con su inversa:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-5) = \frac{3x-5+5}{3} = x \quad \to \quad \mathbf{f^{-1} \circ f = i}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+5}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+5}{3} - 5 = x \quad \to \quad \mathbf{f \circ f^{-1} = i}$$

Ejemplo 25

- Dada la función definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$ para $x \neq 1$, calculamos la composición $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x \quad \textbf{(1)}$$

siempre que $x \neq 1$ (requisito necesario para aplicar f) y que $\frac{x}{x-1} \neq 1$ (necesario para aplicar f por segunda vez). Este último requisito es cierto siempre en esta función.

Si $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \neq 1 \;\rightarrow\; f \circ f = i \;\rightarrow\; f^{-1} = f$

La función recíproca de f es ella misma: $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$, para $x \neq 1$.

- Calculamos la función recíproca f^{-1} con el método habitual. De la ecuación $y = f(x)$, intercambiamos x por y, y a continuación despejamos y:

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{x}{x-1} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y}{y-1} \;\Leftrightarrow\; x(y-1) = y \;\Leftrightarrow\; xy - x = y \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; xy - y = x \;\Leftrightarrow\; y(x-1) = x \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y = \frac{x}{x-1}}$$

Obtenemos la misma función recíproca:

$$\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, \text{ para } x \neq 1}$$

Observación

No debemos confundir la inversa respecto de la composición con la inversa respecto del producto:

Dado cualquier número real $a \neq 0$, sabemos que su inverso **respecto del producto** se escribe indistintamente por a^{-1} o por $1/a$. En cambio, en funciones esto no es así. No es lo mismo f^{-1} que $1/f$:

- La inversa **respecto de la composición de funciones** de la función $f(x) = 3x - 5$ es la función $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$, como hemos visto en el ejemplo 11, y verifica que $\mathbf{f \circ f^{-1} = i}$ y que $\mathbf{f^{-1} \circ f = i}$:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x+5}{3}\right) = 3\,\frac{x+5}{3} - 5 = x \quad \rightarrow \quad f \circ f^{-1} = i$$

- La inversa **respecto del producto de funciones** de la función $f(x) = 3x - 5$ es $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x-5}$ y verifica que $\mathbf{f \cdot \frac{1}{f} = 1}$:

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = (3x-5) \cdot \frac{1}{3x-5} = 1$$

30 Dada $f(x) = \frac{2x-1}{3}$, obtén las funciones $\frac{1}{f}$ y f^{-1}, calcula sus dominios y comprueba que $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ y $f \circ f^{-1} = i$.

31 Obtén la función recíproca o inversa de las siguientes funciones y comprueba que se verifica $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$:

(A) $f(x) = 3x + 5$ (B) $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ (C) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ (D) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$

(E) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (F) $f(x) = x^3 + 1$ (G) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ (H) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Problemas del capítulo 1

1 Considera la correspondencia entre los números enteros definida por "cada número entero está relacionado con sus múltiplos". Halla:

(A) $f(10)$, $f(20)$, $f^{-1}(20)$ y $f^{-1}(10)$.

(B) El dominio y el recorrido.

(C) La expresión que determina la correspondencia. ¿Alcanza la categoría de función?

2 Encuentra la expresión general de la función f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$f(1) = 3 \qquad f(2) = 5 \qquad f(3) = 7 \qquad f(4) = 9 \qquad f(5) = 11\ldots$$

3 Representa gráficamente las funciones siguientes:

(A) $f(x) = 2x - 1$ (B) $f(x) = -2x + 3$ (C) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ (D) $f(x) = \frac{4}{5}x$

4 Obtén las funciones lineales o afines cuyas gráficas pasan por los puntos:

(A) P(1, 3) y Q(5, −1). (B) P(1, 1) y Q(4, 10). (C) P(−4, −3) y Q(5, 3).

(D) P(2, 6) y Q(0.5, 1.5). (E) P(2, 3) y Q(5, 3). (F) P(1, 1/3) y Q(1/2, 4/3).

5 Cada kg de maíz cuesta 1.6 €. Expresa una función que establezca el coste de la compra dependiendo de la cantidad comprada. ¿Qué significado tiene el número 1.6?

6 Dos carnicerías, A y B, tienen beneficios de 10 500 € y 11 000 € al elaborar 1 000 kg de carne y unas pérdidas de 500 € y 1000 € respectivamente si no elaboran cantidad alguna. Expresa, para cada carnicería, el beneficio en función de la cantidad x de carne elaborada. ¿Cuál de las dos empresas obtiene mayor beneficio? Realiza una representación gráfica que muestre la solución. ¿Qué significado económico tienen las pendientes?

7 Compramos caquis y fresas por un total de 60 €. El precio por kg de los caquis es de 2 € y el de las fresas de 3 €. Llamamos x e y a la cantidad de kg de caquis y de fresas que compramos, respectivamente.

(A) Si compramos 6 kg de caquis, ¿cuántos kg de fresas podríamos comprar?

(B) Obtén la ecuación de la correspondencia que relaciona x con y.

(C) Expresa y en función de x. ¿Qué tipo de función es? ¿Cuál es su dominio y su recorrido?

8 Una persona quiere comprar un coche pero duda entre elegirlo de gasoil o de gasolina. El de gasoil tiene un precio de 20 000 € pero cada km recorrido supondrá un coste de 0.10 €. El de gasolina tiene un precio inferior, de 16 000 €, pero cada km recorrido le supondrá un coste de 0.12 €.

(A) Expresa dos funciones, una por tipo de coche, que proporcionen el coste total (coche más combustible) en función de la cantidad x de km recorridos. ¿Qué tipo de funciones son?

(B) ¿A partir de qué cantidad de km conviene comprar el coche de gasoil y no el de gasolina?

9 La relación entre la temperatura del aire T (en ºF) y la altitud h (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \le h \le 20\,000$. Si la temperatura al nivel del mar es de 60ºF, y por cada 5000 metros de altitud que se sube, la temperatura del aire disminuye 18ºF:

(A) Expresa T en función de h.

(B) Calcula la temperatura del aire a una altitud de 12 000 metros.

(C) Calcula la altitud a la que la temperatura del aire es de 0ºF.

10 Supongamos que la cantidad de oxígeno que hay en un lago (en mg/l) decrece con la profundidad de forma lineal. Un biólogo obtiene a 10 m de profundidad un contenido de oxígeno de 7.3 mg/l y a 40 metros, 4.9 mg/l.

(A) ¿Cuál será el contenido en oxígeno a 30 m de profundidad? ¿Y a 60 m?

(B) ¿A qué profundidad el contenido en oxígeno será de 0.2 mg/l?

11 Supongamos que el precio de un servicio telefónico depende de la duración del servicio mediante una función afín. Si el precio por 10 minutos es de 4 € y el precio por 20 minutos es de 6.5 €:

(A) Calcula el precio que se pagará por una hora de servicio y también por dos horas de servicio.

(B) Calcula el tiempo de servicio por el que se pagarán 200 €.

12 El tipo de interés que ofrece a sus clientes un determinado banco fue del 7.25 % a los 3 meses de su constitución mientras que a los 12 meses fue del 5 %.

(A) Expresa el tipo de interés en función del tiempo transcurrido con una función afín.

(B) Obtén el tipo de interés que ofrecerá el banco a los 24 meses de ser constituida.

(C) Obtén el tiempo que ha de transcurrir para que el tipo de interés sea del 1.5 %.

13 En enero de 2004 el precio medio por m^2 de la vivienda fue de 1435 €, mientras que en agosto del mismo año fue de 1 603 €. Si representamos la relación entre el tiempo (en meses desde enero del 2004) y el precio medio mediante una función afín:

(A) Obtén la expresión de dicha función.
(B) ¿Cuál sería el valor del precio medio para marzo de 2004? ¿Y para enero de 2005?
(C) ¿Cuánto aumenta el precio medio cada mes?
(D) ¿Qué significado económico tiene la pendiente de la función afín de este problema?
(E) ¿Cuántos meses tienen que pasar para que el precio medio de la vivienda supere la barrera de los 2000 €?

14 Supongamos que el consumo personal diario de agua crece con la temperatura. Sabemos que con una temperatura media de 12º el consumo de agua es 136 litros y con una temperatura de 16º el consumo es 168 litros.

(A) Con estos datos, expresa el consumo en función de la temperatura con una función afín.
(B) Para esta función, ¿cuál sería el consumo de agua para una temperatura de 22º?
(C) ¿Para qué temperatura media se consumirá 280 litros por persona?
(D) ¿Cuál es el significado de la pendiente en este problema?

15 Representa gráficamente las siguientes funciones polinómicas de grado 2:

(A) $f(x) = 9 - x^2$ (B) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (C) $f(x) = -6x^2 + x + 1$ (D) $f(x) = (x - 1)^2$

16 Obtén la ecuación de la función polinómica de grado 2 que pasa por los puntos:

(A) $A(-1, 6)$, $B(1, 0)$ y $C(2, 0)$. (B) $A(-1, 5)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 11)$.

17 Una función polinómica de segundo grado se anula en $x = 2$ y en $x = -2$. Obtén dicha función. ¿Es única?

18 La función $A(t) = 900t - 30t^2$ proporciona, para cualquier instante t de tiempo (en segundos), la altitud (en metros) que alcanza la trayectoria de un proyectil.

(A) Calcula en qué instantes alcanza 6 000 m de altitud.
(B) Calcula la duración del vuelo del proyectil si se lanza desde una superficie horizontal.
(C) Calcula la mayor altitud que alcanza el proyectil y el instante en que se consigue.

19 Un submarino dispara verticalmente un proyectil. La ecuación $y = -x^2 + 50x - 400$ expresa la altitud (en decámetros sobre el nivel del mar) que alcanza el proyectil, en función del tiempo (en segundos) desde que se lanza.

(A) ¿A qué profundidad se encuentra el submarino?
(B) ¿Qué altitud alcanza el proyectil a los 5 segundos de ser lanzado? ¿Y a los 20 segundos?
(C) ¿En qué instante el proyectil sale del mar? ¿Cuándo cae de nuevo al mar?
(D) ¿Cuál es la máxima altitud que alcanza el proyectil? ¿Cuándo es alcanzada?

20 La velocidad (en m/s) que alcanza un atleta en una carrera de 200 metros se expresa en función del espacio recorrido x (en metros) por la expresión $f(x) = -0.00055x\,(x - 300)$.

(A) ¿Qué velocidad tiene cuando ha recorrido 50 metros?
(B) ¿A qué velocidad llega a la meta?
(C) Halla la distancia recorrida en el instante de máxima velocidad. ¿Cuál es esa velocidad?

21 La oferta de energía eléctrica durante las horas laborables de un día se expresa con la función $f(x) = -2x^2 + 32x$, con $0 \le x \le 12$, (x dado en horas y f(x) en millones de kW), mientras que la demanda de energía en ese período de tiempo se expresa con la función $g(x) = 8x + 40$, con $0 \le x \le 12$.

(A) ¿En qué instantes de tiempo la oferta es igual a la demanda?
(B) ¿En qué período de tiempo la oferta supera a la demanda?
(C) ¿Cuál es la máxima cantidad de energía ofertada, y cuándo se oferta?
(D) Cuando la oferta supera a la demanda hay excedentes. ¿Cuándo son máximos los excedentes?

22 La siguiente tabla muestra los datos del beneficio mensual (en miles de euros) de una empresa:

Mes	Enero (1)	Febrero (2)	Marzo (3)
Beneficio	25	30	33

(A) Obtén la función polinómica de grado 2 que ajusta los datos.
(B) Con la función obtenida, extrapola el beneficio para al mes de agosto.
(C) ¿Cuál es el primer mes con pérdidas? Expresa el valor de las mismas.
(D) ¿En qué mes del año se obtendrá mayor beneficio? ¿Cuál es?

23 Dos proyectiles A y B se lanzan hasta caer en el mar. Las siguientes funciones expresan la altitud, en metros sobre el nivel del mar, que alcanzan en función del tiempo x, medido en segundos.

Proyectil A: $f(x) = -25x^2 + 750x$ Proyectil B: $g(x) = -5x^2 + 250x + 2000$

(A) ¿Qué proyectil alcanza mayor altitud? ¿Cuál es?
(B) ¿Cuándo se encuentran ambos proyectiles a la misma altitud? ¿Cuál es?
(C) ¿En qué instante alcanza el proyectil A 1000 m más de altitud que B?
(D) ¿Cuándo se alcanza la máxima diferencia de altitud entre ambos? ¿Cuál es?
(E) Representa gráficamente las dos funciones sobre los mismos ejes de coordenadas.

24 La altitud en metros que alcanza un proyectil en función del tiempo en segundos desde que se lanza viene expresada por una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx$.
(A) Obtén los valores de a y b para que el proyectil alcance a los 10 y a los 20 segundos 6000 metros de altitud.
(B) Calcula la mayor altitud alcanzada por el proyectil y el instante en que lo hace.

25 Un proyectil alcanza, al segundo de ser lanzado, 190 metros de altitud, a los 2 segundos 360 metros y a los 5 segundos 750 metros. Supongamos que la altitud **y** es función del tiempo **x** se puede expresar con una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$.
(A) Obtén la función cuadrática que ajusta estos datos.
(B) Obtén la mayor altitud que alcanza el proyectil y el instante en que se produce.

26 Sabemos que la velocidad de un móvil, a los 10 minutos de iniciar el trayecto era de 250 km/h y a los 30 minutos era de 450 km/h que fue la máxima velocidad alcanzada a lo largo del trayecto.
(A) Obtén los valores de a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ represente, en el móvil, la velocidad en función del tiempo transcurrido.
(B) ¿Cuál fue la duración total del trayecto?

27 Una empresa estima que sus ingresos anuales, en euros, vienen dados por la función $I(x) = 7x^2 + 9000x$, mientras que sus costes en euros vienen dados por la función $C(x) = 11x^2 + 3000x + 560000$. En ambos casos x representa el número de unidades fabricadas y vendidas. Si el beneficio es ingreso menos coste:
(A) Expresa la función beneficio y obtén la cantidad de unidades que debe fabricar y vender para maximizarlo. ¿Cuál es el máximo beneficio?
(B) ¿A partir de qué cantidad de unidades la empresa obtiene beneficio?

28 Una agencia proporciona un viaje conjunto a 60 personas, al precio de 1000 euros por persona. Con el fin de obtener el mayor número posible de clientes, por cada viajero adicional a los inicialmente propuestos, reduce en 10 euros el precio del viaje por persona.
(A) Expresa los ingresos totales de la agencia en función del número adicional de viajeros x.
(B) ¿A partir de qué número adicional de viajeros la agencia pierde dinero?
(C) ¿Cuál es el número adicional de viajeros que proporciona mayores ingresos a la agencia? ¿Cuál es el valor de estos ingresos máximos?

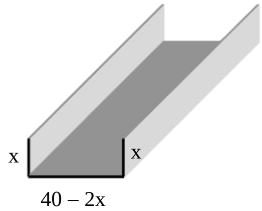
29 Un campo tiene actualmente 20 árboles que producen 250 kg de fruta cada uno. Para aumentar la producción total se quiere trasplantar más árboles pero se estima que, por cada árbol adicional trasplantado, la producción de cada uno disminuirá en 5 kg.
(A) Expresa la producción total en función de la cantidad x de árboles adicionales trasplantados.
(B) Obtén el número de árboles que se deben trasplantar para que la producción total sea máxima y da el valor de ella.

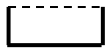
30 Queremos construir una habitación rectangular que tenga un perímetro de 20 metros. Llamamos x e y a las dimensiones de dicha habitación y A al área.
(A) Expresa y en función de x. ¿Qué tipo de función es?
(B) Expresa A en función de x. ¿Qué tipo de función es?
(C) Obtén las dimensiones de la habitación con mayor área posible y el valor de dicha área.

31 Obtén el mayor valor que puede tomar el producto de dos números positivos que suman entre sí una unidad. Repite la pregunta si los números suman entre sí m unidades.

32 Supongamos que el precio en euros de una piedra preciosa es igual al cuadrado de su peso en gramos. Un determinada piedra que pesa 10 gramos (por lo que vale 100 €), se rompe en dos partes.
(A) Si una parte pesa 2 gramos, calcula el precio total de ambas partes. ¿Cuánto dinero perdieron?
(B) Si una parte pesa x gramos, expresa el precio total de ambas partes en función de x.
(C) Obtén el valor de x para que el precio total de ambas partes sea mínimo y da ese valor.

33 Un metalúrgico quiere construir canalones de sección rectangular doblando, por ambos laterales, una porción de longitud x de una lámina de metal de 40 cm de anchura. El área de la sección del canalón está directamente relacionada con la capacidad del canalón para transportar agua, a mayor sección mayor capacidad.





Sección del canalón

(A) Si quiere que el área de la sección sea de 150 cm^2, ¿qué longitud x debe doblar?
(B) ¿Y si quiere que el área sea de 180 cm^2?
(C) Expresa el área de la sección del canalón en función de x.
(D) Obtén el valor de x para el cual el área de la sección del canalón tiene la mayor área posible, y por tanto, puede transportar más agua.

34 Un grifo vierte 5 m^3 de agua por hora. Establece una función que calcule el tiempo que tardaría en llenar un depósito en función del volumen del mismo.

35 Queremos construir una habitación rectangular que tenga un área de 25 m^2. Llamamos x e y a las longitudes de sus lados y p a su perímetro.
(A) Expresa y en función de x. ¿Qué tipo de función obtenemos?
(B) Expresa p en función de x. ¿Qué tipo de función obtenemos?
(C) Obtén el valor de x para el cual el perímetro de la habitación es de 40 metros.
(D) Repite la anterior pregunta para perímetros de 35, 30, 25, 20 y 15 metros. A la vista de los resultados, ¿cuál es el menor perímetro que puede tener la habitación? ¿Por qué?

36 Calcula el dominio de las siguientes funciones racionales:

(A) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$ (B) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x-2}$ (C) $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$

(D) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+3x+4}$ (E) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-x-1}$ (F) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-7x+6}$

(G) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-2}$ (H) $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3x^2+2}$ (I) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4-5x^2+4}$

(J) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-5x-6}$ (K) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-3x^2-2x}$ (L) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+x^2-2x-2}$

(M) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$ (N) $f(x)=\dfrac{x}{4x^3-8x^2-x+2}$ (Ñ) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^3-8x-8}$

37 Obtén el dominio de las siguientes funciones irracionales:

(A) $f(x)=\sqrt{-x}$ (B) $f(x)=\sqrt{5-2x}$ (C) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ (D) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+12}$

(E) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$ (F) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ (G) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x-2}$ (H) $f(x)=\sqrt{x^3-3x-2}$

(I) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$ (J) $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2}$ (K) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ (L) $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+6}$

38 Obtén el dominio de las siguientes funciones irracionales:

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$ (B) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ (C) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$ (D) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-2}}$

(E) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x}}$ (F) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{9-x^2}}$ (G) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}}$ (H) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}}$

39 Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{6}{x}$. Toma un punto cualquiera de dicha gráfica como vértice de un rectángulo siendo su vértice opuesto el punto O(0, 0) y dos lados están situados sobre los ejes cartesianos. ¿Cuánto mide su área?

40 Representa gráficamente las siguientes funciones y expresa las ecuaciones de sus asíntotas:

(A) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ (B) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ (C) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (D) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(E) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (F) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (G) $f(x) = \frac{3x-2}{4x-1}$ (H) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$

41 Una persona compra dos productos inmobiliarios A y B al precio de 120 € y 90 €, respectivamente. El producto A incrementa su valor mensualmente en un 2 % mientras que B le hace en un 4 %. Llamamos x al número de meses transcurridos desde la compra de los dos productos.

(A) Obtén dos funciones f(x) y g(x) que representen el valor de cada producto x meses después de ser comprado.
(B) ¿Cuántos meses pasarán para que el valor de ambos productos sea el mismo?
(C) Llamamos p(x) a la proporción que representa el valor del producto A respecto de la suma de los valores de los dos productos. ¿Qué tipo de función obtenemos?
(D) ¿Cuántos meses tienen que pasarán para que dicha proporción p(x) sea de 0.5? ¿Y de 0.45? ¿Y de 0.3? ¿Cuál es el menor valor que puede tomar dicha proporción?

42 Una persona puede trabajar a domicilio hasta 40 horas semanales ordinarias y hasta 10 horas extraordinarias. Las horas ordinarias las cobra a 10 € y las extraordinarias a 25 €. Si trabaja todas las horas posibles, ¿a qué precio medio cobra la hora?

Llamamos x al número de horas extraordinarias trabajadas. Expresa, en función de x, el precio medio al que cobra la hora, en los siguientes casos:

(A) Trabaja 40 horas ordinarias. (B) Trabaja 30 horas ordinarias.
(C) Trabaja 20 horas ordinarias. (D) Trabaja 10 horas ordinarias.

¿Qué tipo de funciones son? ¿Cuál es el dominio de cada función? ¿Cuántas horas extra debe trabajar en cada caso para que el precio medio sea por lo menos de 12 €?

43 Un jugador de baloncesto ha conseguido encestar 25 de 40 tiros libres intentados en un entrenamiento. Al día siguiente encesta todos los tiros que intenta. Si llamamos x al número de tiros libres intentados y encestados en el segundo día, y f(x) al tanto por ciento de acierto que consigue acumular con los tiros de los dos entrenamientos:

(A) Obtén la expresión de la función f(x). ¿Qué tipo de función es?
(B) ¿Cuántos tiros libres debe hacer el segundo día para que el porcentaje de acierto total del 75 %? ¿Y del 90 %?
(C) ¿Podrá alcanzar el 100 % de aciertos? ¿Por qué?

44 El número de individuos (en millones) de una determinada colonia de insectos varía en función del tiempo t (en días) a través de la función

$$P(t) = \frac{550t+1000}{t+20}, \ \forall t \geq 0.$$

(A) ¿Cuántos insectos habrá transcurridos 30 días?
(B) ¿Cuánto tiempo pasará para que haya 450 millones de insectos?
(C) Halla las asíntotas y la representación gráfica. Comprueba que la función crece siempre; ¿querrá decir que la colonia de insectos crecerá indefinidamente?

45 A cada número entre 0 y 3 le hacemos corresponder su parte entera. Expresa la función definida a trozos correspondiente. Represéntala gráficamente. Haz lo mismo si a cada número se corresponde con su parte decimal.

46 Una persona compra manzanas de calidad normal, a 0.8 €/kg y de calidad extra a 1.4 €/kg.

(A) Si compra 30 kg de manzanas de calidad normal y 20 de calidad extra, ¿cuánto gasta? ¿Cuál es precio medio por kg del total de manzanas compradas?
(B) Obtén una función p(x) que exprese el precio total de comprar 30 kg de manzanas de calidad normal y x kg de manzanas de calidad extra. ¿Qué tipo de función es?
(C) Obtén otra función f(x) que exprese el precio medio por kg del total de manzanas cuando compra 30 kg de calidad normal y x kg de calidad extra. ¿Qué tipo de función es?
(D) Con f(x) de (C), ¿cuántos kg de calidad extra hay que comprar si el precio medio es 1.2 €?

47 Las siguientes ecuaciones con 2 incógnitas definen correspondencias. Con la variable x representamos los elementos del conjunto inicial y con la y los del conjunto final. Comprueba cuáles son funciones. Obtén sus correspondencias recíprocas e indica cuáles de ellas son funciones. Calcula también el dominio y recorrido de todas elles.

(A) $x + 2y = 3$ (B) $3x - 5y = 6$ (C) $xy = 25$ (D) $(x-1)(y+1) = 25$ (E) $x^2y^2 = 25$
(F) $y = 4x^2$ (G) $x = 4y^2$ (H) $x^2 + y^2 = 25$ (I) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (J) $x = y^2 - 2y + 1$

48 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, calcula las composiciones fog, gof, fof y gog.

49 Obtén las inversas de las siguientes funciones:

(A) $f(x) = 2x + 3$ (B) $f(x) = \frac{3x-1}{4}$ (C) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-1}{4}$ (D) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{4}}$

(E) $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ (F) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x+2}}$ (G) $f(x) = \frac{3x^3-4}{x^3+2}$ (H) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}$

50 Calcula la inversa de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. A la vista del resultado, ¿Qué dará la composición fof?

51 Dadas las funciones $f(x) = \frac{x+1}{2}$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$, obtén las funciones compuestas fog y gof.

52 Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ y $g(x) = \frac{2x-1}{3}$:

(A) Calcula las funciones compuestas fog y gof.
(B) Calcula las funciones compuestas fof y gog.
(C) Calcula la función inversa de f y la de g.

53 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$, calcula:

(A) fog. (B) gof. (C) fof. (D) gog. (E) $f^{-1}(x)$. (F) $g^{-1}(x)$.

54 Consideramos las siguientes funciones, con dominio en $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ g(x) = \frac{x-1}{x},\ i(x) = x.$$

(A) Rellena el siguiente cuadro, calculando la composición de cualquier pareja de las anteriores funciones.
(B) A la vista de los resultados, ¿cuál es la función inversa de f? ¿Y la de g? ¿Y la de i?

	i	f	g
i			
f			
g			

55 Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$:

(A) Obtén el dominio y el recorrido de f.
(B) Obtén la función inversa de f.

56 Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$:

(A) Obtén la función inversa de f.
(B) Obtén el dominio y el recorrido de f.

57 Dada la función $f(x) = \frac{3+2x}{4-x}$:

(A) Obtén la función inversa de f.
(B) Obtén el dominio y el recorrido de f.
(C) Obtén las asíntotas de f.

58 Dadas las funciones $f(x) = \frac{5}{3+2x}$ y $g(x) = \frac{5-3x}{2x}$:

(A) Calcula la función compuesta fog. ¿Qué deduces del resultado?
(B) Obtén el dominio y el recorrido de f.

59 Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{5-x}$ y $g(x) = \frac{5x-3}{x}$:

(A) Calcula la función composta fog. ¿Qué deduces del resultado?
(B) Obtén el dominio y el recorrido de f.

60 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, obtén la función compuesta fog.

61 Calcula el dominio de las siguientes funciones irracionales:

(A) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (B) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-x^2}$ (C) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x-1}}$ (D) $f(x) = \dfrac{1}{5-\sqrt{x-1}}$

(E) $f(x) = \dfrac{1}{4+\sqrt{x^2-9}}$ (F) $f(x) = \dfrac{1}{4-\sqrt{x^2-9}}$ (G) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}-10}$ (H) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{2-\sqrt{x-1}}$

(I) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-10}} - \dfrac{1}{\sqrt{20-x}}$ (J) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-10}-\sqrt{20-x}}$ (K) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10-x}}$

62 Un globo esférico se hincha manteniendo siempre su forma. Expresa una función que determine el radio dependiendo de su volumen.

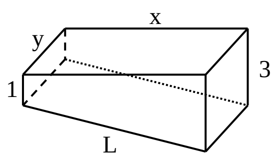
63 Representa gráficamente las siguientes funciones:

(A) $f(x) = |x+2|$ (B) $f(x) = |3-2x|$ (C) $f(x) = |2x^2-4|$ (D) $f(x) = |x-x^2|$

(E) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ (F) $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{3x+6}\right|$ (G) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ (H) $f(x) = 1 + |x|$

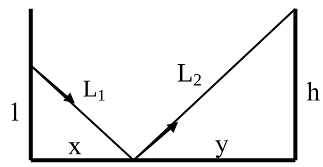
64 Construimos una piscina rectangular con un perímetro de 18 metros, que tiene al principio 1 metro de profundidad y al final 3 m (figura). Llamamos x e y a las longitudes de los lados de la piscina.

(A) Expresa y en función de x.
(B) Expresa L en función de x.
(C) Expresa el área de la superficie de la piscina en función de x.
(D) Expresa el área del fondo de la piscina en función de x.
(E) Expresa el área de las paredes de la piscina en función de x.



65 Dos paredes están separadas por una distancia de 1 metro. El suelo que las separa está constituido por una superficie horizontal reflectante. A 1 metro de altura, en la primera pared, situamos un foco de luz que proyecta un rayo sobre el suelo y que, después de reflejarse, incide en la otra pared. Llamamos x, y, h, L_1 y L_2 a las longitudes señaladas en la figura.

(A) Expresa L_1 en función de x, y x en función de L_1.
(B) Expresa y en función de x.
(C) Expresa h en función de x, y x en función de h.
(D) Expresa L_2 en función de x.
(E) Si $L = L_1 + L_2$, expresa L en función de x, y x en función de L.



66 En una ciudad hay dos aparcamientos subterráneos de uso público que abren 4 horas cada tarde. La empresa que explota el primero cobra 0.8 € por cada hora o fracción que permanece cada vehículo, mientras que la que explota el segundo cobra 0.4 € por cada media hora o fracción de media hora.

(A) Obtén, para cada empresa, una función definida a trozos que exprese el coste de aparcamiento en función del tiempo de permanencia.
(B) Representa en unos mismos ejes cartesianos ambas funciones. ¿Qué aparcamiento nos resulta más barato?

67 La siguiente tabla simula la del impuesto de la renta de las personas físicas. La base líquida son los ingresos anuales declarados. Obtén una función definida a trozos que determine la cuota íntegra (impuesto a pagar) en función de la base líquida x. Expresa x y f(x) en miles de euros. Realiza una representación gráfica.

Base líquida hasta (euros)	Cuota íntegra (euros)	Resto base líquida hasta (euros)	Tipo aplicable (%)
10 000	0	10 000	20
20 000	2 000	10 000	25
30 000	4 500	10 000	30
40 000	7 500	10 000	35
50 000	11 000	En adelante	40

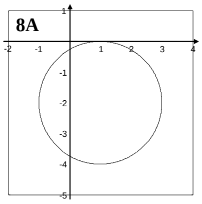
68 Un comercio realiza un nuevo tipo de descuentos: “Por compras no superiores a 30 €, un 10 % del valor de la compra; por compras superiores a 30 €, un 10 % de los primeros 30 € más un 20 % de la cantidad que pase de 30 €”.

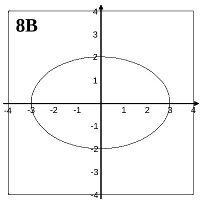
(A) Obtén una función definida a trozos D(x) que exprese el descuento que corresponde a cada valor x de compra y represéntala gráficamente.
(B) Obtén otra función P(x) que represente el porcentaje sobre el total de la compra x que supone el descuento D(x) realizado y represéntala gráficamente.

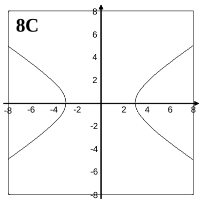
Soluciones de las actividades del capítulo 1

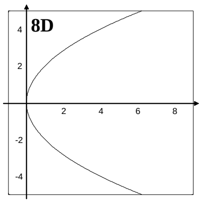
1. $A\times B = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \alpha), (d, \alpha), (e, \alpha), (a, \beta), (b, \beta), (c, \beta), (d, \beta), (e, \beta), (a, \gamma), (b, \gamma), (c, \gamma), (d, \gamma), (e, \gamma), (a, \delta), (b, \delta), (c, \delta), (d, \delta), (e, \delta)\}$. **2.** $f(4) = 2$, $f(6) = \{2, 3\}$, $f(8) = \{2, 4\}$, $f(9) = 3$, $f(10) = \{2, 5\}$; $f^{-1}(2) = \{4, 6, 8, 10\}$, $f^{-1}(3) = \{6, 9\}$, $f^{-1}(4) = 8$, $f^{-1}(5) = 10$; $D_f = \{4, 6, 8, 9, 10\}$; $R_f = \{2, 3, 4, 5\}$. **3.** (A) $f(x) = \frac{5-2x}{3}$, $D_f = \mathbb{R}$. (B) $f(x) = \frac{1-x}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. (C) $f(x) = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$; $D_f = [-2, 2]$. (D) $f(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$, $D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. (E) $f(x) = \pm 2\sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty[$. **4.** (A) $g(y) = \frac{5-3y}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$. (B) $g(y) = \frac{1}{y+1}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{-1\}$. (C) $g(y) = \pm 2\sqrt{1-y^2}$, $D_f = [-1, 1]$. (D) $g(y) = \pm 3\sqrt{1+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}$. (E) $g(y) = \pm\frac{y^2}{4}$, $D_f = \mathbb{R}$. **5.** $4x + 2y = 20$; $y = 10 - 2x$; $D = [0, 5]$, $R = [0, 10]$. **6.** (A) $L = \sqrt{x}$, $x > 0$. (B) $D = \sqrt{x^2+(5-x)^2}$, $0 < x < 5$. (C) $A = xy$, $x, y > 0$. **7.** $f(x, y) = \frac{y}{x}$, es una función, $D_f = \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0\}$, $R_f = \mathbb{R}$; $f(5, 3) = 3/5$; $f^{-1}(2) = \{(x, 2x) \ / \ x \neq 0\}$.

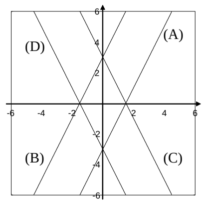
8. (A) $f_1(x) = -2+\sqrt{4-(x-1)^2}$, $f_2(x) = -2-\sqrt{4-(x-1)^2}$, $D = [-1, 3]$. (B) $f_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $D= [-3, 3]$. (C) $f_1(x) = = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, $f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, $D =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. (D) $f_1(x) = 2\sqrt{x}$, $f_2(x) = -2\sqrt{x}$, $D = [0, +\infty[$. **9.**



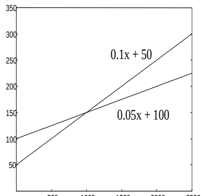


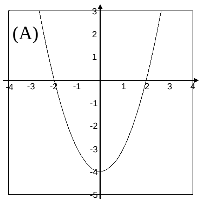


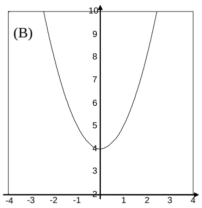


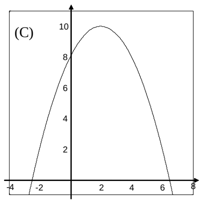


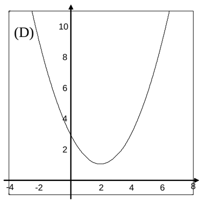
10. $f(x) = \frac{x}{2}-4$; $g(x) = -x - 3$. **11.** $f(x) = \frac{x+3}{2}$; $g(x) = -x + 3$. **12.** (A) $f_A(x) = 0.1x + 50$, $x > 0$; $f_B(x) = 0.05x + 100$, $x > 0$. (B) Si $x < 1000$, conviene A; si $x > 1000$, conviene B. **13.**





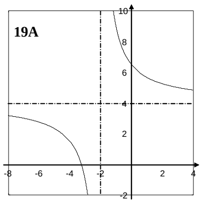


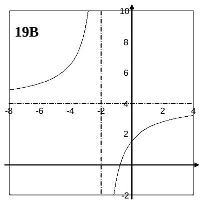


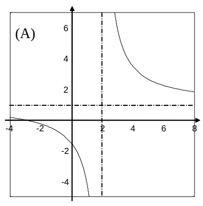


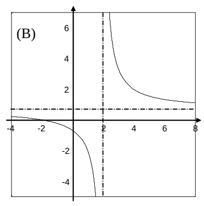
14. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$. **15.** $f(x) = 25x - x^2$; función cuadrática. **16.** (A) $\mathbb{R} \sim \{-2\}$. (B) $\mathbb{R} \sim \{0, 2, -2\}$. (C) $\mathbb{R} \sim \{3, -3\}$. (D) $\mathbb{R} \sim \{1\}$. (E) $\mathbb{R} \sim \{-1\}$. (F) $\mathbb{R} \sim \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$. (G) $\mathbb{R} \sim \{1, -2\}$. (H) $\mathbb{R} \sim \{1, -1, 3, -3\}$. **17.** $i(x) = \frac{100}{x^2}$; complexión delgada si $x \geq 213$ cm, normal si $192 \leq x \leq 213$, gruesa si $177 \leq x \leq 192$, obesa si $x \leq 177$ cm. **18.** $f(x) = \frac{1000}{x}$, $x > 0$. **19.** (A) $f(x) = 4 + \frac{5}{x+2}$. (B) $g(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$.

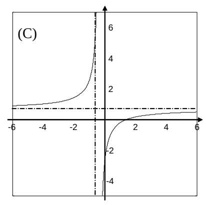
20.







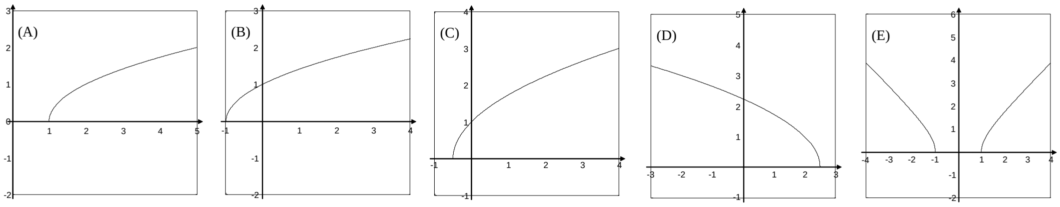




21. (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{3}$, sí. (B) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt[4]{x+1}$, no. (C) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2x-1}$, no. (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$, no.

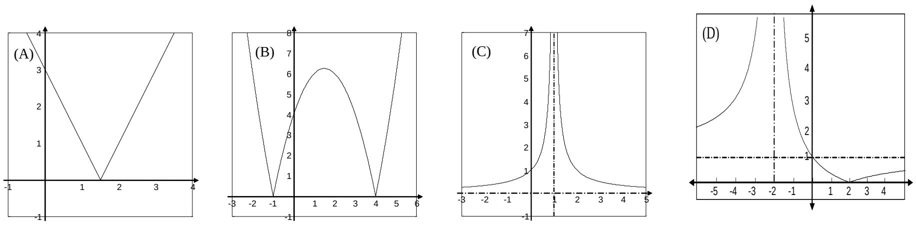
(E) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{x-2}$, sí. **22.** (A) D = $[1, +\infty[$. (B) D = $[-1, +\infty[$. (C) D = $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. (D) D = $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$.

(E) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.



23. $f(x) = \begin{cases} 0.25x & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ 0.4x - 2.25 & \text{si } 15 \le x \le 45 \\ x - 29.25 & \text{si } x \ge 45 \end{cases}$.

24.



25. (A) $(f+g)(x) = \dfrac{2x^2}{x^4-9}$, $(f-g)(x) = \dfrac{-6}{x^4-9}$, D = $\mathbb{R} \sim \{\pm\sqrt{3}\}$. (B) $(f+g)(x) = \dfrac{2x}{x^3-x}$, $(f-g)(x) = \dfrac{-2}{x^3-x}$,

D = $\mathbb{R} \sim \{0, \pm1\}$. (C) $(f+g)(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}$, $(f-g)(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x-4}$, D = $[4, +\infty[$. **26.** [1, 2].

27. (A) $(f \cdot g) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $(f/g)(x) = (x+2)(x+1)$, D = $\mathbb{R} \sim \{-1\}$. (B) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{1-x^2}$, D = $[-1, 1]$;

$(f/g)(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, D = $]-1, 1]$. (C) $(f \cdot g)(x) = 1 - x$, D = $[0, +\infty[$; $(f/g)(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, D = $[0, +\infty[\sim \{1\}$.

28. $D_f =]2, +\infty[$ y $D_g =]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[$. **29.** (A) $(fog)(x) = 2x^3 - 1$, $(gof)(x) = (2x+1)^3 - 1$.

(B) $(fog)(x) = \sqrt{x+1}$, $(gof)(x) = \sqrt{|x|+1}$. (C) $(fog)(x) = \sqrt{x-2}$, $(gof)(x) = \sqrt{x} - 2$. (D) $(fog)(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$,

$(gof)(x) = \dfrac{2x+1}{2x+2}$. (E) $(fog)(x) = x$, $(gof)(x) = |x|$. (F) $(fog)(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $(gof)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

30. $(1/f)(x) = \dfrac{3}{2x-1}$, D = $\mathbb{R} \sim \{1/2\}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$, D = $\mathbb{R}$. **31.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$. (B) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{3}$.

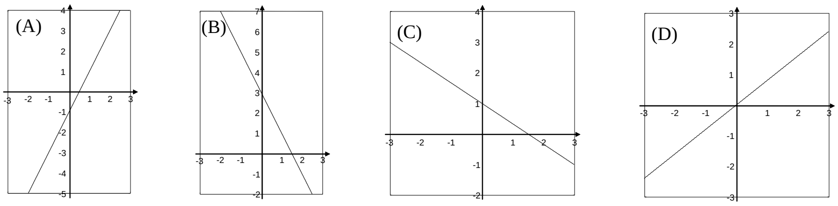
(C) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-1}$. (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. (F) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. (G) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2$.

(H) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$.

Soluciones de los problemas del capítulo 1

1. (A) $f(10) = \{\pm 10, \pm 20, \pm 30\ldots\} = \{10n : n\in \mathbb{Z}\}$; $f(20) = \{\pm 20, \pm 40, \pm 60\ldots\} = \{20n : n\in \mathbb{Z}\}$; $f^{-1}(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; $f^{-1}(10) = \{1, 2, 5, 10\}$. (B) $D_f = R_f = \mathbb{N}$. (C) $f(x) = \{nx: n\in \mathbb{N}\} = \{x, 2x, 3x\ldots\}$, no es una función. **2.** $f(n) = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

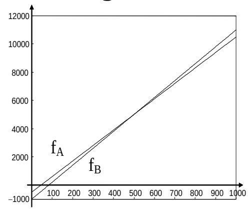
3.



4. (A) $f(x) = -x + 4$. (B) $f(x) = 3x - 2$. (C) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$; (D) $f(x) = 3x$. (E) $f(x) = 3$. (F) $f(x) = \dfrac{7-6x}{3}$.

5. $f(x) = 1.6x$, $x \geq 0$; 1.6 es el precio por kg.

6. Función beneficio para A: $f(x) = 11x - 500$, $x \geq 0$ (x en kg, f(x) en €); función beneficio para B: $g(x) = 12x - 1000$, $x \geq 0$. A obtiene mayor beneficio que B si $x < 500$. Las pendientes 11 y 12 son el beneficio por kg.

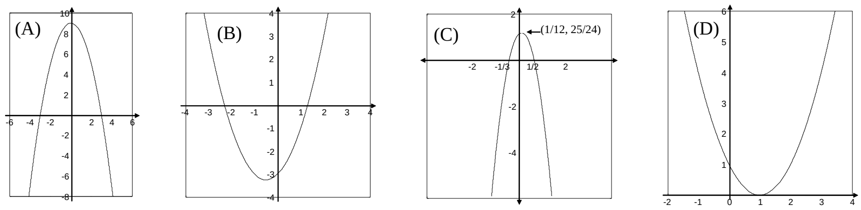


7. (A) 16 kg. (B) $2x + 3y = 60$. (C) $y = -\dfrac{2}{3}x + 20$; función lineal, D = [0, 30], R = [0, 20].

8. (A) De gasoil: $f(x) = 20000 + 0.1x$; de gasolina: $16000 + 0.12x$. (B) A partir de 200000 km.

9. (A) $T = -0.0036h + 60$. (B) 16.8ºF. (C) 16666.7 m. **10.** (A) 5.7 mg/l; 3.3 mg/l. (B) 98.75 m. **11.** (A) 16.5 €, 31.5 €. (B) 794 minutos. **12.** (A) $y = -0.25x + 35$. (B) 2 %. (C) 26 meses. **13.** A) $f(x) = 24x + 1411$. (B) 1483 €; 1723 €. (C) 24 €. (D) es el aumento de precio medio por mes. (E) 24 meses. **14.** (A) $y = 8x + 40$. (B) 216 litros. (C) 30º. (D) m = 8 es el incremento del consumo por cada grado de temperatura que aumenta.

15.



16. (A) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. (B) $f(x) = 3x^2 - x + 1$. **17.** No es única: $f(x) = a(x^2 - 4)$. **18.** (A) A los 10 y 20 s. (B) 30 s. (C) 6750 m, a los 15 segundos. **19.** (A) –400 dam. (B) –175 dam; 200 dam. (C) A los 10 s; a los 40 s. (D) 225 dam; a los 25 s. **20.** (A) 6.875 m/s. (B) 11 m/s. (C) a los 150 m. v = 12.375 m/s. **21.** (A) A las 2 y a las 10 h. (B) En]2, 10[. (C) 128 millones de kW/h, a las 8 h. (D) A las 6 h. **22.** (A) $y = -x^2 + 8x + 18$. (B) 18000 €. (C) Octubre, con –2000 €. (D) En abril, 34000 €. **23.** (A) El móvil A, a 5625 m. (B) A las 5 h y a 3125 m; a las 20 horas y a 5000 m. (C) A los 10 y 15 s. (D) A los 12.5 s; 1125 m. **24.** (A) a = –30, b = 900. (B) 6750 m, a los 15 s. **25.** (A) $y = -10x^2 + 200x$. (B) 1000 m a los 10 segundos. **26.** (A) a = –0.5, b = 30, c = 0. (B) 60 minutos. **27.** (A) $B(x) = -4x^2 + 6000x - 560000$. 1690000 €, con 750 unidades. (B) A partir de 100 unidades y hasta 1400 u. **28.** (A) $f(x) = (60 + x)(1000 - 10x)$, $x \geq 0$. (B) a partir de 40 más. (C) 20 viajeros, con beneficio de 64000 €. **29.** (A) $y = (20 + x)(250 - 5x)$. (B) 15 árboles más, 6125 kg. **30.** (A) $y = 10 - x$, función afín. (B) $A = x(10 - x)$, función cuadrática. (C) x = y = 5 m. A = 25 m^2. **31.** 1/4; m^2/4. **32.** (A) 68 € y 32 €. (B) $y = x^2 + (10 - x)^2$. (C) 5 g y 50 €. **33.** (A) 5 o 15 cm. (B) $10 + \sqrt{10}$ o $10 - \sqrt{10}$ cm. (C) $A = -2x^2 + 40x$. (D) x = 10 cm.

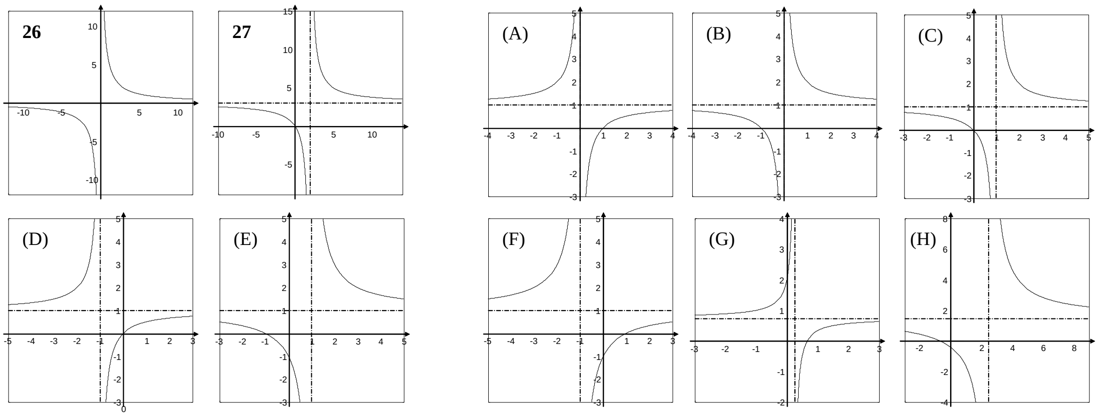
34. $f(x) = x/5$, $x \geq 0$. **35.** (A) $y = 25/x$, f. de proporcionalidad inversa. (B) $p = 2x + \dfrac{50}{x}$, f. racional.

(C) $10 \pm 5\sqrt{3}$ m. (D) 20 es el menor perímetro, porque es el menor valor de p para el que x tiene solución.

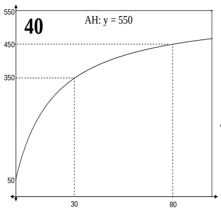
36. (A) $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}$. (B) $\mathbb{R} \sim \{2/3\}$. (C) $\mathbb{R} \sim \{3, -3\}$. (D) $\mathbb{R}$. (E) $\mathbb{R} \sim \{1, -1/2\}$. (F) $\mathbb{R} \sim \{1, 2, -3\}$. (G) $\mathbb{R} \sim \left\{1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right\}$. (H) $\mathbb{R}$. (I) $\mathbb{R} \sim \{1, -1, 2, -2\}$. (J) $\mathbb{R} \sim \{2, -1\}$. (K) $\mathbb{R} \sim \{0, 2, -1\}$. (L) $\mathbb{R} \sim \left\{-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$. (M) $\mathbb{R} \sim \{-1\}$. (N) $\mathbb{R} \sim \{2, 1/2. -1/2\}$. (Ñ) $\mathbb{R} \sim \{2, -1\}$. **37.** (A) $]-\infty, 0]$. (B) $]-\infty, 5/2]$. (C) $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$. (D) $]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$. (E) $]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[$. (F) $\mathbb{R}$ (G) $]-\infty, -1/2] \cup [2, +\infty[$. (H) $[2, +\infty[\cup \{-1\}$. (I) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$. (J) $[4, +\infty[\cup \{0\}$. (K) $[-2, 2]$. (L) $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$.

38. (A) $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$. (B) $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$. (C) $[-1/2, 1/2[$. (D) $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup [-1, 1] \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$. (E) $]-\infty, -3] \cup]0, 3]$. (F) $]-\infty, -3[\cup [0, 3[$. (G) $[-1, 2] \sim \{0\}$. (H) $]-\infty, 0] \cup]1, 3[\cup [4, +\infty[$. **39.** 6.

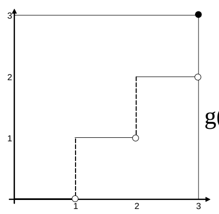
40.



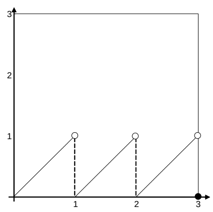
41. (A) f(x) = 120 + 2.4x, g(x) = 90 + 3.6x, x ≥ 0. (B) 25 meses. (C) $p(x) = \dfrac{120 + 2.4x}{210 + 6x}$, es una hipérbola. (D) 25 meses; 85 meses; no es posible; no hay menor valor, pero tiende a 0.4. **42.** 13 €/h. (A) $f(x) = \dfrac{400 + 25x}{40 + x}$. (B) $g(x) = \dfrac{300 + 25x}{30 + x}$. (C) $h(x) = \dfrac{200 + 25x}{20 + x}$. (D) $f(x) = \dfrac{100 + 25x}{10 + x}$, son f. racionales con dominio {0, 1, …, 10}. N.º de horas extra: (A) 7, (B) 5, (C) 4, (D) 2. **43.** (A) $f(x) = \dfrac{100x + 2500}{x + 40}$, x ≥ 0, es una hipérbola. (B) 20 tiros; 110 tiros. (C) No, porque f(x) = 100 no tiene solución. **44.** (A) 350 millones. (B) 80 días. (C) A. H.: y = 550; la colonia crece, pero no supera los 550 millones de individuos.



45. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$



$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$



46. (A) 52 €; 1.04 €/kg. (B) p(x) = 24 + 1.4x. F. afín. (C) $f(x) = \dfrac{24 + 1.4x}{30 + x}$. F. racional. (D) 60 kg.

47. (A) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$, $f^{-1}(x) = 3 - 2x$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, son funciones. (B) $f(x) = \dfrac{3x - 6}{5}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 6}{3}$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, son funciones. (C) $f(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{25}{x}$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{0\}$, son funciones. (D) $f(x) = \dfrac{26 - x}{x - 1}$,

$f^{-1}(x) = \dfrac{26+x}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{1\}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{-1\}$, son funciones. (E) $f(x) = f^{-1}(x) = \pm\dfrac{5}{x}$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{0\}$, no son funciones. (F) $f(x) = 4x^2$, $f^{-1}(x) = \pm\dfrac{\sqrt{x}}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty[$, f sí es función. (G) $f(x) = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{25-x^2}$, $D_f = D_{f^{-1}} = [-5, 5]$, no son funciones. (H) $f(x) = \pm\sqrt{4-(x-2)^2}$, $f^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{4-x^2}$, $D_f = [0, 4]$, $D_{f^{-1}} = [-2, 2]$, no son funciones. (I) $f(x) = 1 \pm \sqrt{x}$, $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 1$, $D_f = [0, +\infty[$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, f no es función. **48.** $(fog)(x) = \sqrt{x+1}$; $(gof)(x) = \sqrt{x} + 1$; $(fof) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$; $(gog)(x) = x + 2$.

49. (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$. (B) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+1}{3}$. (C) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{4x+1}{3}\right)^2$. (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x^2+1}{3}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+4}{3-x}$.

(F) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+4}{3-x^2}$. (G) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$. (H) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{2x+4}{3-x}\right)^2$. **50.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = f(x)$; $(fof)(x) = x$, porque f es su propia inversa. **51.** $(fog)(x) = \dfrac{x+3}{2x+2}$, $(gof)(x) = \dfrac{4}{x+3}$. **52.** (A) fog = i, gof = i.

(B) $(fof)(x) = \dfrac{9x+5}{4}$, $(gog)(x) = \dfrac{4x-5}{9}$. (C) $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$. **53.** (A) $(fog)(x) = \dfrac{2x+1}{5x+2}$. (B) $(gof)(x) = \dfrac{x+4}{x+3}$. (C) $(fof)(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. (D) $(gog)(x) = \dfrac{11x+4}{8x+3}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$. (F) $g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-3}$.

54. (A)

	i	f	g
i	i	f	g
f	f	g	i
g	g	i	f

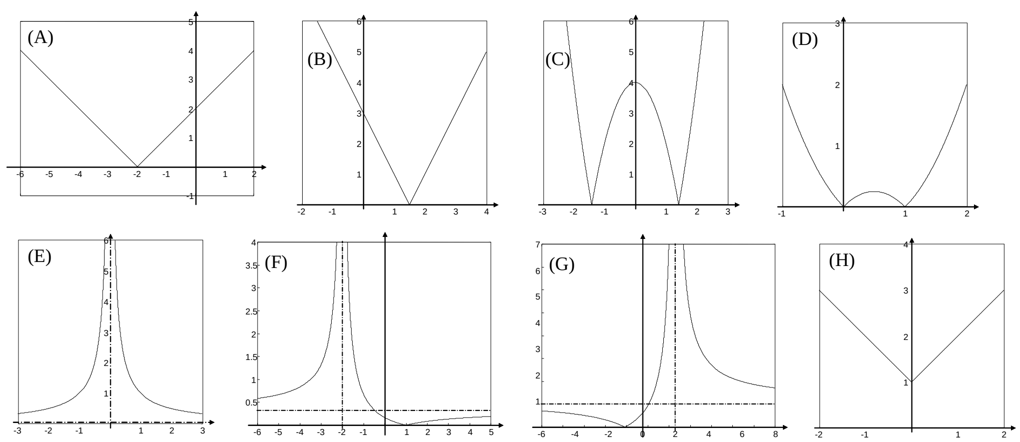
(B) Como fog = i, y gof = i, $f^{-1} = g$ y $g^{-1} = f$.

55. (A) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$. (B) $D_f = [0, +\infty[\sim \{1\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{1\}$. **56.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1\} = R_f$. **57.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{x+2}$. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{4\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{-2\}$. (C) AV: x = 4; AH: y = –2. **58.** (A) (fog)(x) = x; f y g son inversas entre sí. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{-3/2\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. **59.** (A) (fog)(x) = x; f y g son inversas entre sí. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{5\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. **60.** $(fog)(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. **61.** (A) [0, 1]. (B) $[-3, -2] \cup [2, 3]$. (C) $[1, +\infty[$.

(D) $[1, +\infty[\sim \{26\}$. (E) $]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$. (F) $]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[\sim \{-5, 5\}$. (G) $[5, -\infty[\sim \{105\}$. (H) $[1, 5[$.

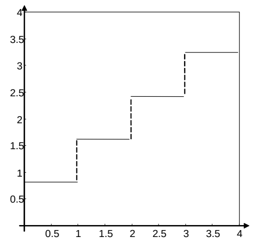
(I) $]10, 20[$. (J) $[10, 20] \sim \{15\}$. (K) $[0, 10] \sim \{5/2\}$. **62.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{3\pi}}$.

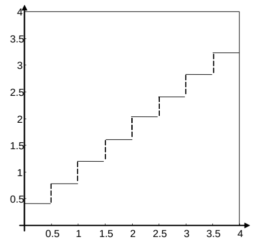
63.

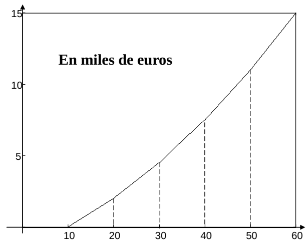


64. (A) $y = 9 - x$. (B) $L = \sqrt{4+x^2}$. (C) $A = x(9 - x)$. (D) $A = (9 - x)\sqrt{4+x^2}$ (E) $A = 36$. **65.** (A) $L_1 = \sqrt{1+x^2}$; $x = \sqrt{L_1^2 - 1}$. (B) $y = 1 - x$. (C) $h = \dfrac{1-x}{x}$; $x = \dfrac{1}{1+h}$. (D) $L_2 = \dfrac{1-x}{x}\sqrt{1+x^2}$. (E) $L = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{L^2-1}}$.

66. $f(x) = \begin{cases} 0.8 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1.6 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 2.4 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 3.2 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{si } 0 < x \le 0.5 \\ 0.8 & \text{si } 0.5 < x \le 1 \\ 1.2 & \text{si } 1 < x \le 1.5 \\ 1.6 & \text{si } 1.5 < x \le 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \le 2.5 \\ 2.4 & \text{si } 2.5 < x \le 3 \\ 2.8 & \text{si } 3 < x \le 3.5 \\ 3.2 & \text{si } 3.5 < x \le 4 \end{cases}$. **67.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 10 \\ 0.2x - 2 & \text{si } 10 < x \le 20 \\ 0.25x - 3 & \text{si } 20 < x \le 30 \\ 0.3x - 4.5 & \text{si } 30 < x \le 40 \\ 0.35x - 6.5 & \text{si } 40 < x \le 50 \\ 0.4x - 9 & \text{si } x > 50 \end{cases}$

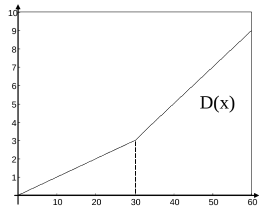


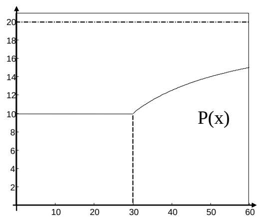




68. (A) $D(x) = \begin{cases} 0.1x & \text{si } x \le 30 \\ 0.2x - 3 & \text{si } x > 30 \end{cases}$

(B) $P(x) = \dfrac{100D(x)}{x} = \begin{cases} 10 & \text{si } x \le 30 \\ 20 - \dfrac{300}{x} & \text{si } x > 30 \end{cases}$.





BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Estadística

educàlia editorial

BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

Estadística

educàlia
editorial

Primera edición, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetación: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprime: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-03-9

Depósito legal: V-3239-2018

Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítulo 2

Distribuciones bidimensionales

2.1 Distribución conjunta de frecuencias

En los trabajos estadísticos se recogen datos de una determinada población referidos generalmente a más de una característica de la población. Cada una de estas características o ***variables*** pueden ser estudiadas por separado, pero también pueden ser tratadas conjuntamente cuando se piensa que hay algún tipos de relación entre algunas de ellas. Por ejemplo, si de un conjunto de recién nacidos recogemos datos sobre las variables sexo, semanas de gestación, peso y talla, el estudio conjunto de dichos datos puede confirmarnos que estas variables están relacionadas.

➢ Muestras bidimensionales

Una ***muestra bidimensional de tamaño n***, de dos variables X e Y, es un conjunto de n pares ordenados de valores, (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), donde cada par contiene los valores observados de ambas características **de un mismo individuo de la población**.

Ejemplo 1

Durante el período de tiempo en que un profesor explica a sus alumnos una determinada materia, realiza 4 exámenes voluntarios y después, un examen final obligatorio con el cual evalúa los conocimientos. El profesor quiere comprobar si la realización de los exámenes parciales supone una buena ayuda para superar la materia. Para ello, y de los 40 alumnos de que dispone, contrasta el número de exámenes parciales aprobados con el resultado del examen final. Llamamos:

$\mathbf{x_i}$**:** "número de parciales aprobados por el alumno i", $\mathbf{y_i}$: "número de finales aprobados por el alumno i".

Los posibles valores de x_i son 0, 1, 2, 3 y 4, y los de y_i son 0 y 1.

Así, por ejemplo el par (2, 1) significa que el alumno aprobó dos parciales y el examen final.

Los siguientes 40 pares de valores son los resultados observados y constituyen una **muestra bidimensional de tamaño 40** de las variables X e Y:

(0, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 0)	(2, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 1)	(0, 0)	(2, 0)	(1, 0)	(3, 1)	(4, 1)
(3, 0)	(3, 1)	(0, 0)	(3, 1)	(1, 0)	(4, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(2, 1)	(1, 0)
(0, 0)	(4, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(0, 0)	(4, 1)	(3, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 0)

➢ Frecuencias, tablas de frecuencias y representaciones gráficas

Consideremos una muestra bidimensional de tamaño n de las variables X e Y. Sea $\mathbf{x_i}$ un valor de la variable X, e $\mathbf{y_j}$ un valor de la variable Y.

- Representamos por $\mathbf{n_{ij}}$ la ***frecuencia absoluta del par*** $(\mathbf{x_i}, \mathbf{y_j})$, número de veces que aparece dicho par en la muestra (si este par no es de la muestra, $n_{ij} = 0$).
- Representamos por $\mathbf{n_{i.}}$ la ***frecuencia absoluta del valor*** $\mathbf{x_i}$ de la variable X, y por $\mathbf{n_{.j}}$ **la** ***frecuencia absoluta del valor*** $\mathbf{y_j}$ de la variable Y.
- Representamos por $\mathbf{f_{ij}}$, $\mathbf{f_{i.}}$ y $\mathbf{f_{.j}}$ las ***frecuencias relativas*** del par (x_i, y_j), del elemento x_i y del elemento y_j, respectivamente:

$$\mathbf{f_{ij}} = \frac{\mathbf{n_{ij}}}{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{f_{i.}} = \frac{\mathbf{n_{i.}}}{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{f_{.j}} = \frac{\mathbf{n_{.j}}}{\mathbf{n}}$$

Ejemplo 2

La siguiente tabla de doble entrada es la ***tabla de frecuencias conjunta*** de la muestra bidimensional del ejemplo 1 y contiene las frecuencias absolutas de todos los pares de valores de las variables X e Y. Estas frecuencias corresponden a les celdas centrales blancas. La suma de dichas frecuencias absolutas es igual a 40, que es el tamaño de la muestra. Por ejemplo, la frecuencia absoluta del par (2, 1) es **5**, y la del par (4, 0) es **0**.

x_i \ y_j	0	1	$n_{i\cdot}$
0	9	1	10
1	7	2	9
2	3	**5**	8
3	1	6	7
4	**0**	6	6
$n_{\cdot j}$	20	20	40

Tabla de frecuencias marginal de X

x_i	$n_{i\cdot}$
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
Total	40

Taula de frecuencias marginal de Y

y_j	0	1	Total
$n_{\cdot j}$	20	20	40

Llamamos ***tablas de frecuencias marginales*** a las tablas que contienen, por separado, las frecuencias absolutas de los valores de cada variable.

La ***tabla de frecuencias marginal de X*** corresponde a las columnas de color azul y sus frecuencias se obtienen de la tabla conjunta **sumando las frecuencias conjuntas de cada fila**.

La ***tabla de frecuencias marginal de Y*** corresponde a las columnas de color rosa y sus frecuencias se obtienen de la tabla conjunta **sumando las frecuencias conjuntas de cada columna**.

Los pares de valores de una muestra bidimensional se representan en dos ejes cartesianos y constituyen el ***diagrama de dispersión*** o, más vulgarmente, ***nube de puntos***. Para indicar que un punto tiene frecuencia mayor que 1 (se repite) se indica en el diagrama con un círculo de área proporcional a la frecuencia.
Otra representación es el ***diagrama de barras tridimensional*** en donde la altura indica la frecuencia.

Representamos las dos gráficas correspondientes a la tabla de frecuencias conjunta del ejemplo 2:

Diagrama de dispersión

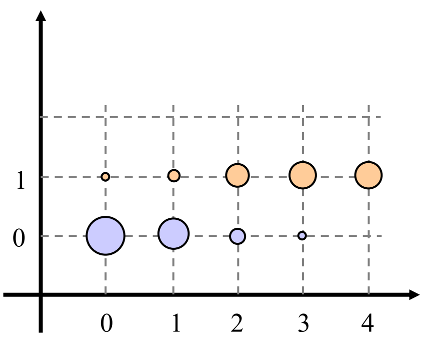
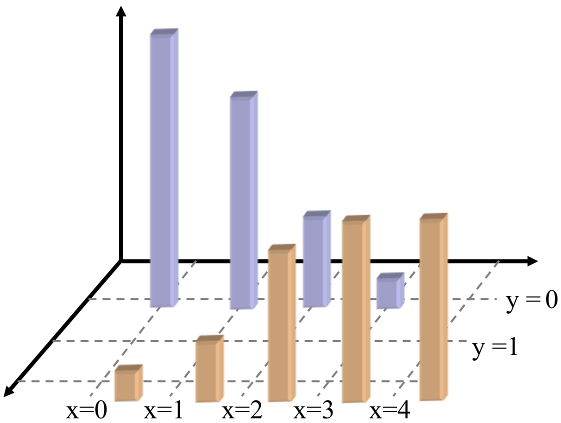


Diagrama de barras tridimensional



1 Calcula la tabla de frecuencias conjunta, las marginales y la representación gráfica de la siguiente muestra:

(1, 3) (4, 2) (3, 3) (2, 3) (3, 4) (3, 1) (3, 2) (4, 3) (3, 2) (3, 3)
(3, 3) (3, 4) (3, 5) (2, 2) (4, 3) (3, 3) (4, 4) (5, 3) (2, 4) (2, 3)

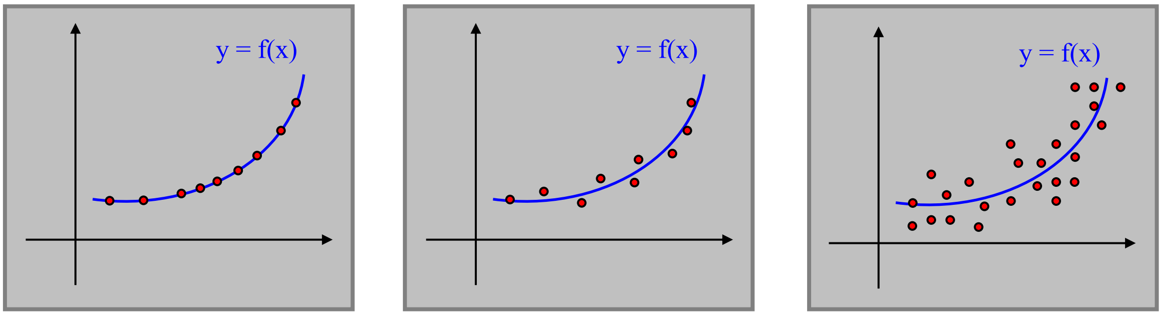
2.2 Dependencia funcional y dependencia estadística

Decimos que en una muestra bidimensional $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ de valores de dos variables X e Y existe ***dependencia funcional*** si es posible encontrar una función **f**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforme cada valor de una de las variables de la muestra en un valor de la otra variable:

$$\mathbf{y_1 = f(x_1),\ \ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ \ y_n = f(x_n)}$$

Es necesario que cada valor de la variable X no sea pareja de más de un valor de la variable Y, pues en caso contrario la relación nunca podría ser funcional.

- Si existe relación de dependencia funcional, al representar el diagrama de dispersión de la muestra junto a la gráfica de la función f todos los pares de valores de la muestra son puntos de dicha gráfica. Es el caso del primero de los siguientes diagramas.



- En los tres diagramas hay **dependencia estadística** (la dependencia funcional es un caso particular de dependencia estadística), pero sólo en el primero de ellos hay dependencia funcional.
- En el segundo diagrama, los pares de valores se distribuyen muy cerca de la gráfica de la función, con lo que ésta podría utilizarse para aproximar los valores de la variable Y, representando además la nube de puntos. Entonces diríamos que hemos ***ajustado*** la curva de función y = f(x) a la nube de puntos que representa gráficamente a la muestra.
- También podríamos hacerlo en el tercer diagrama, pero los valores se encuentran más dispersos y el ajuste no sería tan preciso.

La ecuación **y = f(x)** sirve como ecuación ***generadora*** de los valores de la muestra, aunque sólo en el primer caso es rotundamente cierto. De este modo se crea un ***modelo*** (la función) que explica el comportamiento conjunto de las dos variables y que se puede utilizar para realizar predicciones de una en función de la otra.

Muchas variables que no dependen funcionalmente entre sí pueden ser relacionadas por una función que sirva como modelo explicativo de las observaciones, aunque se producirán errores más apreciables; es el caso de variables como el peso y la altura, el consumo y la renta, la temperatura y el consumo de agua, etc.

La ***teoría de la regresión*** se ocupa de buscar modelos de funciones que puedan representar la relación existente entre dos o más variables. Una parte de esta rama de la Estadística es la ***teoría de la regresión lineal***, de la que nos ocupamos a continuación, cuyo objetivo es tomar como modelo de la relación entre dos variables una ***función lineal*** y cuya representación es ***una recta***.

2 Los siguientes datos corresponden a la esperanza de vida y mortalidad infantil (‰) en países africanos en el año 1998 (Médicos sin fronteras). Represéntalos gráficamente. ¿Será adecuada una representación lineal?

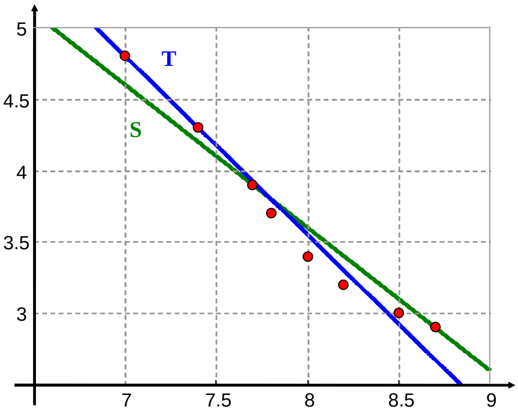
País	Angola	Congo	Guinea	Kenia	Mozambique	Somalia	Togo	Zaire
Esp. Vida	46.8	51.3	48.2	55.5	46.4	47.2	55	45
Mort. infantil	124	93	117	69	148	122	85	93

➢ Ajuste de una recta a una nube de puntos

Ejemplo 3

La siguiente tabla contiene los datos del IPC y del precio del dinero (en %) durante 8 meses consecutivos, y su representación gráfica muestra lo apropiado de la función lineal (una recta) para relacionar estas variables.

x_i : IPC	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
y_i : Mibor	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8



Elegimos dos posibles rectas que intentan ajustar los datos:

- Recta que pasa por los puntos (8.7, 2.9) y (7.7, 3.9):

  $S(x) = -x + 11.6$

- Recta que pasa por los puntos (7.4, 4.3) y (7, 4.8):

  $T(x) = -1.25x + 13.55$

¿Cómo decidimos qué recta ofrece mejor ajuste?

Comparamos los valores que cada función lineal asocia a los IPC x_i de la muestra con los Mibor y_i observados en la muestra, y diremos que **la recta que mejor se ajusta será aquella para la que la suma de todas las distancias d_i entre los valores ajustados $f(x_i)$ y los valores observados y_i sea menor:**

$$D_T = \sum_{i=1}^{6} d_i = \sum_{i=1}^{6} |S(x_i) - y_i| \qquad D_S = \sum_{i=1}^{6} d_i = \sum_{i=1}^{6} |T(x_i) - y_i|$$

x_i	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$S(x_i)$	2.9	3.1	3.4	3.6	3.8	3.9	4.2	4.6
y_i	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
d_i	0	0.1	0.2	0.2	0.1	0	0.1	0.2

x_i	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$T(x_i)$	2.675	2.925	3.3	3.55	3.8	3.925	4.3	4.8
y_i	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
d_i	0.225	0.075	0.1	0.15	0.1	0.025	0	0

Estas distancias o diferencias positivas, llamadas ***errores o desviaciones***, están calculadas en las anteriores tablas:

Para $S(x) = -x + 11.6$ $\qquad D_S = 0 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0 + 0.1 + 0.2 = \mathbf{0.9}$

Para $T(x) = -11.25x + 13.55$ $\qquad D_T = 0.225 + 0.075 + 0.1 + 0.15 + 0.1 + 0.025 + 0 + 0 = \mathbf{0.675}$

Como **$D_T < D_S$, la función lineal T se ajusta mejor a la muestra que la función S**.

Sin embargo, este método puede no resultar decisivo (realiza la actividad 3). En su lugar se utiliza la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Es el ***criterio de los mínimos cuadrados***:

$$D_S^2 = \sum_{i=1}^{6} d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{6} (S(x_i) - y_i)^2 \qquad D_T^2 = \sum_{i=1}^{6} d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{6} (T(x_i) - y_i)^2$$

Para $S(x) = -x + 11.6$ $\qquad D_S^2 = 0^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.2^2 + \cdots + 0.2^2 = 0.150$

Para $T(x) = -1.25x + 13.55$ $\qquad D_T^2 = 0.225^2 + 0.075^2 + 0.1^2 + \cdots + 0^2 = \mathbf{0.099}$

Como $\mathbf{D_T^2} < \mathbf{D_S^2}$ (con el criterio de los mínimos cuadrados), **la función lineal T ajusta mejor que la S**.

3 Considera la muestra $\{(1, 1), (2, 0), (2, 2), (4, 2), (4, 4), (5, 3)\}$. Comprueba que la suma de errores no decide cuál de las rectas $R(x) = x - 1$ y $S(x) = 2$ se ajusta mejor, pero sí la suma de los cuadrados de los errores.

2.3 La recta de regresión de Y sobre X

En el ejemplo anterior la función lineal T(x) se ajustaba mejor a la nube de puntos que la función S(x) basando la decisión en el criterio de elegir la función para la que es menor la suma de los cuadrados de los errores o desviaciones, cometidos al sustituir los valores de la variable Y, y_i, por los de f(X), $f(x_i)$.

Pretendemos ahora elegir la función lineal que **minimiza la suma de dichos cuadrados**.

Dada una muestra bidimensional (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), llamamos ***recta de regresión de* Y *sobre* X** a la recta **y = f(x) = ax + b** en la que es **mínima la suma**:

$$\mathbf{D_f^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2}$$

Para obtener dicha recta introducimos el siguiente concepto.

➢ Covarianza de una muestra

Llamamos ***covarianza*** de la muestra bidimensional (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), representada por $\mathbf{S_{xy}}$, al parámetro estadístico conjunto de ambas variables dado por la expresión:

$$\mathbf{S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

Sin embargo, en la práctica, se utiliza otra expresión para el cálculo de la covarianza:

La covarianza de la muestra (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) viene dada por:

$$\mathbf{S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y}}$$

Esta última expresión se obtiene de la anterior desarrollando los productos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x}\, y_i - \bar{y}\, x_i + \bar{x}\,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,\bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y} - n\,\bar{x}\,\bar{y} + n\,\bar{x}\,\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}$$

Ejemplo 4

Hallamos la covarianza de la muestra {(1, 1), (2, 0), (2, 2), (4, 2), (4, 4), (5, 3)} donde $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = 2$.

La covarianza será $S_{xy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$

$$= \frac{(1-3)(1-2)+(2-3)(0-2)+(2-3)(2-2)+(4-3)(2-2)+(4-3)(4-2)+(5-3)(3-2)}{6} = \frac{4}{3}$$

O bien, por la forma práctica $S_{xy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 2 + 4\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 3}{6} - 3\cdot 2 = \frac{44}{6} - 6 = \frac{4}{3}$.

➢ Teorema: Ecuación de la recta de regresión de Y sobre X

Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), .., (x_n, y_n)$ es una muestra bidimensional, la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X viene dada por:

$$\mathbf{R:}\ \ y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$$

Es importante resaltar, a la vista de la ecuación anterior, que:

- La recta de regresión siempre pasa por el punto $\mathbf{P}(\bar{x}, \bar{y})$ de las medias de las dos variables.
- La pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $\mathbf{m} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$.

Ejemplo 5

Con la fórmula anterior, obtenemos la recta de regresión mínimo-cuadrática para la muestra del ejemplo 3:

$$\{(8.7, 2.9), (8.5, 3), (8.2, 3.2), (8, 3.4), (7.8, 3.7), (7.7, 3.9), (7.4, 4.3), (7, 4.8)\}$$

Para ello necesitamos calcular las medias y la covarianza de las dos variables y la varianza de la primera variable.

- $\bar{x} = \dfrac{8.7+8.5+8.2+8+7.8+7.7+7.4+7}{8} = \dfrac{63.3}{8}, \quad \bar{y} = \dfrac{2.9+3+3.2+3.4+3.7+3.9+4.3+4.8}{8} = \dfrac{29.2}{8}$
- $S_{xy} = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \dfrac{8.7\cdot 2.9 + 8.5\cdot 3 + 8.2\cdot 3.2 + \cdots + 7\cdot 4.8}{8} - \dfrac{63.3}{8}\cdot\dfrac{29.2}{8} = -\dfrac{20.52}{64}$
- $S_x^2 = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \bar{x}^2 = \dfrac{8.7^2+8.5^2+8.2^2+8^2+7.8^2+7.7^2+7.4^2+7^2}{8} - \left(\dfrac{63.3}{8}\right)^2 = \dfrac{17.67}{64}$

La ecuación de la recta de regresión es:

$$R:\ y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x}) \iff R:\ y - \frac{29.2}{8} = \frac{-20.52/64}{17.67/64}\left(x - \frac{63.3}{8}\right) \iff \mathbf{R:\ y = \frac{-2052}{1767}\,x + \frac{22686}{1767}}$$

Comprobamos que el valor de la suma de los errores o desviaciones al cuadrado es menor que cualquiera de los obtenidos en el ejemplo 5, pues la recta de regresión posee esta propiedad:

$\mathbf{x_i}$	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$\mathbf{R(x_i)}$	4833.6/1767	5244/1767	5859.6/1767	6270/1767	6680.4/1767	6685.6/1767	7501.2/1767	8322/1767
$\mathbf{y_i}$	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
$\mathbf{d_i}$	−290.7/1767	−57/1767	205.2/1767	262.2/1767	142.5/1767	−5.7/1767	−96.9/1767	−159.6/1767

$$\mathbf{D_f^2} = \sum_{i=1}^{6} d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{6} |R(x_i) - y_i|^2 = \frac{290.7^2 + 57^2 + \cdots + 159.6^2}{1767^2} = \mathbf{0.08129}$$

4 La covarianza es positiva cuando valores mayores de una variable se corresponden “generalmente” con valores mayores de la otra variable, como en el ejemplo 4. Representa y comprueba que la covarianza de la siguiente muestra es negativa: (1, 3), (1, 0), (2, 2), (3, 4), (3, 0), (4, 2), (4, −1), (5, −1), (6, −3), (6, 0).

5 Representa gráficamente la muestra bidimensional siguiente y calcula la covarianza y la recta de regresión:

(1, 2) (2, 3) (3, 3) (4, 5) (5, 6) (6, 7) (7, 9) (8, 9)

Ejemplo 6

Una persona lanza 4 veces una moneda. Repite este experimento 10 veces y obtiene los siguientes resultados:

CKCC   CCKK   KKKK   KCCK   KKCK   KCCC   CKKC   KCKC   CCCC   KCKK

Definimos las siguientes variables:

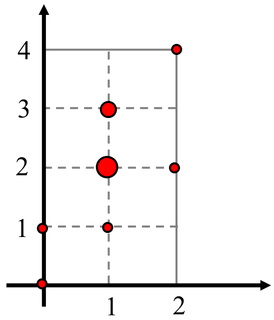
X: "número de caras en los 2 primeros lanzamientos",   Y: "número de caras en los 4 lanzamientos".

Cada resultado del experimento se corresponde con un valor para cada variable. Así obtenemos la siguiente muestra bidimensional de tamaño n = 10:

(1, 3)   (2, 2)   (0, 0)   (1, 2)   (0, 1)   (1, 3)   (1, 2)   (1, 2)   (2, 4)   (1, 1)

Estos datos se resumen en la siguiente tabla de frecuencias conjunta que contiene también la tabla de frecuencias de la variable X y la tabla de frecuencias de la variable Y.

x_i \ y_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	$\mathbf{n_{i\,\cdot}}$
0	1	1	0	0	0	2
1	0	1	3	2	0	6
2	0	0	1	0	1	2
$\mathbf{n_{\cdot\,j}}$	1	2	4	2	1	10



La recta de regresión de Y sobre X es **R:** $\mathbf{y - \bar{y} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})}$.

Tomando las frecuencias correspondientes, hallamos las medias $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la varianza S_x^2 y la covarianza S_{xy}:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} x_i\, n_{i\cdot} = \frac{0\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot 2}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{5} y_j\, n_{\cdot j} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} x_i^2\, n_{i\cdot} - \bar{x}^2 = \frac{0^2\cdot 2 + 1^2\cdot 6 + 2^2\cdot 2}{10} - 1 = 0.4$$

$$S_{xy} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{7} x_k\, y_k\, n_k - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 1}{10} - 1\cdot 2 = 0.5$$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es:

$$\mathbf{R:\ y - 2 = \frac{0.5}{0.4}(x - 1)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R:\ y = 1.25x + 0.75}$$

6 Calcula los valores de la muestra bidimensional para las variables X e Y del ejemplo 6 que corresponden a los 16 diferentes resultados que se pueden obtener al lanzar 4 veces una moneda, que describimos a continuación, y obtén la tabla de frecuencias conjunta, el diagrama de dispersión, la covarianza y la recta de regresión:

KKKK CKKK KCKK KKCK KKKC CCKK CKCK CKKC KCCK KCKC KKCC KCCC CKCC CCKC CCCK CCCC

7 Mostramos los resultados de una encuesta a 10 familias, el 1.^{er} elemento del par es la renta mensual y el 2.º el coste del consumo eléctrico del mes de enero. Calcula la covarianza y la recta de regresión del coste del consumo sobre la renta mensual: (1500, 100), (1600, 110), (1700, 120), (1800, 100), (1900, 100), (2000, 120), (2100, 150), (2200, 175), (2300, 150) y (2400, 140).

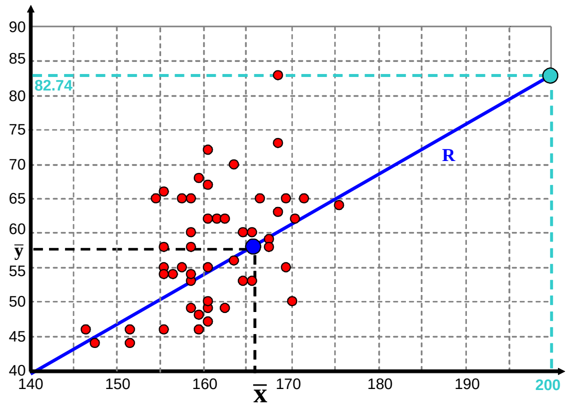
➢ Predicciones sobre la variable dependiente

La recta de regresión de Y sobre X se utiliza para ***predecir*** valores de la variable dependiente Y, dado un valor de la variable independiente X.

Ejemplo 7

Un estudio realizado sobre 50 estudiantes del sexo femenino de 15 años de edad arroja la siguiente muestra bidimensional, correspondientes a su talla en cm y peso en kg, representadas por las variables X e Y:

(168, 56) (165, 50) (159, 65) (165, 62) (161, 54)
(160, 46) (152, 44) (160, 58) (165, 72) (173, 73)
(156, 44) (163, 58) (165, 47) (164, 68) (168, 70)
(167, 49) (169, 60) (169, 53) (174, 55) (165, 55)
(164, 48) (163, 54) (164, 46) (163, 60) (163, 49)
(162, 55) (160, 55) (173, 83) (171, 65) (160, 54)
(170, 53) (167, 63) (175, 62) (156, 46) (163, 65)
(165, 49) (172, 59) (163, 53) (170, 60) (180, 64)
(174, 65) (173, 63) (151, 46) (176, 65) (160, 66)
(165, 50) (165, 67) (172, 58) (162, 65) (166, 62)



Prácticamente ninguna pareja se repite, lo que demuestra la heterogeneidad de estas medidas, tomadas en cm y kg. No tiene sentido plantear una tabla de frecuencias conjunta pero sí representar el diagrama de dispersión.

La recta de regresión de Y sobre X es **R:** $\mathbf{y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{8.276}{50} = \mathbf{165.52} \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{2889}{50} = \mathbf{57.78}$$

$$\left.\begin{aligned} S_x^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1371622}{50} - (165.52)^2 = 35.57 \\ S_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{479\,475}{50} - 165.52 \cdot 57.78 = 25.75 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{25.75}{35.57} \simeq \mathbf{0.7240}$$

Por tanto la recta de regresión es:

$$\mathbf{R:\ y - 57.78 = 0.7240\ (x - 165.52)} \quad \Leftrightarrow \quad y = \mathbf{R(x) = 0.7240x - 62.06}$$

- Si en el ejemplo anterior queremos predecir el peso que correspondería a una chica que midiera 200 cm, le asociamos el valor R(200) o valor de y que corresponde a x = 200:

$$\mathbf{R(200)} = 0.7240 \cdot 200 - 62.06 \simeq \mathbf{82.74\ kg}$$

8 En el ejemplo 7, calcula el valor del peso que corresponde a una chica de altura 175 cm utilizando la recta de regresión allí obtenida.

9 Para la muestra bidimensional de la actividad 7, calcula el coste de consumo eléctrico que correspondería a una renta mensual de 1200 euros utilizando la recta de regresión hallada en dicho ejercicio.

2.4 La recta de regresión de X sobre Y

La recta de regresión de Y sobre X es utilizada para realizar predicciones de la variable Y, como hemos visto en el ejemplo 7. En dicho ejemplo la recta es:

$$R: \; y = 0.7240x - 62.06$$

La predicción del peso y que corresponde a una chica con altura x = 200 cm se obtiene al sustituir el valor x = 200 en la anterior ecuación:

$$\mathbf{y} = 0.7240 \cdot \mathbf{200} - 62.06 \simeq \mathbf{82.74\ kg.}$$

Pero, ¿y si queremos predecir la altura x que corresponde a una chica con peso y = 75 kg? No se trata de sustituir el valor y = 75 en la ecuación de la recta R y despejar x, sino intercambiar los papeles de X y de Y; calcular una nueva recta de regresión, la recta S: x = ay + b, para la que es mínima la suma de las diferencias cuadráticas:

$$\mathbf{D_S^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{d_i^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left(\mathbf{g(y_i)} - \mathbf{x_i} \right)^2, \; \text{con } g(y) = ay + b$$

Dicha recta se llama ***recta de regresión de* X *sobre* Y**, y su ecuación difiere de la anterior recta sólo en el intercambio de papeles de las dos variables:

Consideramos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ una muestra bidimensional de dos variables X e Y. La ***recta de regresión de* X *sobre* Y**, utilizada para predecir la variable X, es:

$$\mathbf{S: \; x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y})}$$

A continuación expresamos las características geométricas de las dos rectas de regresión.

➢ Propiedades de las rectas de regresión

Consideramos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ una muestra bidimensional de dos variables X e Y.

Para predecir la variable Y utilizamos la recta de regresión de Y sobre X, y para predecir la variable X utilizamos la recta de regresión de X sobre Y:

$$\mathbf{R: \; y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x})} \qquad \mathbf{S: \; x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y})}$$

Tenemos las siguientes propiedades:

P1 Las dos rectas de regresión se cortan siempre en el punto $\mathbf{P(\bar{x}, \bar{y})}$.

P2 La pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $\mathbf{m_R} = \dfrac{\mathbf{S_{xy}}}{\mathbf{S_x^2}}$.

P3 La pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es $\mathbf{m_S} = \dfrac{\mathbf{S_y^2}}{\mathbf{S_{xy}}}$ (sobre el sistema cartesiano OXY habitual).

P4 Las pendientes de las dos rectas de regresión y la covarianza tienen el mismo signo.

P5 Si la covarianza es 0, entonces la recta R es horizontal y la recta S es vertical.

Ejemplo 8

En el ejemplo 7 hemos obtenido la recta de regresión de Y sobre X, para una muestra bidimensional de valores correspondientes a las alturas y pesos de 50 chicas de una misma edad.

$$\mathbf{R:\ y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R:\ y = 0.7240x - 62.06}$$

Obtenemos ahora la recta de regresión de X sobre Y:

$$\mathbf{S:\ x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})}$$

Calculamos la varianza de Y

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{170517}{50} - (57.78)^2 = 71.81$$

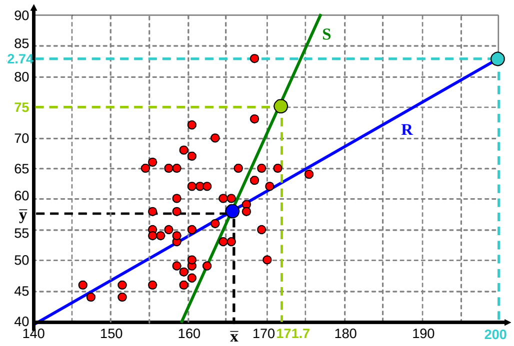
y con los valores de las medias y la covarianza, ya calculados en el ejemplo 7, obtenemos la nueva recta:

$$\mathbf{S:\ x - 165.52 = 0.3586\,(y - 57.78)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S:\ x = 0.3586y + 144.80}$$

Si queremos predecir la altura que correspondería a una chica que pesara y = 75 kg, entonces:

$$x = 0.3586 \cdot 75 + 144.80 \simeq \mathbf{171.70\ cm}$$

A continuación tenemos representadas, sobre los mismos ejes cartesianos OXY habituales, la recta R de regresión de Y sobre X y la recta S de regresión de X sobre Y.



Obtenemos el valor de las pendientes de ambas rectas. Para ello, debemos despejar y en ambas ecuaciones.

- R: $y = 0.7240x - 62.06 \ \rightarrow\ \mathbf{m_R = 0.7240}$
- S: $x = 0.3586y + 144.80 \ \rightarrow\ 0.3586y = x - 144.80 \ \rightarrow\ y = \frac{1}{0.3586}\cdot x + \frac{144.80}{0.3586}$

Llegamos a que $\mathbf{m_S} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.3586}} = \mathbf{2.7886}$.

10 Las calificaciones que 10 alumnos obtuvieron en los exámenes A y B están expresadas en la siguiente tabla:

Calificación 1	4	7	3	5	5	3	4	3	3	3
Calificación 2	6	5	4	6	7	4	6	4	3	5

(A) Obtén las ecuaciones de las dos rectas de regresión, representa gráficamente el diagrama de dispersión y ambas rectas y comprueba que se cortan en el punto de las medias de ambas variables.
(B) Calcula la pendiente de las dos rectas y comprueba que su signo es el mismo que el de la covarianza.
(C) ¿Cuál es la predicción de la calificación para el segundo examen de un alumno con un 2 en el primero?
(D) ¿Cuál es la predicción de la calificación para el primer examen de un alumno con un 2 en el segundo?

2.5 Coeficientes de correlación lineal y determinación

La recta de regresión de Y sobre X es la recta que mejor se ajusta a los valores de una muestra bidimensional según el criterio de los mínimos cuadrados, ya que de todas las rectas del plano es la que hace mínima la expresión

$$\mathbf{D_f^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{f(x_i) - y_i}\right)^2, \text{ siendo } f(x) = ax + b.$$

El valor medio de la anterior expresión, calculada para la función lineal que corresponde a la recta de regresión de Y sobre X, es una medida de la calidad del ajuste y se llama ***varianza residual de*** **Y**:

$$\mathbf{V_R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{R(x_i) - y_i}\right)^2$$

siendo $R(x) = \overline{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \overline{x})$.

De la misma forma, la ***varianza residual de*** **X** proporciona el mismo tipo de medida para la recta de regresión de X sobre Y:

$$\mathbf{V_S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{S(y_i) - x_i}\right)^2$$

siendo $S(y) = \overline{x} + \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \overline{y})$.

Pero tenemos el mismo tipo de problemas que con la media o la varianza: no podemos comparar directamente varianzas residuales, pues a mayores valores muestrales, mayores varianzas residuales. Hay que obtener una medida que represente la calidad del ajuste sin depender de las magnitudes de los valores. Un primer paso para ello es considerar el cociente entre las varianzas residuales y las respectivas varianzas:

$$\frac{V_R}{S_y^2} \quad y \quad \frac{V_S}{S_x^2}$$

Efectuando las operaciones necesarias en las expresiones de la varianzas residuales se puede demostrar que ambos cocientes verifican:

$$\boxed{\frac{\mathbf{V_R}}{\mathbf{S_y^2}} = \frac{\mathbf{V_S}}{\mathbf{S_x^2}} = 1 - \frac{\mathbf{S_{xy}^2}}{\mathbf{S_x^2 \cdot S_y^2}}}$$

Ambos cocientes de varianzas son no negativos y menores o iguales que 1, por lo que pueden ser utilizados para comparar los ajustes de distintas muestras y, además, valen lo mismo, por lo que proporcionan un valor único para la muestra bidimensional.

El último término de la anterior expresión, más concretamente su raíz cuadrada, es el utilizado para ello por su comodidad de cálculo y recibe el nombre de ***coeficiente de correlación lineal***:

Dada una muestra bidimensional (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), llamamos ***coeficiente de correlación lineal***, representado por ρ, al cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de ambas variables:

$$\rho = \frac{\mathbf{S_{xy}}}{\mathbf{S_x \cdot S_y}}$$

El cuadrado del coeficiente de correlación es el ***coeficiente de determinación***: $\mathbf{D} = \rho^2 = \frac{\mathbf{S_{xy}^2}}{\mathbf{S_x^2 \cdot S_y^2}}$.

➢ Propiedades del coeficiente de correlación

P1 El coeficiente de correlación lineal ρ está comprendido entre -1 y 1, y su signo coincide con el de las pendientes de las rectas de regresión y el de la covarianza:

$$-1 \le \rho \le 1$$

P2 El valor de ρ mide la representatividad de R y S. El significado de los casos extremos es:

- Si $\rho = 1$ o $\rho = -1$, la representación lineal es perfecta y tanto **R** como **S son iguales**. Decimos que las variables **X e Y** ***dependen linealmente***.
- Si $\rho = 0$, la representación lineal es totalmente inapropiada. La recta **R es horizontal** y la recta **S es vertical**.

P1 Según la definición de coeficiente de correlación, la expresión de la página anterior es:

$$\frac{V_R}{S_y^2} = \frac{V_S}{S_x^2} = 1 - \rho^2$$

Como: $V_R \ge 0$ y $S_y^2 \ge 0 \;\rightarrow\; 1-\rho^2 \ge 0 \;\rightarrow\; \rho^2 \le 1 \;\rightarrow\; -1 \le \rho \le 1$

Como $\rho = \dfrac{S_{xy}}{S_x\ S_y}$ y las pendientes de las rectas de regresión son $m_R = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$ y $m_S = \dfrac{S_y^2}{S_{xy}}$, el signo de ρ y de las pendientes es el mismo que el de S_{xy}, pues las varianzas son positivas.

P2 Si $\rho = \pm 1 \;\rightarrow\; \rho^2 = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{V_R}{S_y^2} = \dfrac{V_S}{S_x^2} = 1 - \rho^2 = 0 \;\rightarrow\; V_R = V_S = 0$

Como V_R y V_S son una suma de cuadrados, si valen 0 es porque todos los sumandos son iguales a 0:

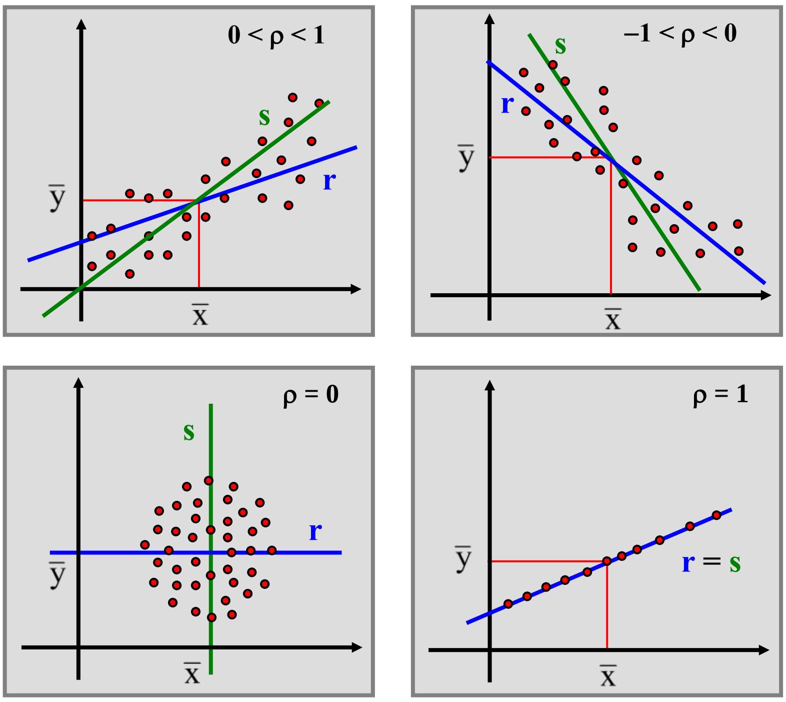
$$V_R = V_S = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(R(x_i) - y_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S(y_i) - x_i\right)^2 = 0$$

Obtenemos $R(x_i) = y_i$ y $S(y_i) = x_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Los valores x_i e y_i **dependen linealmente** a través de las rectas de regresión, que son la misma recta.

- Si $\rho = 0$, $S_{xy} = 0$, y la recta R es horizontal y la recta S es vertical, de ecuaciones:

R: $x - \bar{x} = 0$ **S:** $y - \bar{y} = 0$



Ejemplo 9

Calculamos los coeficientes de correlación de las muestras de los ejemplos 3 y 7.

- En el ejemplo 3, la muestra de tamaño 6 es:

$$\{(0, 0), (8, 1), (40, 5), (50, 6), (60, 7), (80, 9)\}$$

Como $S_x^2 = 787.22$, $S_y^2 = 10.22$ y $S_{xy} = 89.56$:

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{89.56}{\sqrt{787.22} \cdot \sqrt{10.22}} = \mathbf{0.9984}$$

El valor tan cercano a 1 del coeficiente de correlación lineal $\rho = 0.9984$ demuestra, sin necesidad de ver la gráfica de la muestra, que el ajuste lineal es casi perfecto y, el signo positivo, que las rectas de regresión son crecientes (a mayores valores de una variable corresponden mayores valores de la otra). Las rectas de regresión ajustarán muy bien los datos y las predicciones serán fiables.

- En el ejemplo 7 la muestra, de tamaño 50, es:

(168, 56) (165, 50) (159, 65) (165, 62) (161, 54) (160, 46) (152, 44) (160, 58) (165, 72) (173, 73)
(156, 44) (163, 58) (165, 47) (164, 68) (168, 70) (167, 49) (169, 60) (169, 53) (174, 55) (165, 55)
(164, 48) (163, 54) (164, 46) (163, 60) (163, 49) (162, 55) (160, 55) (173, 83) (171, 65) (160, 54)
(170, 53) (167, 63) (175, 62) (156, 46) (163, 65) (165, 49) (172, 59) (163, 53) (170, 60) (180, 64)
(174, 65) (173, 63) (151, 46) (176, 65) (160, 66) (165, 50) (165, 67) (172, 58) (162, 65) (166, 62)

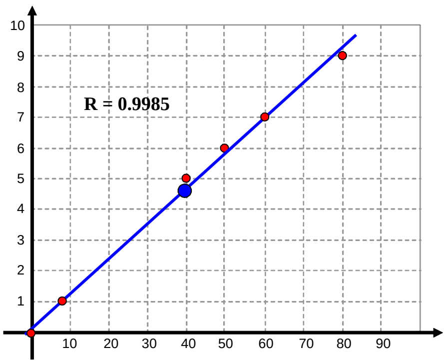
Como $S_x^2 = 35.57$, $S_y^2 = 71.93$ y $S_{xy} = 25.7544$:

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{25.7544}{\sqrt{35.57} \cdot \sqrt{71.93}} = \mathbf{0.5092}$$

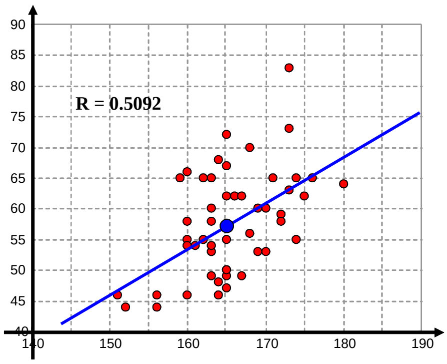
El valor alejado de 1 del coeficiente de correlación $\rho = 0.5092$ significa que el ajuste lineal es pobre, en comparación con el caso anterior. En este caso las rectas de regresión no proporcionaran valores fiables en las predicciones.

A continuación tenemos los diagramas de dispersión de ambas muestras, que corroboran lo obtenido con los coeficientes de correlación.

Ejemplo 3



Ejemplo 7



11 Estudiemos con las siguientes muestras los resultados más extremos para el coeficiente de correlación:

(A) Representa la muestra (1,2), (1,3), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,2) y (4,3) comprueba que $\rho = 0$ y que las rectas de regresión son una horizontal y la otra vertical.

(B) Representa la muestra (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) y (4, 9), que son puntos de la recta $y = 2x + 1$, comprueba que para ella $\rho = 1$ y que las rectas de regresión son ambas iguales a la recta dada.

Propiedades

Supongamos que $\mathbf{m_R}$ y $\mathbf{m_S}$ son las pendientes de las rectas de regresión R y S de dos variables X e Y. Obtenemos las siguientes propiedades:

P3 $\dfrac{\mathbf{m_R}}{\mathbf{m_S}} = \boldsymbol{\rho^2} = \mathbf{D}$

P4 $\begin{cases} \text{Si} \quad m_R > 0,\ m_S > 0 & \rightarrow \quad m_R < m_S \\ \text{Si} \quad m_R < 0,\ m_S < 0 & \rightarrow \quad m_R > m_S \end{cases}$

P3 Como $m_R = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, $m_S = \dfrac{S_y^2}{S_{xy}}$ y $\rho = \dfrac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$, tenemos $\dfrac{m_R}{m_S} = m_R \cdot \dfrac{1}{m_S} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2} \dfrac{S_{xy}}{S_y^2} = \dfrac{S_{xy}^2}{S_x^2 \cdot S_y^2} = \rho^2$.

P4 Como $\rho^2 \leq 1 \rightarrow \dfrac{m_R}{m_S} = \rho^2 \leq 1 \rightarrow \dfrac{m_R}{m_S} \leq 1$,

- Si $m_R > 0$ y $m_S > 0 \rightarrow m_R \leq m_S$
- Si $m_R < 0$ y $m_S < 0 \rightarrow m_R \geq m_S$

Ejemplo 10

Las rectas de ecuaciones $2x - y + 3 = 0$ y $x - y = 2$ son las rectas de regresión de dos variables X e Y. Calculamos el coeficiente de correlación.

Obtenemos las pendientes de ambas rectas, expresándolas previamente en sus ecuaciones explícitas:

$$2x - y + 3 = 0 \iff y = 2x + 3 \qquad\qquad x - y = 2 \iff y = x - 2$$

Las pendientes de ambas rectas son m = 2 y m' = 1.

Como por la propiedad P4, $\rho^2 = \dfrac{m_R}{m_S}$, y por la propiedad P1, $\rho^2 \leq 1$, necesariamente:

$$m_R = 1 \text{ y } m_S = 2 \quad \rightarrow \quad \rho^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

pues, en caso contrario, sería $\rho^2 = \dfrac{2}{1} = 2$, que es imposible pues debe ser $\rho^2 \leq 1$. Deducimos:

R: y = x – 2 y S: y = 2x + 3

12 Con los datos de la actividad 2, responde a las siguientes preguntas:
(A) ¿Qué mortalidad infantil correspondería a un país con una esperanza de vida de 40 años? ¿Y de 80 años?
(B) ¿Qué esperanza de vida correspondería a un país con una mortalidad infantil del 5 %? ¿Y del 1 %?

13 ¿Es posible que las siguientes rectas sean de regresión de dos variables?
R: $x + 2y = 1$ y S: $x - y = 2$.

14 Una empresa con 4 categorías de empleados, A, B, C y D, posee una fábrica en España y otra en Egipto. Los sueldos de sus empleados, por mes y categoría, difieren en ambos países, y vienen dados en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
España X	1200	1600	2000	2400
Egipto Y	260	380	500	800

La empresa piensa crear la categoría de empleado E, con una remuneración de 1000 € en Egipto, y utiliza la regresión lineal para calcular la remuneración que correspondería a la misma categoría en España. ¿Qué cantidad percibirán aquí? ¿Es adecuado utilizar este método para realizar el cálculo? Explica la situación.

Problemas del capítulo 2

1 En un país los tipos de interés y el índice de la bolsa, en los últimos 6 trimestres, son los siguientes:

Tipo de interés	8 %	7.5 %	7 %	6.5 %	6 %	5.5 %
Índice bolsa	1200	1310	1400	1550	1750	1800

(A) Estima el Índice de la bolsa para el próximo trimestre si el tipo de interés es del 5 %. ¿Y si fuera del 4 %?
(B) Estima el tipo de interés cuando el índice de la bolsa sea de 2500 puntos.
(C) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

2 Un rail de una vía de tren mide 100 metros, pero la temperatura afecta a su longitud. La siguiente tabla proporciona el alargamiento, en mm, obtenido a diferentes temperaturas, en grados:

x_i: temperatura	0	8	15	25	40	50	60	80
y_i: alargamiento	0	1	2	3	5	6	7	9

(A) Calcula el coeficiente de correlación de esta muestra bidimensional.
(B) Halla la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que corresponde a una temperatura de 45º.
(C) Halla la recta de regresión de X sobre Y y estima la temperatura correspondiente al alargamiento de 10 mm.

3 Hemos tomado datos sobre el número de cigarrillos consumidos diariamente y el índice de mortalidad. Dichos datos son:

N.º de cigarrillos	3	4	6	15	20	40	45
Índice de mortalidad	0.2	0.3	0.3	0.5	0.7	1.4	1.5

(A) ¿Cuál es la predicción de mortalidad para un consumidor de 60 cigarrillos diarios?
(B) ¿Cuál es la predicción de consumo diario para un índice de mortalidad de 1?
(C) ¿Cuál es la calidad de las predicciones realizadas?

4 La siguiente tabla muestra la evolución del número de trasplantes de hígado en el período 1990/1995:

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995
N.º de trasplantes	5040	5326	6042	6649	7616	7900

(A) Con estos datos y siendo adecuada la representación lineal, estima el número de trasplantes para el año 2005.
(B) ¿Cuál es la bondad de la representación lineal?

5 Las rectas de regresión para dos variables X e Y son $2x + y = 50$ y $x + 2y = 55$.
(A) Calcula las medias de ambas variables.
(B) ¿Cuál es la recta de regresión de Y sobre X?
(C) ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación?

6 Repite las preguntas del problema anterior para las rectas $3x - 5y = 1$ y $5x - 6y = 4$.

7 Las calificaciones de los alumnos de una clase en matemáticas y las respectivas de selectividad vienen dadas en la siguiente tabla. Estudia si la correlación es adecuada.

Matemáticas	6	6	6	8	6	7	7	9	6	8	8	5
Selectividad	5.7	4.3	6.2	6.7	7.3	8.2	6	7	6.7	9.3	5.2	8

8 Las precipitaciones, en litros/m^2, registradas en la ciudad de Banyeres, durante los meses de abril en el período 1979/1990, se dan a continuación en la siguiente tabla junto a las precipitaciones, para el mismo período, en la ciudad de Ontinyent a 35 km de distancia:

Año	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Banyeres	30	110	102	82	27	26	16	34	18	60	31	99
Ontinyent	24	107	169	63	8	24	17	29	8	39	40	81

(A) Calcula el coeficiente de correlación entre las precipitaciones de ambas ciudades. ¿Qué significado tiene su signo?
(B) Estima la lluvia que se recogerá en Ontinyent cuando en Banyeres se recogen 150 l/m^2.
(C) Estima la lluvia que se recogerá en Banyeres cuando en Ontinyent se recogen 80 l/m^2.

9 Calcula el coeficiente de correlación de la siguiente muestra bidimensional:

(1, 15) (3, 18) (5, 20) (8, 22) (10, 20)

(A) Si a los datos de la primera variable sumamos 10 unidades y a los de la segunda variable restamos 5 unidades, calcula el coeficiente de correlación de la nueva muestra. ¿Qué deduces del resultado?
(B) Si a los datos de la primera variable los multiplicamos por 100 y los de la segunda variable los dividimos por 10, calcula el coeficiente de correlación de la nueva muestra. ¿Qué deduces del resultado?
(C) A la vista de los resultados anteriores, calcula de la forma más cómoda posible el coeficiente de correlación de la muestra bidimensional:

(2001, 0.05) (2002, 0.07) (2003, 0.06) (2004, 0.09) (2005, 0.1)

10 Calcula el coeficiente de correlación entre los años y las precipitaciones de la ciudad de Banyeres que tenemos en la tabla del problema 8. Es aconsejable restar 1979 a todos los años, para trabajar con números más pequeños. El coeficiente de correlación será el mismo. ¿Qué opinión te merece el resultado?

11 Las calificaciones obtenidas por 5 alumnos en matemáticas y estadística son:

Matemáticas	5	3	6	7	9
Estadística	7	5	8	9	1

(A) Calcula el coeficiente de correlación entre las calificaciones de matemáticas y estadística de los primeros 4 alumnos. ¿Qué deduces del resultado?
(B) Calcula el coeficiente de correlación para las notas de los 5 alumnos. Justifica la diferencia entre el valor obtenido y el del apartado anterior.

12 En Bolsa se estudia si determinados valores son representados adecuadamente por algunos índices. En la siguiente tabla relacionamos los valores del IBEX 35 y los de Telefónica en el mes de mayo de 2003.

Telefónica	9.72	9.79	10.02	9.65	9.45	9.55	9.55	9.51	9.43	9.40
IBEX 35	6456.4	6491.3	6568.7	6429.0	6300.5	6387.8	6395.0	6376.0	6363.4	6413.8
Telefónica	9.58	9.26	9.27	9.00	9.24	9.29	9.24	9.37	9.52	9.60
IBEX 35	6481.5	6279.6	6298.1	6198.9	6317.9	6346.2	6338.2	6363.6	6472.9	6483.0

(A) Estudia el coeficiente de correlación entre ambas series y establece si las variables tienen cierto grado de dependencia.
(B) En cualquier caso, si el 25 junio de 2003 Telefónica alcanzó el valor 10.28, ¿cuál hubiera sido la predicción para el IBEX 35? (El verdadero valor de aquel día fue 6941.3).
(C) Si el IBEX 35 alcanzó el 26 de junio el valor 6944.6, ¿cuál hubiera sido la predicción para Telefónica? (El verdadero valor fue 10.27).

13 Mostramos la evolución del precio del barril de petróleo, en dólares por barril, y del precio del gasoil de automoción, en céntimos de euro por litro, durante 25 años, de 1990 a 2014.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Precio barril	19.68	22.81	17.52	17.24	14.17	16.88	17.79	23.29	15.07	11.32	25.21	25.95	19.15
Precio gasoil	36.87	41.75	44.34	48.97	49.03	49.46	54.28	56.5	53.55	57.27	70.3	70.06	69.5

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Precio barril	30.77	31.40	42.89	62.36	53.40	90.82	43.91	77.12	92.66	106.89	105.04	102.25
Precio gasoil	70.4	75.9	90	95.7	97	114.1	91.2	107.5	126.7	136.54	135.88	130.31

(A) Calcula la media y la desviación típica de los precios del barril.
(B) Calcula la media y la desviación típica de los precios del gasoil.
(C) Calcula el coeficiente de correlación.
(D) Obtén la ecuación de la recta de regresión necesaria para estimar el precio del gasoil si el del barril de petróleo fuera el próximo año de 150, 125, 100, 75 y 50 dólares, respectivamente.

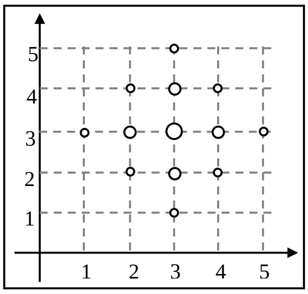
Soluciones de las actividades del capítulo 2

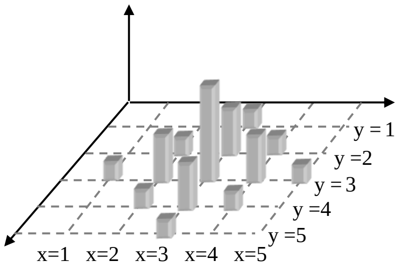
1.

y_j / x_i	1	2	3	4	5	$n_{i.}$
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	2	1	0	4
3	1	2	4	2	1	10
4	0	1	2	1	0	4
5	0	0	1	0	0	1
$n_{.j}$	1	4	10	4	1	20

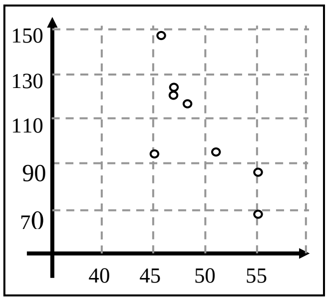
x_i	**$n_{i.}$**
0	1
1	4
2	10
3	4
4	1

y_i	**$n_{i.}$**
0	1
1	4
2	10
3	4
4	1





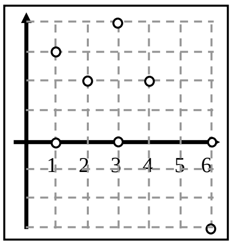
2. Sí.



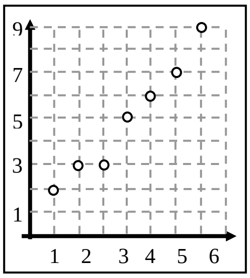
3. $D_R = 6 = D_S$; $D_R^2 = 6$ pero $D_S^2 = 10$; R es mejor que S.

x_i	1	2	2	4	4	5
y_i	1	0	2	2	4	3
R_i	0	–1	1	1	3	2
d_{Ri}	1	1	1	1	1	1
S_i	2	2	2	2	2	2
d_{Si}	1	2	0	0	2	1

4. $S_{xy} = -2.1$.

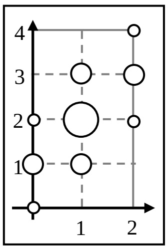


5. $S_{xy} = 5.75$, R: $y - 5.5 = \frac{23}{21}(x - 4.5)$.



6. $S_{xy} = 0.5$; R: $y = x + 1$.

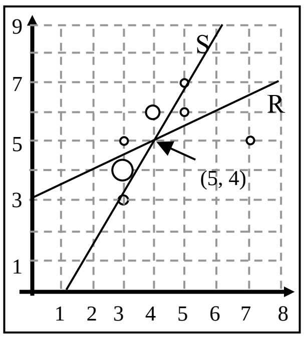
y_j / x_i	0	1	2	3	4	$n_{i.}$
0	1	2	1	0	0	4
1	0	2	4	2	0	8
2	0	0	1	2	1	4
$n_{.j}$	1	4	6	4	1	16



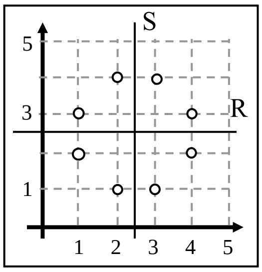
7. $S_{xy} = 5425$; R: $y - 126.5 = \frac{217}{3300}(x - 1950)$. **8.** 64.64 kg.

9. 77.18 €.**10.** (A) R: $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$; S: $x - 4 = \frac{4}{7}(y - 5)$.

(B) $m_R = 1/2$, $m_S = 4/7$. (C) 4. (D) 2.28.

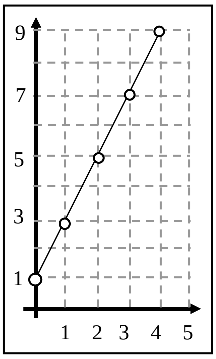


11. (A)



R: $y = 2.5$; S: $x = 2.5$, $\rho = 0$

(B)



12. $\rho = -0.735$. (A) 150.53 ‰; no tiene sentido: –37.5 ‰, esta recta no es apropiada para predicciones alejadas de las medias. (B) 55.93 y 60.54 años. **13.** No, tienen pendientes de diferente signo. **14.** 2912 €, sí porque el coeficiente de correlación está cerca de 1 ($\rho = 0.9694$).

Soluciones de los problemas del capítulo 2

1. (A) 1948.67 y 2204.1. (B) 2.91 %. (C) –0.99. **2.** (A) 0.998. (B) R: $y = 0.1132x + 0.1898$; 5.28 mm. (C) S: $x = 8.8019y - 1.5577$; 86.46º. **3.** (A) 1.975. (B) 28.57 cigarrillos. (C) 0.996. **4.** (A) 14206. (B) 0.989.

5. (A) $\bar{x} = 15$, $\bar{y} = 20$. (B) $x + 2y = 55$. (C) –0.5. **6.** (A) $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 1$. (B) $3x - 5y = 1$. (C) $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

7. $\rho = 0.134$, no es adecuada. **8.** (A) 0.879, cuanto más llueve en una más lo hace en la otra. (B) 165 l/m^2. (C) 72.1 l/m^2. **9.** 0.829. (A) El mismo, sumar constantes a todos los términos no afecta a la correlación. (B) El mismo, multiplicar cada término por la misma constante no afecta a la correlación. (C) (1,5), (2,7), (3,6), (4,9), (5,10), $\rho = 0.915$. **10.** –0.196, no hay relación entre la lluvia y el año en que se mide; el signo negativo indica que al aumentar los años, disminuyen las lluvias. **11.** (A) $\rho = 1$, existe dependencia funcional (lineal). (B) –0.35, poca correlación lineal, porque la nueva pareja añadida rompe totalmente con la tendencia de las otras.
12. (A) 0.909, hay mucha correlación. (B) 6670.85. (C) 10.79. **13.** (A) $\bar{x} = 43.42$, $S_X = 32.18$. (B) $\bar{y} = 78.92$, $S_Y = 30.961$. (C) $\rho = 0.923$. (D) r: $y - 78.92 = 0.888(x - 43.42)$; los precios por litro del gasoil serían, respectivamente: 173.56 €, 151.36 €, 129.16 €, 106.96 € y 84.76 €.