Matemàtiques per a batxillerat

Matemàtiques per a batxillerat és el resultat de molta il·lusió, treball, temps i gran experiència docent. Conté tots els coneixements matemàtics necessaris per a emprendre els estudis de Grau de qualsevol Universitat.

Aquest projecte consta dels llibres de matemàtiques de primer i segon de les modalitats de batxillerat de Ciències i Tecnologia i de Ciències socials, segons els continguts curriculars que actualment s'estudien a l'estat espanyol, i estan distribuïts en 3 volums per a cada curs:

	Primer curs	Segon curs
Modalitat de Ciències i Tecnologia	Àlgebra i Geometria	Àlgebra lineal i Geometria
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Estadística	Càlcul de probabilitats
Modalitat de Ciències socials	Àlgebra	Àlgebra lineal
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Càlcul de probabilitats i Estadística	Càlcul de probabilitats i Inferència estadística

Contingut de Matemàtiques per a batxillerat

- **Tot el currículum** dels batxillerats de l'estat espanyol.
- Més de 1 500 **exemples resolts** dels epígrafs importants.
- Més de 8 000 problemes entre **activitats i exercicis** proposats.
- Totes les activitats i exercicis proposats tenen la **solució** al final del capítol corresponent.

Estructura i concepció del llibre Matemàtiques per a batxillerat

Cada parella de pàgines consecutives (8 i 9, 10 i 11…) **es conceben com una porció tancada** del capítol; cap concepte quedarà a mig fer, i conté exemples resolts i activitats per a resoldre.

Mai hi ha text vertical paral·lel. Sempre es llegeix de dalt a baix, sense distraccions.

Per a facilitar l'estudi distingim amb formes i colors:

- **Definicions**: Sempre amb quadres de color verd, sense farcit.
- **Propietats i teoremes**: Sempre amb quadres amb farcit de color verd. Quan hem cregut convenient incloure la demostració d'alguna propietat ho fem fora del quadre, ressaltada per l'esquerra amb una barra vertical de color verd.
- **Exemples resolts**: És el més abundant al llarg del llibre; resolts amb detall, perquè l'alumne puga dependre d'ells. Molts són aplicacions a altres ciències, com la Física, Biologia, Economia, Topografia, per citar les més aplicades. Van ressaltats per l'esquerra amb una barra groga, i numerats per capítol.
- **Activitats proposades**: Almenys al finalitzar cada parella de pàgines (10 i 11, 12 i 13…) incloem un quadre farcit de color taronja amb activitats numerades per capítol i relacionades amb la teoria explicada en aquestes pàgines i els exemples allí resolts.
- **Problemes de recapitulació**: A més, al finalitzar cada capítol afegim una àmplia col·lecció de problemes proposats per a acabar d'assolir els conceptes del capítol.
- **Solucions**: Cada capítol acaba amb les solucions de totes les activitats i de tots els problemes proposats en ell.

És un procés d'assimilació dels elements conceptuals necessaris per a interpretar, enunciar i resoldre els problemes que planteja l'estudi dels fenòmens propis de les diverses ciències. El coneixement matemàtic s'organitza en forma de sistema deductiu, de manera que definicions, postulats, propietats, teoremes i mètodes s'articulen lògicament per a donar validesa a les intuïcions i a les tècniques matemàtiques. Tot aquest procés culmina en els exemples i problemes.

El llenguatge formal s'introdueix lentament, però resulta imprescindible per a no perdre la línia conductora de la solució del problema. Incloem demostracions d'algunes propietats sempre que siguen adequades al nivell, encara que no són necessàries per al desenvolupament del text.

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Àlgebra lineal i geometria

educàlia editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Àlgebra linial i geometria

educàlia
editorial

Primera edició, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-08-4
Depòsit legal: V-3244-2018
Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

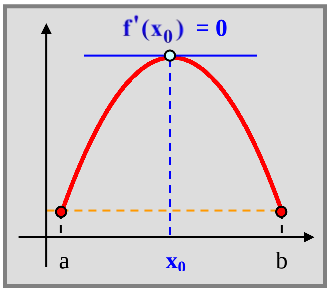
Capítol 3

Aplicacions de les derivades

3.1 Teorema de Rolle

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[.

Si **f(a) = f(b)** $\rightarrow$ $\exists$ $\mathbf{x_0} \in$ **]a, b[** tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$



Si f és contínua en [a, b], el **teorema de Weierstrass** assegura que **f assoleix els extrems absoluts** (màxim i mínim) **en [a, b]**.

- Si aquests extrems absoluts s'assoleixen els dos en a i en b:

  $f(a) \le f(x) \le f(b),\ \forall x \in [a, b]$ o $f(b) \le f(x) \le f(a),\ \forall x \in [a, b]$

  Però si $f(a) = f(b)$ $\rightarrow$ f és constant $\rightarrow$ $\mathbf{f'(x) = 0},\ \forall \mathbf{x \in]a, b[}$

- Si algun dels extrems absoluts (suposem el màxim) s'assoleix en $x_0 \in]a, b[$, tindrem que:

  (1) si $x_1 \in]a, x_0[\Rightarrow f(x_1) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \Rightarrow f_-'(x_0) \ge 0$

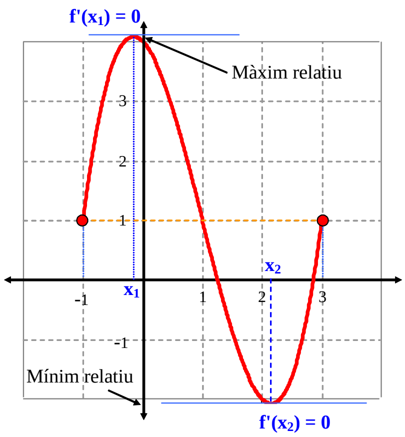
  (2) si $x_2 \in]x_0, b[\Rightarrow f(x_2) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{x_2 \to x_0} \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \Rightarrow f_+'(x_0) \le 0$

Com que f és derivable en x_0, necessàriament $f_-'(c) = f_+'(x_0)$, i no hi ha altra possibilitat que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Exemple 1

Obtenim els punts que verifiquen el teorema de Rolle per a la funció g definida per

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4,\ \forall x \in [-1, 3].$$



Com que és polinòmica, la funció f és contínua en [–1, 3] i derivable en]–1, 3[, sent la seua derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

També verifica la tercera hipòtesi: $f(-1) = f(3) = 1$.

El teorema de Rolle afirma que la funció derivada s'anul·la en algun punt de]–1, 3[.

Les seues arrels es troben immediatament:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

d'on $x_1 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ i $x_2 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Observa que el teorema de Rolle no afirma que el punt x_0 siga únic. En l'anterior exemple hi apareixen dos, però poden haver-ne fins i tot infinits (queda patent en la demostració del teorema).

Si les hipòtesis del teorema no es verifiquen, ni s'afirma ni es nega l'existència d'aqueixos punts.

1 Comprova si la funció $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ definida primerament en l'interval [0.5, 4] i després en [–1, 4], verifica les hipòtesis del teorema de Rolle. Es verifica la tesi en algun dels casos?

2 Considera la funció $f(x) = x^2 + 3x - 2$ definida en [a, 1]. Troba el valor de a per al qual f verifica les hipòtesis del teorema de Rolle i troba el punt que verifica la tesi.

➢ Separació d'arrels

El teorema de Bolzano permetia localitzar arrels de les equacions (o de funcions). Ara, amb el teorema de Rolle, podrem separar-les en intervals disjunts, és a dir, en intervals que continguen només una arrel.

Exemple 2

Demostrem que l'equació $\mathbf{2x = 1 + \sin x}$ només té una solució i està situada entre 0 i 1.

- Vegem que l'equació té almenys una solució. Per a això considerem la funció

$$\mathbf{f(x) = 1 + \sin x - 2x}$$

  que és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, i les seues arrels són les solucions de l'equació donada.

  Com que $\mathbf{f(0)} = 1 > \mathbf{0}$ i $\mathbf{f(1)} = 1 + \sin 1 - 2 < \mathbf{0}$, i f és contínua en [0, 1], el **teorema de Bolzano** assegura que existeix alguna arrel de f entre 0 i 1:

$$\exists\, \mathbf{x_1} \in\,]0, 1[\text{ tal que } f(x_1) = 0$$

- Vegem que no poden haver-hi dues solucions de l'equació.

  Si x_1 i x_2 foren dues solucions tindríem que $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)} = 0$.

  Però com que f és **contínua en** $[\mathbf{x_1, x_2}]$ i **derivable en** $]\mathbf{x_1, x_2}[$ (ho és en $\mathbb{R}$) el **teorema de Rolle** afirma:

$$\exists\, x_0 \in\,]x_1, x_2[\text{ tal que } \mathbf{f'(x_0) = 0}$$

  Però la derivada mai s'anul·la perquè $f'(x) = \cos x - 2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant no poden haver-hi 2 arrels.

Exemple 3

Separem en intervals disjunts les arrels de l'equació $x^3 - 3x + 1 = 0$.

És una equació polinòmica de grau 3, per la qual cosa té com a màxim 3 arrels reals.
Considerem la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$, contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

1. La seua funció derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$, té únicament dues arrels, en els punts $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
2. Constituïm els subintervals $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ i $[1, \infty[$, a partir de les arrels de f'.
3. Interval $[-1, 1]$: com que $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, el teorema de Bolzano assegura que hi ha arrels en ell.

   Interval $]-\infty, -1]$: com que $f(-2) = -1 < 0$ i $f(-1) = 3 > 0$, el teorema de Bolzano assegura que conté arrels.

   Interval $[1, +\infty[$: com que $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$, el teorema de Bolzano assegura que hi ha arrels en ell.
4. Les tres arrels reals pertanyen respectivament als intervals $]-2, -1[$, $]-1, 1[$ i $]1, 2[$.

3 Siga f una funció contínua i derivable. Demostra, amb ajuda dels teoremes de Bolzano i Rolle, les propietats següents. Siguen a i b dues arrels consecutives de l'equació $f'(x) = 0$:
(A) No pot haver dues solucions diferents en]a, b[de l'equació $f(x) = 0$.
(B) Si f(a) i f(b) són de signe distint, aleshores l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en]a, b[.
(C) Si f(a) i f(b) tenen el mateix signe, aleshores l'equació $f(x) = 0$ no té cap solució en]a, b[.

4 Separa les arrels de les equacions:
(A) $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ (B) $\cos x = x$ (C) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$

3.2 Teorema del valor mitjà de Lagrange

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[. Aleshores:

$$\exists\, \mathbf{x_0} \in \mathbf{]a, b[} \text{ tal que } \mathbf{f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a)}$$

Considerem la funció $g(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\cdot x - f(x)(b - a)$, $\forall x \in [a, b]$.

La funció g és contínua en [a, b] i derivable en]a, b[perquè f ho és, i la seua derivada ve donada per

$$g'(x) = \big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)(b - a) \quad \forall x \in]a, b[\qquad (1)$$

Es immediat que g(a) = g(b), aleshores, aplicant el **teorema de Rolle**, deduïm

$$\exists\, x_0 \in]a, b[\text{ tal que } g'(x_0) = 0$$

Però $\quad g'(x_0) = 0 \iff f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a) = 0 \iff f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$

➢ Interpretacions del teorema del valor mitjà

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[.

- La variació mitjana de la funció f en l'interval [a, b] és igual a la variació instantània (derivada) en algun punt x_0 entre a i b:

$$\exists\, \mathbf{x_0} \in \mathbf{]a, b[} \;\; \textbf{tal que} \;\; \mathbf{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)}$$

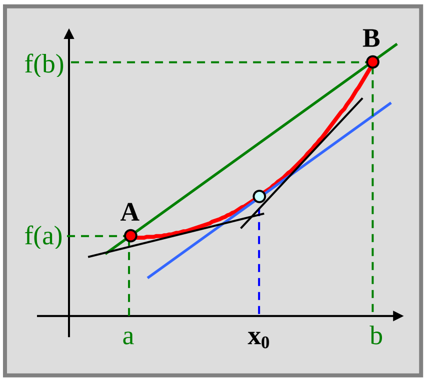
- Entre els punts de la gràfica A(a, f(a)) i B(b, f(b)) hi ha algun punt P(x_0, f(x_0)) en què la recta tangent en ell és paral·lela (idèntic pendent) a la recta secant per A i B.

Com que f verifica les hipòtesis del TVM, $\exists\, x_0 \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a) \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

però $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ és la variació mitjana de f en [a, b] i $f'(x_0)$ és la variació en l'instant x_0.

El pendent de la recta secant que uneix A i B és $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, i $f'(x_0)$ és el pendent de la recta tangent en (x_0, f(x_0)).



Exemple 4

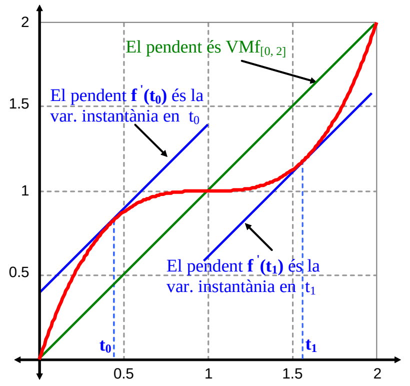
Obtenim el valor x_0 que verifica el TVM per a la funció $f(x) = x^2$ en l'interval [0,2].

La funció és contínua en [0,2] i derivable en]0,2[$\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in]0,2[$ tal que $f(2) - f(0) = f'(x_0)\,(2 - 0)$
O de forma equivalent

$$4 - 0 = f'(x_0)\cdot 2 \;\to\; f'(x_0) = 2 \;\to\; 2x_0 = 2 \;\to\; \mathbf{x_0 = 1}$$

Exemple 5

Igual que el teorema de Rolle, el TVM pot verificar-se per a més d'un punt x_0, fins i tot infinits. Vegem l'exemple d'una funció que el verifica en dos punts.



L'espai recorregut f per un mòbil en funció del temps t ve donat per

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t, \ \ \forall t \in [0, 2].$$

Vegem que verifica el TVM en dos punts de l'interval]0, 2[.

La variació mitjana (velocitat mitjana) en [0, 2] és

$$VMf_{[0, 2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1 \ \text{m/s}$$

i la velocitat instantània en qualsevol punt t és

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 3, \ \ \forall t \in]0, 2[.$$

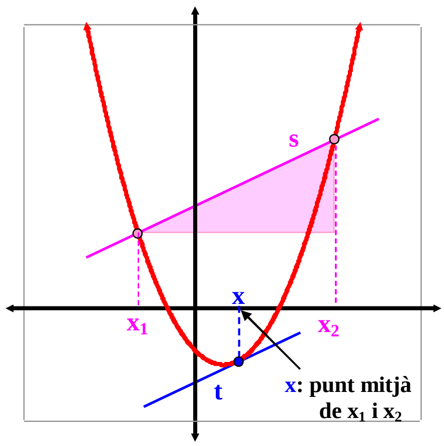
Com que $VMf_{[0, 2]} = f'(t_0)$, per a algun $t_0 \in]0, 2[$, tenim que

$$1 = 3t^2 - 6t + 3 \ \rightarrow \ 3t^2 - 6t + 2 = 0 \ \rightarrow \ t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} \ \rightarrow \ t_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \ \text{ i } \ t_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El resultat indica que en els instants t_0 i t_1 la velocitat instantània és igual a la velocitat mitjana de tot el trajecte: "En algun moment del recorregut el mòbil ha de portar la velocitat mitjana".

Exemple 6

Calculem el pendent de la recta secant a la paràbola $f(x) = ax^2 + bx + c$ en dos punts x_1 i x_2 d'ella, i comprovem que el punt de la paràbola que té la mateixa pendent és el seu **punt mitjà** $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}$.



- El pendent de la recta secant és la variació mitjana en $[x_1, x_2]$:

$$\mathbf{m_s} = \mathbf{VMf_{[x_1,x_2]}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \mathbf{a(x_1 + x_2) + b}$$

- El pendent de la corba és la seua derivada $\mathbf{f'(x) = 2ax + b}$.

  Vegem en quin valor de x són iguals els dos pendents:

  $$f'(x) = m_s \ \rightarrow \ 2ax + b = a(x_1 + x_2) + b \ \rightarrow \ 2ax = a(x_1 + x_2)$$

  d'on $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}$.

5 Es verifiquen les condicions per a aplicar el TVM a les següents funcions en els intervals indicats? Si es així, busca el punt o els punts per als quals es verifica.

(A) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, en l'interval [0, 4].

(B) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } \ x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$, en l'interval [−1, 3].

3.3 La regla de L'Hôpital

➢ Teorema de Cauchy

Considerem f i g funcions contínues en [a, b] i derivables en]a, b[, aleshores:

$$\exists\, \mathbf{x_0} \in]a, b[\text{ tal que } \left(\mathbf{f(b)-f(a)}\right)\cdot \mathbf{g'(x_0)} = \left(\mathbf{g(b)-g(a)}\right)\cdot \mathbf{f'(x_0)}$$

Considerem la funció $H(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. (1)

H és contínua en [a, b] i derivable en]a, b[perquè f i g ho són i, com es pot comprovar, H(a) = H(b).

Aleshores el **teorema de Rolle** assegura que $\exists x_0 \in]a, b[$ tal que $H'(x_0) = 0$; però derivant en (1) obtenim

$$0 = H'(x_0) = (f(b) - f(a))\, g'(x_0) - (g(b) - g(a))\, f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0)$$

Exemple 7

Les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2 + 4x$, definides en [0, 2], defineixen l'espai recorregut per dos mòbils, en metres, en funció del temps, en segons. Obtenim el valor x_0 que verifica el teorema de Cauchy.

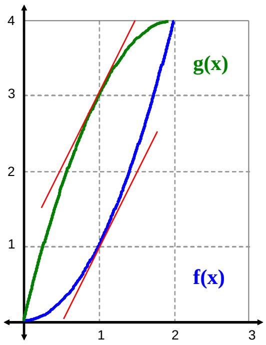
Les funcions f i g són contínues en [0, 2] i derivables en]0, 2[, aleshores

$$\exists x_0 \in]0,2[\text{ tal que } (f(2) - f(0)) \cdot g'(x_0) = (g(2) - g(0)) \cdot f'(x_0)$$

És a dir: $(4 - 0) \cdot (-2x_0 + 4) = (4 - 0) \cdot 2x_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 1}$

El resultat significa que els mòbils tenen la mateixa variació, 4 metres, i variació mitjana (velocitat) en l'interval [0, 2], 2 m/s.

El teorema de Cauchy indica que en l'instant $x_0 = 1$ tenen també la mateixa velocitat instantània $f'(1) = g'(1) = 2$ m/s, encara que són moviments diferents. Gràficament veiem que en $x_0 = 1$ tenen rectes tangents amb igual pendent.



➢ Regla de L'Hôpital

Com una conseqüència del teorema de Cauchy, la regla de L'Hôpital, permet utilitzar el càlcul de derivades per a resoldre les indeterminacions 0/0 que surten en el càlcul de límits.

Considerem f i g funcions contínues en [a, b] i derivables en]a, b[tal que les seues derivades no s'anul·len simultàniament en cap punt de]a, b[.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \frac{0}{0} \text{ i existeix i és finit } \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{g'(x)}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{g'(x)}}$$

Vegem que és cert per al límit per la dreta de x_0. La demostració és anàloga per a límits per l'esquerra.

Si $x \in]a, b[$ i $x > x_0$, com que es verifiquen les condicions del teorema de Cauchy en $[x_0, x]$, tenim

$$\exists t \in]x_0, x[\text{ tal que } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in]x_0, x[\text{ tal que } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

perquè $f(x_0) = g(x_0) = 0$, i escrivint-ho en forma de quocient. Prenent límits quan x tendeix per la dreta a x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

perquè com que $t \in]x_0, x[$, quan x tendeix a x_0, necessàriament t tendeix a x_0 també.

Exemple 8

Amb la regla de L'Hôpital podem calcular els límits indeterminats del tipus 0/0 sempre que existisca el límit del quocient de les derivades:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

La regla de L'Hôpital es pot aplicar reiteradament sempre que es verifiquen les seus condicions:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

➢ Càlcul de límits indeterminats

- La regla de L'Hôpital és vàlida també per al càlcul de límits en $\pm\infty$, sempre que les funcions siguen contínues i derivables en un interval infinit adequat:

$$\textbf{si}\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{ i }\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \textbf{existeix}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Una altra ampliació de la regla de L'Hôpital s'obté en indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$:

  Si per **A** representem tant un nombre real com els símbols $+\infty$ i $-\infty$, tenim que:

$$\textbf{si}\quad \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ \text{ i }\ \lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \textbf{existeix}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- A més, efectuant algunes modificacions (com veurem en els següents exemples), resoldrem límits que presenten indeterminacions dels tipus:

$$\infty\cdot 0 \qquad \infty-\infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

Exemple 9

Indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2+1}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2e^{1/x}-1}{5e^{1/x}+3}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{5}{x^2}e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

6 Calcula els següents límits:

(A) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$ (C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ (E) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2e^{1/x}-1}{5e^{1/x}+3}$

(F) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (G) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+3x}$ (H) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln(2x+1)}{1+\ln(x^2+1)}$ (I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}+2}$ (J) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}+2}$

Exemple 10

Indeterminacions del tipus 0 · ∞. Expressem el producte com un quocient:

- $$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{-\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=+\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

- En canvi $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ No té indeterminació!

- $$\lim_{x\to 0^+}(\ln x\cdot\operatorname{arctg}x)=(-\infty)\cdot 0=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\operatorname{arctg}x}=\frac{-\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\dfrac{1}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}{x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x(\operatorname{arctg}x)^2-2\operatorname{arctg}x}{1}=0$$

Indeterminacions del tipus ∞ – ∞.

- Es resolen modificant l'expressió fins a obtenir un quocient amb indeterminació del tipus 0/0 o ∞/∞:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cdot\cos x}{2\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

- Altres casos es resolen modificant l'expressió per a obtenir un producte:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right)=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$$

perquè $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$.

Indeterminacions del tipus 1^∞, ∞^0 o 0^0.

Es resolen amb les propietats dels logaritmes, transformant l'expressió exponencial en productes:

- $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}=0^0 \quad\to\quad$ anomenem $L=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}$ i prenem logaritmes:

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1-\cos x)^{2x}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\ln(1-\cos x)\right)=0\cdot(-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1-\cos x)}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2\sin x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4x\cdot\sin x-2x^2\cdot\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4\cdot\sin x-8x\cdot\sin x+2x^2\cdot\sin x}{\cos x}=0$$

Aleshores: $\ln(L)=0 \quad\to\quad L=e^0=1 \quad\to\quad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}=1$

Exemple 11

Comprovem que la següent funció, amb domini]–1, +∞[, és derivable en 0, i obtenim la derivada en aquest punt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- L'equació de la seua única asímptota horitzontal és (el seu domini no permet cap a –∞):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0 \;\Rightarrow\; \text{r: } y = 0$$

- És contínua en x = 0: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1 = f(0)$.

- És derivable en x = 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \frac{0}{0} =$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-1}{2} \;\Rightarrow\; \mathbf{f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

7 Calcula els següents límits:

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x + x^3\right)^{1/x}$ (B) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ (C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}\right)$

(E) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{\ln x}$ (F) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{(1-x)}$ (G) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sin(1/x)}$ (H) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)^{\mathrm{tg}\,x}$

(I) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$ (J) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-7x^2+6}$ (K) $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x^2}$ (L) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x + 3x}{3\ln x + 2x}$

8 Està ben resolt el següent límit? En cas contrari, resol-lo correctament.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

9 Per a les següents funcions obtén el valor de a perquè siguen contínues, i les seues asímptotes horitzontals.

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (B) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10 Donades les següents funcions f(x) i g(x) estudia:

(A) Els valors de m i n perquè la funció f siga contínua.

(B) La continuïtat de g en els punts x = 0 i x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+3} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.4 Creixement i decreixement local

➢ Creixement i decreixement puntual

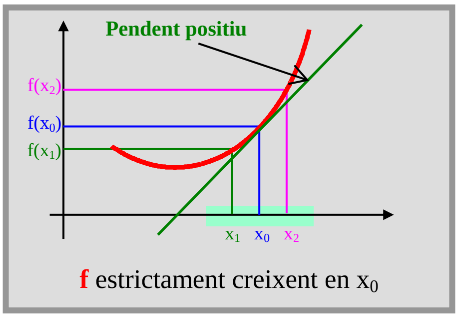
Considerem una funció f definida en un domini D_f, i un punt $x_0 \in D_f$.

- La funció f és ***estrictament creixent en*** $\mathbf{x_0}$ si en un entorn de x_0 es verifica que:

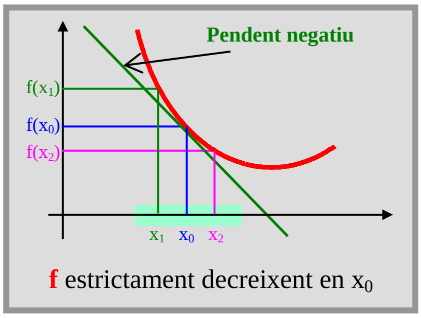
  si $\mathbf{x < x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_0)}$ i si $\mathbf{x > x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_0)}$

- La funció f és ***estrictament decreixent en*** $\mathbf{x_0}$ si en un entorn de x_0 es verifica que:

  si $\mathbf{x < x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_0)}$ i si $\mathbf{x > x_0} \rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_0)}$



f estrictament creixent en x_0



f estrictament decreixent en x_0

Observa en els dibuixos que el pendent de la recta tangent en x_0 és positiva quan f creix i negativa quan decreix. Sempre és així? Vegem el següent teorema i els exemples 12 i 13.

➢ Teorema 1: Condicions suficients de creixement estricte

Considerem una funció f derivable en x_0.

- Si $\mathbf{f'(x_0) > 0} \rightarrow$ **f és estrictament creixent en $\mathbf{x_0}$**
- Si $\mathbf{f'(x_0) < 0} \rightarrow$ **f és estrictament decreixent en $\mathbf{x_0}$**
- Si $\mathbf{f'(x_0) = 0} \rightarrow$ **No podem assegurar res**

Vegem únicament el primer cas. Els altres dos es dedueixen de manera anàloga.

Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ en un entorn de x_0 (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \mathbf{x < x_0} \rightarrow x - x_0 < 0 \xrightarrow{(1)} f(x) - f(x_0) < 0 \rightarrow \mathbf{f(x) < f(x_0)} \\ \text{Si } \mathbf{x > x_0} \rightarrow x - x_0 > 0 \xrightarrow{(1)} f(x) - f(x_0) > 0 \rightarrow \mathbf{f(x) > f(x_0)} \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{f és estrictament creixent en } \mathbf{x_0}$$

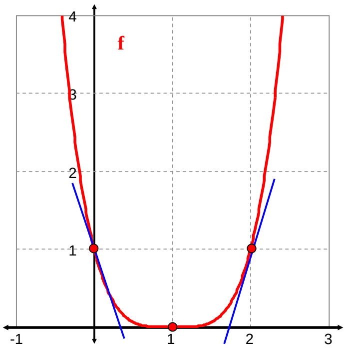
Exemple 12

La funció $f(x) = (x-1)^4$ és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 4(x-1)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $f'(2) = 4 > 0 \rightarrow$ f és estrictament creixent en x = 2.
- Com que $f'(0) = -4 < 0 \rightarrow$ f és estrictament decreixent en x = 0.
- Com que $f'(1) = 0$, el teorema 1 no assegura res, encara que en aquest cas la funció ni creix ni decreix en x = 1, perquè:

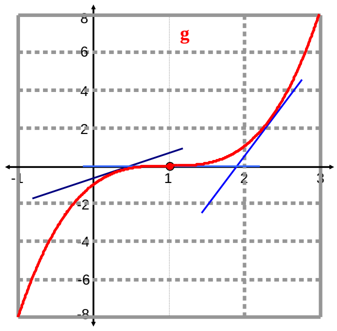
  Si $x < 1 \rightarrow (x-1)^4 > 0 \rightarrow f(x) > 0 = f(1)$

  Si $x > 1 \rightarrow (x-1)^4 > 0 \rightarrow f(x) > 0 = f(1)$



Exemple 13

La funció $f(x) = (x-1)^3$ és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 3(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



- Com que $f'(2) = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad$ f és estrictament creixent en $x = 2$.
- Com que $f'(-1) = -8 < 0 \quad \rightarrow \quad$ f és estrictament decreixent en $x = -1$
- Com que $f'(1) = 0$, el teorema 1 no assegura res, encara que en aquest cas la funció creix en $x = 1$, perquè:

  Si $x < 1 \quad \rightarrow \quad x - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^3 < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) < 0 = f(1)$

  Si $x > 1 \quad \rightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) > 0 = f(1)$

La definició anterior de creixement és una definició puntual. Necessitem una definició més global.

➢ Creixement d’una funció en un interval

Diem que f és ***estrictament creixent*** (***decreixent***) ***en un interval*** **I** si és estrictament creixent (decreixent) en cadascun dels punts de l’interval I.

Exemple 14

Considerem la funció $f(x) = (x-1)^4$ de l’exemple 12, amb derivada $f'(x) = 4(x-1)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tenim que $f'(1) = 0$, i hem vist que f ni creix ni decreix en $x = 1$. En canvi:

Si $x > 1$, tenim que $f'(x) = 4(x-1)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f és creixent en x, si $x > 1$

Si $x < 1$, tenim que $f'(x) = 4(x-1)^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ f és decreixent en x, si $x < 1$

Per tant, **f és decreixent en l’interval $]-\infty, 1[$ i creixent en l’interval $]1, +\infty[$**.

Pel teorema 1, els únics punts derivables on pot canviar el creixement d’una funció són els de derivada nul·la, però no és necessari que passe: en l’exemple 12 canvia el creixement en x = 1 mentre que en l’exemple 13 no. A més, en els punt no derivables també pot canviar el creixement d’una funció. Això condueix a la següent definició.

➢ Punts singulars d’una funció

Anomenem ***punts singulars*** d’una funció f a aquells punts:

- del domini de f que són solució de $\mathbf{f'(x) = 0}$, anomenats ***punts crítics***,
- del domini de f en els quals f no és derivable, ***punts no derivables de* f**,
- extrems dels intervals que constitueixen el domini, encara que no pertanyen al domini.

11 Comprova el creixement o decreixement de les funcions següents en els punts $x = -1, 0, 1$ i 2:

(A) $f(x) = x^2$ (B) $f(x) = x^3$ (C) $f(x) = x^4$ (D) $f(x) = x^5$ (E) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

12 Troba els punts singulars de la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ i comprova que és estrictament decreixent en el domini.

3.5 Extrems relatius d'una funció

Considerem una funció f i un punt $\mathbf{x_0} \in \mathbf{D_f}$, diem que:

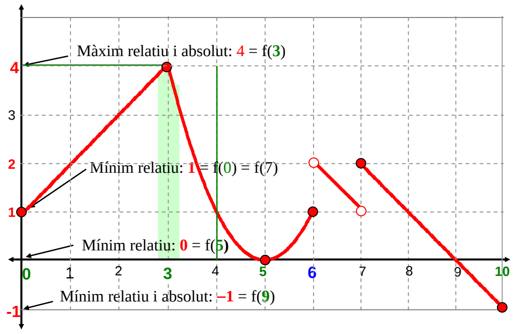
- **f *té un màxim relatiu en* $\mathbf{x_0}$** si les imatges en algun entorn de x_0 verifiquen $\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$.
- **f *té un mínim relatiu en* $\mathbf{x_0}$** si les imatges en algun entorn de x_0 verifiquen $\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$.

L'extrem relatiu (màxim o mínim) és $\mathbf{f(x_0)}$, que direm és **assolit en** el punt $\mathbf{x_0}$.

Exemple 15

No hem de confondre els conceptes de **màxim** i **mínim relatius** amb els de **màxim** i **mínim absoluts** d'una funció estudiats en el capítol 1. Representem gràficament la següent funció i localitzem els seus extrems relatius i absoluts:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x^2 - 10x + 25 & \text{si } 3 \le x \le 6 \\ -x+8 & \text{si } 6 < x < 7 \\ -x+9 & \text{si } 7 \le x \le 10 \end{cases}$$



(1) Observem que tots els punts on la funció assoleix màxims o mínims relatius són punts singulars.

(A) **Punt crítics: f '(x) = 0** $\Leftrightarrow$ **x = 5**. En aquest punt la funció assoleix un mínim relatiu de valor **0** = f(5).

(B) **Punts no derivables:**

- **En x = 3** la funció es contínua però no derivable i assoleix un màxim relatiu de valor **4** = f(3).
- En x = 6 la funció no és continua ni derivable. La funció no assoleix cap extrem relatiu.
- **En x = 7** la funció no és contínua ni derivable però assoleix un màxim relatiu de valor **2** = f(7).

(C) **Extrems del domini:**

- **En x = 0** la funció assoleix un mínim relatiu de valor **1** = f(0).
- **En x = 10** la funció assoleix un mínim relatiu de valor **–1** = f(10).

(2) La funció f no és contínua en [0, 10], però assoleix els extrems absoluts entre els punts singulars:

- El **màxim absolut és 4**, assolit en x = 3, i el **mínim absolut és −1**, assolit en x = 9.

➢ Teorema 2: condició necessària d'extrem relatiu

Si f és derivable en x_0, i té un extrem relatiu en x_0, aleshores $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Demostrem el cas en què f té un màxim relatiu en x_0, aleshores existeix un entorn]a, b[de x_0, tal que:

(1) si $x_1 \in]a, x_0[\;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_0) \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; f_-'(x_0) \ge 0$

(2) si $x_2 \in]x_0, b[\;\Rightarrow\; f(x_2) \le f(x_0) \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x_2 \to x_0} \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; f_+'(x_0) \le 0$

Com que f és derivable en x_0, necessàriament $f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$, i no hi ha altra possibilitat que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

El teorema 2 mostra que els **únics punts del domini d'una funció derivable**, **en què es poden assolir extrems relatius són** les solucions de l'equació **f '(x) = 0.** A més, **en alguns punts no derivables també** es poden assolir extrems relatius, com hem vist en l'apartat (1) de l'exemple 15. El següent teorema imposa unes condicions suficients per a assolir extrems relatius.

➢ Teorema 3: criteri del canvi de signe de la primera derivada

Suposem f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[excepte tal volta en $x_0 \in]a, b[$:

(1) Si **f ' < 0** en]a, x_0[i **f ' > 0** en]x_0, b[$\rightarrow$ **f té un mínim relatiu en x_0**

(2) Si **f ' > 0** en]a, x_0[i **f ' < 0** en]x_0, b[$\rightarrow$ **f té un màxim relatiu en x_0**

(3) En qualsevol altre cas, f no té extrem relatiu en x_0.

Demostrem l'apartat (1), els altres es realitzen anàlogament. Considerem x_0 el punt singular en]a, b[.

Si $x \in]a, b[$, com que f és contínua en [x, x_0] (o en [x_0, x]) i derivable en]x, x_0[, pel teorema del valor mitjà:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)\,(x - x_0) \quad \text{sent } x_1 \text{ un punt entre x i } x_0$$

Si $x < x_0$ i com que $x_1 \in]x, x_0[$ tenim per hipòtesis que $f'(x_1) < 0 \rightarrow f'(x_1)\,(x - x_0) > 0 \rightarrow f(x) > f(x_0)$

Si $x > x_0$ i com que $x_1 \in]x, x_0[$ tenim per hipòtesis que $f'(x_1) > 0 \rightarrow f'(x_1)\,(x - x_0) > 0 \rightarrow f(x) > f(x_0)$

Per tant, $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in]a, b[$ que indica l'existència d'un mínim relatiu de la funció en x_0.

- El teorema 3 s'utilitza per a trobar extrems relatius d'una funció contínua en l'interior d'un interval I.
- Si I = **[a, b]** és tancat **f sempre assoleix en a i en b extrems relatius** de valors f(a) i f(b) però **si es obert no els pot assolir**.

➢ Intervals de creixement d'una funció en un domini D

Com ja hem dit, els punts singulars són els únics punts on pot canviar el creixement d'una funció.
Per a estudiar el creixement d'una funció f en un domini D tenim aquest mètode:

- Obtenim els **punts singulars** de f en D i els ordenem de menor a major: $\mathbf{x_1 < x_2 < \ldots < x_n}$
- El domini queda dividit pels punts singulars en els intervals:

  ]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, ..,]x_n, b[, on a pot ser $-\infty$ i b pot ser $+\infty$.

  S'anomenen ***intervals de creixement*** i en cadascun d'ells la derivada f ' té signe constant (*).
- Estudiant el **signe de f ' en un punt** de cada interval tenim el signe en tot l'interval.

(*) Si f ' no tinguera signe constant, la funció passaria de decréixer a créixer (o viceversa) en algun punt derivable x_c de l'interval. El punt x_c seria un extrem relatiu i aplicant el teorema 2 seria un nou punt crític situat entre els dos punts singulars consecutius, la qual cosa és absurda.

Utilitzant els intervals de creixement i el teorema 3 podem trobar els extrems relatius de la següent forma:

Siga x_i un punt singular de f, i considerem els intervals de creixement que es connecten amb x_i.

- **Si f és contínua en x_i** i en els dos intervals que és connecten amb ell el signe de **f '** canvia de:

  (a) Positiu a negatiu, pel teorema 3, **f té un màxim relatiu en x_i**

  (b) Negatiu a positiu, pel teorema 3, **f té un mínim relatiu en x_i**
- **Si f no és contínua en x_i** no es pot aplicar el teorema 3 i no podem assegurar res. Hem de recórrer a la definició d'extrem relatiu per a classificar-lo.

Exemple 16

(A) Estudiem els intervals de creixement i classifiquem els extrems relatius de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{x^2+1}}{\mathbf{x}}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\sim\{0\}$.

Sabem que f és contínua i derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$, i la funció derivada és $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\sim\{0\}$.

(1) Trobem els **punts singulars**:

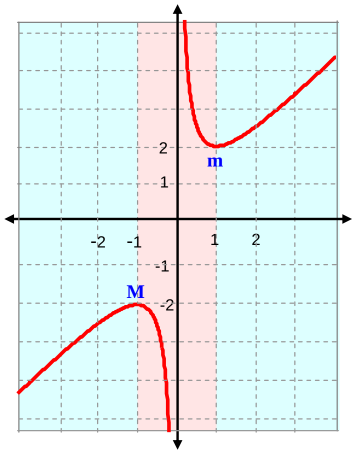
Punts crítics: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = \pm 1}$.

Punts no derivables: **x = 0**.

(2) **Intervals de creixement**: $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ i $]1, +\infty[$.

(3) El **signe de la derivada en un punt d'ells**:

$f'(-2) > 0$, $f'(-1/2) < 0$, $f'(1/2) < 0$ i $f'(2) > 0$



Intervals	]–∞, –1[	]–1, 0[	]0, 1[	]1, +∞[
Signe f'	+	–	–	+
f	↑	↓	↓	↑

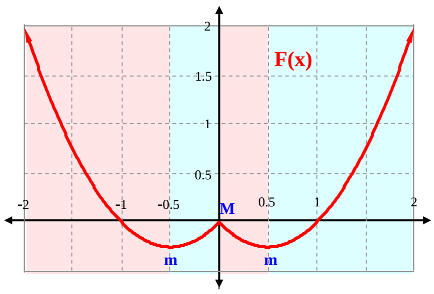
Per tant, **f és creixent en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i decreixent en $]-1, 0[\cup]0, 1[$.**

Pel teorema 3, en **x = –1** f té un **màxim relatiu** de valor f(–1) = **–2**, i en **x = 1** un **mínim relatiu** de valor f(1) = **2**.

En x = 0 no hi ha cap possibilitat d'extrem relatiu, encara que canviara de signe de f', perquè no és del domini.

(B) Obtenim els intervals de creixement i els extrems relatius de $F(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x<0 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

F és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$ i $F'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.



- Obtenim els **punts singulars de F**.

  Punts crítics: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow \mathbf{x = -1/2} \\ 2x-1=0 \rightarrow \mathbf{x = 1/2} \end{cases}$

  Punts no derivables: x = 0 (com ja hem vist).

- **Intervals de creixement**:

  $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ i $]1, +\infty[$

- El **signe de la derivada en un punt d'ells:**

  $F'(-1) < 0$, $F'(-1/4) > 0$, $F'(1/4) < 0$ i $F'(1) > 0$

Intervals	]–∞, –1/2[	]–1/2, 0[	]0, 1/2[	]1/2, +∞[
Signe F'	–	+	–	+
F	↓	↑	↓	↑

Per tant, **F és decreixent en $]-\infty, -1/2[\cup]0, 1/2[$ i creixent en $]-1/2, 0[\cup]1/2, +\infty[$.**

Pel teorema 3, F té en **x = –1/2** i en **x = 1/2** un **mínim relatiu** de valor F(–1/2) = F(1/2) = **–1/4**, i en **x = 0** un **màxim relatiu** de valor F(0) = **0.**

13 Obtén els intervals de creixement i classifica els extrems relatius de les següents funcions:

(A) $3x^4 - 4x^3$ (B) $f(x) = x^2 - 4|x|$ (C) $f(x) = |x^2 - 4x|$ (D) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ (E) $f(x) = e^x + 4e^{-x}$

(F) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (G) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (H) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(I) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ (J) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (K) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$

(L) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x & \text{si } 0<x\leq 2 \\ x^2-8x+18 & \text{si } 2<x\leq 5 \\ x^2-10x+25 & \text{si } 5<x\leq 6 \end{cases}$

➢ Teorema 4. Criteri del signe de la segona derivada

El següent teorema permet classificar els extrems relatius amb l'ús de la segona derivada. El mètode és més ràpid però les condicions són més restrictives que les del teorema 3 ja que és necessària la derivabilitat primera i segona de la funció en el punt i a més, no sempre aconseguim classificar els extrems relatius.

Considerem una funció f dues vegades derivable en x_0, tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ (x_0 és un punt crític):

(1) Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ → **f té un mínim relatiu en x_0**

(2) Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ → **f té un màxim relatiu en x_0**

(3) Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ → **no podem assegurar res**

Demostrem l'apartat (1), els altres es realitzen anàlogament. Considerem x_0 l'únic punt crític en $]a, b[$: $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) > 0$, aleshores $f''_-(x_0) > 0$ i $f''_+(x_0) > 0$, i amb la definició de derivada lateral:

- Si $f''_-(x_0) > 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, i com que $f'(x_0) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

  Al ser $x - x_0 < 0$, aleshores $f'(x) < 0$ si $x \in]a, x_0[$ → f és decreixent en l'interval $]a, x_0[$

- Si $f''_+(x_0) < 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, i com que $f'(x_0) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

  Al ser $x - x_0 > 0$, aleshores $f'(x) > 0$ si $x \in]x_0, b[$ → f és creixent en l'interval $]x_0, b[$

Si f és decreixent en $]a, x_0[$ i creixent en $]x_0, b[$, per definició té un mínim relatiu en x_0.

Exemple 17

Classifiquem els extrems relatius de **f(x) = sinx + cosx**, $\forall \mathbf{x} \in [0, 2\pi]$.

La funció f és derivable 2 vegades en $\mathbb{R}$: $f'(x) = \cos x - \sin x$ i $f''(x) = -\sin x - \cos x$.

Està definida en un interval tancat per la qual cosa en $x = 0$ i en $x = 2\pi$ tenim extrems relatius.

(1) **Punts crítics**: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{5\pi}{4}$

(2) Apliquem el **criteri de la segona derivada** als punts crítics:

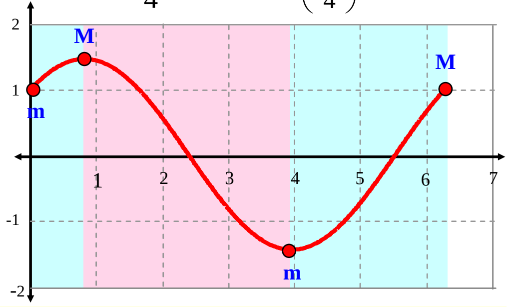
$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0$, per tant f té un màxim relatiu en $x = \dfrac{\pi}{4}$, de valor $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{5\pi}{4} - \cos\dfrac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0$, per tant f té un mínim relatiu en $x = \dfrac{5\pi}{4}$, de valor $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

A més, com què el domini és un interval tancat:

(3) En **x = 0 s'assoleix un mínim relatiu** de valor **1** = f(0) perquè la funció creix fins al màxim relatiu.

(4) En **x=2π s'assoleix un màxim relatiu** de valor **1** = f(2π) perquè des del mínim relatiu ha de créixer fins al màxim relatiu.



14 Obtén els intervals de creixement i classifica els extrems relatius de les següents funcions:

(A) $f(x) = x^3 - 3x$ (B) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (C) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (D) $f(x) = \sin 2x$, en $[0, 2\pi]$

(E) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 1$ (F) $f(x) = x^2e^x$ (F) $f(x) = x^2\ln x$ (G) $f(x) = \sin^2 x$, en $[0, 2\pi]$

15 Obtén els valors de a i b perquè la funció cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2$ tinga un extrem relatiu en $x = 1$, de valor 2.

3.6 Càlcul dels extrems absoluts d'una funció

El ***teorema de Weierstrass*** ens assegura que **tota funció contínua el domini de la qual siga un interval tancat i fitat [a, b] assoleix un valor màxim i un valor mínim absoluts**, però en cas de no ser la funció sempre contínua, o el seu domini no ser tancat o fitat, no tenim assegurada la existència o la no existència d'extrems absoluts. La forma de buscar-los la resumim a continuació, i veiem alguns exemples.

1 Obtenim els extrems relatius $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ localitzats entre els punts singulars.

2 Si f és contínua i el domini és un interval tancat [a, b], sempre hi ha extrems absoluts:
(a) El **mínim absolut** de f és el menor dels valors f(a), f(b), $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.
(b) El **màxim absolut** de f és el major dels valors f(a), f(b), $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

3 Si f és contínua però el domini no és un interval tancat, els extrems absoluts es troben entre els relatius **només si** els límits de f, cap als extrems de l'interval que constitueixen el domini, **no els invaliden**.

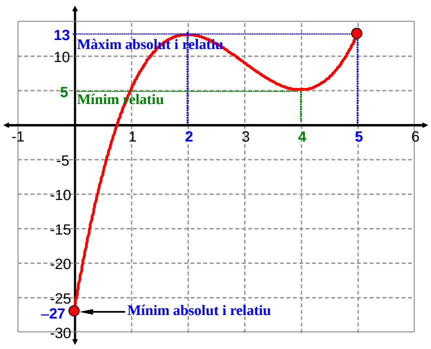
4 Si a més f és discontinua en algun punt x_0, els extrems absoluts es troben entre els relatius **només si** els límits laterals de f en x_0 **no els invaliden**.

Exemple 18

Obtenim els extrems absoluts de la funció $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ en l'interval [0, 5]. Aquesta funció és contínua i l'interval [0, 5] és tancat i fitat. Està garantida l'existència d'extrems absoluts.

- Els punts singulars són:
  (a) Punts no derivables: **x** = **0** i **x** = **5**, en els quals hi ha necessàriament extrems relatius.
  (b) Punts crítics: Com que $f'(x) = 6x^2 - 36x + 48$.
  $$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 36x + 48 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 2,\ x = 4}$$
- Separació del domini en intervals:]0, 2[,]2, 4[i]4, 5[.
- Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ i $f'(4.5) > 0$:

Intervals	**]0, 2[**	**]2, 4[**	**]4, 5[**
Signe de f'	+	–	+
f	↑	↓	↑



- Per a obtenir els extrems absoluts, calculem el valor de f en els punts singulars x = 0, 2, 4 i 5,:

  f(0) = **–27** f(5) = **13** f(2) = **13** f(4) = **5**

1 El **màxim absolut és 13**, major imatge, que s'assoleix per a x = 2 i per a x = 5.

2 **El mínim absolut és –27**, menor imatge, que s'assoleix per a x = 0.

16 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions:
(A) $f(x) = x^3 - 6x^2$, en [0, 5] i en $\mathbb{R}$. (B) $f(x) = \left|x^3 - 6x^2\right|$, en [0, 5] i en $\mathbb{R}$. (C) f(x) = cosx, en [0, 2π].
(D) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ en]0, 5[. (E) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ (F) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Exemple 19

(A) Obtenim els **extrems absoluts** de la funció $\mathbf{f(x) = x^4 - 8x^2 + 9}$ definida en $\mathbb{R}$.

Encara que f és contínua, com que el seu domini no és un interval tancat i fitat, no tenim garantida l'existència d'extrems absoluts.
Els únics punts singulars són els punts crítics:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0,\ x = 2,\ x = -2}$$

Apliquem el criteri del canvi de signe de la primera derivada per a classificar els extrems relatius:

$f'(-3) = -60 < 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0,\ x \in]-\infty, -2[$

$f'(-1) = 12 > 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0,\ x \in]-2, 0[$

$f'(1) = -12 < 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0,\ x \in]0, 2[$

$f'(3) = 60 > 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0,\ x \in]2, +\infty[$

Intervals	**]–∞, –2[**	**]–2, 0[**	**]0, 2[**	**]2, +∞[**
Signe f '	–	+	–	+
f	↓	↑	↓	↑

Tenim mínims relatius en x = –2 i x = 2, i un màxim relatiu en x = 0.

Per a obtenir els extrems absoluts, si n'hi ha, calculem el valor de f en els extrems relatius x = –2, 0 i 2, i a més el límit quan x tendeix a $-\infty$ i a $+\infty$, ja que f està definida en $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 9) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 9) = +\infty \qquad f(-2) = \mathbf{-7} \qquad f(0) = \mathbf{9} \qquad f(4) = \mathbf{-7}$$

- El **mínim absolut és –7**, menor imatge, que s'assoleix per a **x = –2** i per a **x = 2**.
- **No hi ha màxim absolut** perquè els límits en $\pm\infty$ són iguals a $+\infty$, la funció no és fitada superiorment.

(B) Obtenim els **extrems absoluts** de la funció $\mathbf{g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}}$ en l'interval [–2, 6].

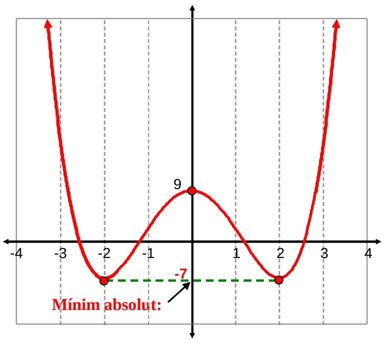
No tenim garantida l'existència d'extrems absoluts al ser g discontínua en x = 2 perquè no existeix g(2).

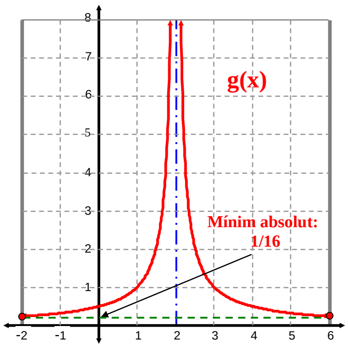
Els únics punts singulars són els extrems de l'interval, x = –2 i x = 6, perquè $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$ no s'anul·la.

Per a obtenir els extrems absoluts, si n'hi ha, calculem el valor de g en x = –2 i 6, i a més el límit quan x tendeix a 2, ja que f no és contínua en aquest punt:

$$g(-2) = \mathbf{1/16} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad g(6) = \mathbf{1/16}$$

- El **mínim absolut és 1/16**, menor imatge, que s'assoleix per a **x = –2** i **x = 6**.
- **No hi ha màxim absolut** perquè el límit en x = 2 és $+\infty$, la funció no està fitada superiorment.





17 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions en els intervals indicats:

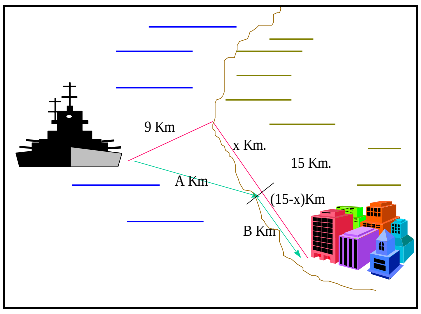
(A) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ en [0, 5] i en]–2, 2[.

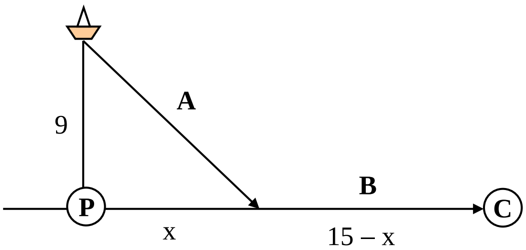
(B) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ -x+5 & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases}$ en [–1, 5] i en [2, 4[.

3.7 Problemes d'optimització

Exemple 20

Un vaixell, que té la ràdio avariada, es troba ancorat a 9 km del punt P més pròxim a la costa. És precís enviar un missatger a una ciutat C situada a 15 km del punt P de terra més pròxim al vaixell. Si el missatger pot caminar a 5 km/h i remar a 4 km/h, en quin punt de la costa (entre P i C) haurà de desembarcar per a arribar a la ciutat en el menor temps possible?. I per a tardar el major temps possible?





(A) Constitució de la funció que expressa el temps utilitzat per a arribar a la ciutat.

Anomenem **x** a la distància en km des de P fins al punt on desembarca el missatger. Òbviament, $\mathbf{0 \le x \le 15}$.
El valor x = 0 significa que el missatger desembarca en P, i x = 15 significa que desembarca en la ciutat C.
La distància a recórrer (remant i caminant) serà:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \sqrt{9^2 + x^2} + (15 - x)$$

Així el temps utilitzat, en funció de x, ve expressat per

$$\mathbf{f(x)} = \frac{A}{4} + \frac{B}{5} = \mathbf{\frac{1}{4}\sqrt{81 + x^2} + \frac{1}{5}(15 - x)}, \text{ amb } \mathbf{0 \le x \le 15}.$$

(B) Optimització de la funció. Recerca del màxim i mínim absoluts.

$$\text{f és derivable en }]0, 15[\text{ i } f'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}$$

- **Punts singulars**: **x** = **0** i **15** (extrems de l'interval) i **x** = **12** (per anul·lar-se la derivada).

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} = \frac{1}{5} \iff 5x = 4\sqrt{81 + x^2} \iff 25x^2 = 1296 + 16x^2 \iff \mathbf{x = 12}$$

També seria $x_2 = -12$, però no pertany al domini de la funció (no hi ha distàncies negatives).

Separació del domini en intervals:]0, 12[i **]12, 15[**

Com que f passa de ser decreixent a ser creixent en x = 12, té un mínim relatiu.

Com que **x = 0** i **x = 15** són els extrems del domini, i f és contínua, aleshores f assoleix en ells extrems relatius.

Intervals	]0, 12[	]12, 15[
Signe f '	–	+
f	↓	↑

- **Extrems absoluts**. Es troben entre els extrems relatius. Comparem les imatges de 0, 12 i 15:

f(12) = 4.35 (mínim absolut) **f(0) = 5.25 (màxim absolut)** f(15) ≃ 4.37

El major temps (5.25 hores) amb el qual s'aplega a la ciutat és desembarcant en P (x = 0) i el menor temps, 4.35 hores, desembarcant a 12 km de P.

18 Obtén les dimensions del rectangle de menor perímetre de tots els que tenen un àrea de 25m^2.

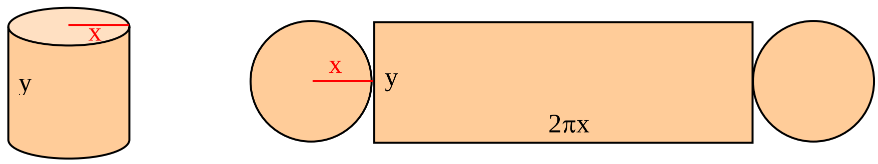
19 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea de tots els que tenen un perímetre de 100 m.

Exemple 21

Una empresa, que fabrica pots cilíndrics d'1 m^3 de volum, vol emprar en la seua construcció la menor quantitat possible de material. Quines dimensions han de tenir els pots?

(A) **Constitució de la funció que expressa la quantitat de material (l'àrea) utilitzat en el pot**.

Anomenem **x** al radi de la circumferència de la base i **y** a l'altura del pot.



El material utilitzat en el pot és la suma de les àrees de dos cercles i un rectangle; ve donat per

$$\mathbf{f(x,\ y) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y}$$

que és una funció amb dues variables, x i y.

Com que el volum del pot (àrea de la base per l'altura) ha de ser d'1 m^3, es té la condició

$$\mathbf{\pi x^2 \cdot y = 1} \qquad (1)$$

que ens permet (aïllant y en (1)) expressar la funció M com una funció d'una única variable:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy \\ \text{amb} \quad \pi x^2 y = 1 \;\rightarrow\; \mathbf{y = \dfrac{1}{\pi x^2}} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \mathbf{f(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}},\ \ \forall \mathbf{x > 0}$$

(B) **Optimització de la funció. Recerca del mínim absolut.**

Obtenim el mínim absolut de f(x) en l'interval]0, +∞[. La funció és derivable:

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}, \ \text{ per a } x > 0.$$

Punts singulars: l'únic s'obté d'igualar a 0 la derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi x = \frac{2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{1}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.5419}$$

Separació del domini en intervals: $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right[$ i $\left]\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, +\infty\right[$.

Intervals	$\left]0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right[$	$\left]\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, +\infty\right[$
Signe f '	–	+
f	↓	↑

Com que f passa de decréixer a créixer en $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, aleshores f té en aquest punt un mínim relatiu.

La funció decreix en el primer interval i creix en el segon per la qual cosa **el mínim relatiu és absolut**. Les dimensions seran:

$$\mathbf{x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.5419\ m},\ \mathbf{y \simeq 1.0838\ m} \text{ i la quantitat de material } f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) \simeq \mathbf{5.5358\ m^2}.$$

20 Obtén les dimensions d'un triangle isòsceles si el seu perímetre mesura 120 cm i l'àrea ha de ser màxima.

21 Calcula les dimensions i la màxima àrea que pot tenir un rectangle inscrit en una circumferència de radi 4 m.

22 Calcula les dimensions i el major volum que pot tenir un cilindre inscrit en una esfera de radi r = 3 cm.

23 Quines dimensions ha de tenir un brick de llet, d'un litre de capacitat si la seua altura és de 5 cm, per a utilitzar la menor quantitat possible de material? Quina és eixa quantitat mínima de material?

3.8 Curvatura

Una lent de contacte situada entre dos observadors presenta diferent curvatura, ***còncava*** i ***convexa***, per a cadascun d'ells. Per tant la ***curvatura*** d'una gràfica requereix un sistema de referència. Considerem que l'observador està situat en la part superior de l'eix OY.

Recordem que l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció f en x_0 és:

$$t:\ \mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Considerem una funció f qualsevol i un punt $\mathbf{x_0}$ **en què f és derivable**.

- Diem que f és ***còncava en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la gràfica de f està representada per damunt de la recta tangent en x_0, és a dir,

$$\mathbf{f(x) > T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ \mathbf{x \neq x_0}$$

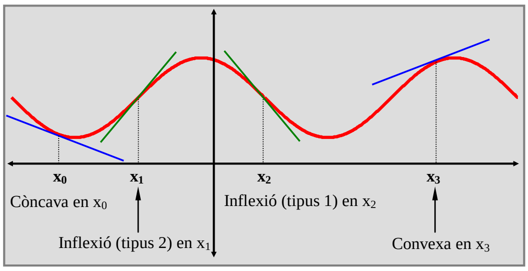
- Diem que f és ***convexa en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la gràfica de f està representada per davall de la recta tangent en x_0, és a dir,

$$\mathbf{f(x) < T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ \mathbf{x \neq x_0}$$

- Diem que f té una ***inflexió en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la recta tangent en x_0 travessa la gràfica de la funció. Pot ocórrer de dues formes:

  (1) $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$

  (2) $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$



➢ Teorema 5: condicions suficients de curvatura

Considerem una funció f dues vegades derivable en un entorn de x_0.

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0} \quad \rightarrow \quad$ **f és còncava en** $\mathbf{x_0}$
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0} \quad \rightarrow \quad$ **f és convexa en** $\mathbf{x_0}$
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0} \quad \rightarrow \quad$ **No podem assegurar res**

Vegem únicament el primer cas. El segon es dedueix de manera anàloga.

$$\text{Si} \quad f''(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad (1)$$

Aleshores: si $\mathbf{x < x_0} \quad \rightarrow \quad f'(x) < f'(x_0)$ i si $\mathbf{x > x_0} \quad \rightarrow \quad f'(x) > f'(x_0) \quad (2)$

Apliquem el TVM als anteriors intervals: $f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0)$ amb x_1 entre x i x_0.

Si $x < x_0$, com $f'(x_1) < f'(x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) > T(x)$

Si $x > x_0$, com $f'(x_1) > f'(x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) > T(x)$

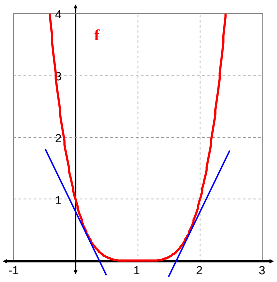
Com que $\mathbf{f(x) > T(x)}$ $\quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ **i** $\mathbf{x \neq x_0} \quad \rightarrow \quad$ **f és còncava en** $\mathbf{x_0}$**.**

Exemple 22

(A) Considerem la funció $f(x) = (x-1)^4$ que és derivable dues vegades en $\mathbb{R}$.

Les derivades són $f'(x) = 4(x-1)^3$ i $f''(x) = 12(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

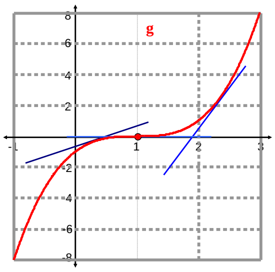
- Com que $f''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ f és còncava en x = 0.
- Com que $f''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ f és còncava en x = 1.
- Com que $f''(1) = 0$, no podem assegurar res.



(B) Considerem la funció $g(x) = (x-1)^3$ que és derivable dues vegades en $\mathbb{R}$.

Les derivades són $g'(x) = 3(x-1)^2$ i $g''(x) = 6(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $g''0) = -1 < 0 \rightarrow$ f és convexa en x = 0.
- Com que $g''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ f és còncava en x = 2.
- Com que $g''(1) = 0$, no podem assegurar res.



La representació de les dues funcions ens mostra que f és còncava en x = 1, encara que $f''(1) = 0$, i que g té una inflexió en x = 1, sent $g''(1) = 0$. Veiem com en cas de ser 0 la segona derivada, pot ocórrer qualsevol cosa.

➢ Definició de curvatura d'una funció en un interval

Diem que f és ***còncava*** (***convexa***) ***en l'interval*** **I** si és còncava (convexa) en cadascun dels punts de l'interval I.

Exemple 23

Considerem la funció $g(x) = (x-1)^3$ de l'exemple 22, amb derivada segona $g''(x) = 6(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- Si $x > 1 \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow g''(x) = 6(x-1) > 0 \Rightarrow$ g és còncava en x, si x > 1
- Si $x < 1 \rightarrow x - 1 < 0 \rightarrow g''(x) = 6(x-1) < 0 \Rightarrow$ g és convexa en x, si x < 1

Per tant, **g és convexa en l'interval $]-\infty, 1[$ i còncava en l'interval $]1, +\infty[$** $\Rightarrow$ **En x = 1 g té una inflexió**.

Pel teorema 5, els únics punts derivables dues vegades on pot canviar la curvatura d'una funció són els de derivada segona nul·la. En l'exemple 22A no ocorre mentre que en l'exemple 22B sí. A més, si no es verifica el teorema 5 també podria ocórrer. Axó dona peu a la següent definició.

➢ Punts singulars de la funció derivada d'una funció

Anomenem ***punts singulars*** de la funció derivada d'una funció f a aquells punts:

- del domini de f que són solució de $\mathbf{f''(x) = 0}$, anomenats ***punts crítics de la derivada***,
- del domini de f en els quals ***f no és derivable dues vegades***.

24 Comprova la curvatura de les funcions següents en els punts x = −1, 0, 1 i 2:

(A) $f(x) = x^2$ (B) $f(x) = x^3 - 3x$ (C) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (D) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ (E) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

➢ Teorema 6: condició necessària de punt d'inflexió

Si una funció f, dues vegades derivable en x_0, té un punt d'inflexió en x_0 $\Rightarrow$ $\mathbf{f''(x_0) = 0}$

El teorema 6, de demostració similar a la del teorema 2, mostra que els **únics punts del domini d'una funció derivable dues vegades on es pot assolir una inflexió són** les solucions de l'equació $\mathbf{f''(x) = 0}$. A més, **els punts no derivables dues vegades també poden assolir inflexions.** El teorema 7, de demostració semblant a la del teorema 3, estableix unes condicions suficients per a assolir un punt d'inflexió.

➢ Teorema 7: criteri del canvi de signe de la segona derivada

Siga f contínua en [a, b] i derivable 2 vegades en]a, b[excepte la segona derivada en $x_0 \in$]a, b[:

- Si $f'' > 0$ en $]a, x_0[$ i $f'' < 0$ en $]x_0, b[$ (o al revés) $\rightarrow$ **f té una inflexió en x_0**
- Si f'' no canvia de signe f no té una inflexió en x_0.

➢ La curvatura d'una funció en un domini D

Per a estudiar els intervals de concavitat i convexitat d'una funció f en un domini D:

- Obtenim els **punts singulars de f'** en D, i els ordenem de menor a major: $\mathbf{x_1 < x_2 < \ldots < x_n}$.
- El domini queda dividit pels punts singulars en intervals: **]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, ..,]x_n, b[**, on a pot ser $-\infty$ i b pot ser $+\infty$. S'anomenen ***intervals de concavitat i convexitat*** i **en cada un** la derivada **f'' té signe constant**.
- Estudiant el **signe de f'' en un punt** de cada interval tenim el signe en tot l'interval.

En els punts singulars de f' la funció f pot assolir inflexions. **Amb els intervals de concavitat i convexitat i el teorema 7 obtenim les inflexions**, situades sempre en punts derivables.

Exemple 24

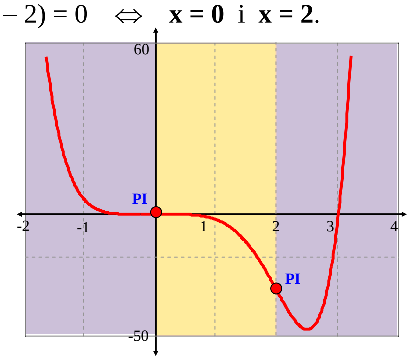
Obtenim els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció $\mathbf{f(x) = x^6 - 3x^5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La funció és derivable dues vegades derivable en $\mathbb{R}$ i les derivades són $f'(x) = 6x^5 - 15x^4$ i $f''(x) = 30x^4 - 60x^3$.

- **Punts singulars de f'**: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^4 - 60x^3 = 0 \Leftrightarrow 30x^3(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 0}$ i $\mathbf{x = 2}$.
- **Intervals de concavitat i convexitat**: **]$-\infty$, 0[,]0, 2[** i **]2, $+\infty$[**.
- **Signe de la segona derivada en un punt de cada interval**:

$f''(-1) = 90 > 0$, $f''(1) = -30 < 0$ i $f''(3) = 810 > 0$

Intervals	]$-\infty$, 0[	]0, 2[	]2, $+\infty$[
Signe de f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava



La funció és **còncava en]$-\infty$, 0[$\cup$]2, $+\infty$[i convexa en]0, 2[.**

En **x = 0 i en x = 2** canvia de signe la segona derivada, pel teorema 7, **f té una inflexió en x = 0 i en x = 2.**

Exemple 25

Obtenim els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-4x-3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2+2x+1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^3-3x^2+2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

Comprova que f és contínua en ℝ, derivable en ℝ~{ −1}, i dues vegades derivable en ℝ~{0, −1}, sent:

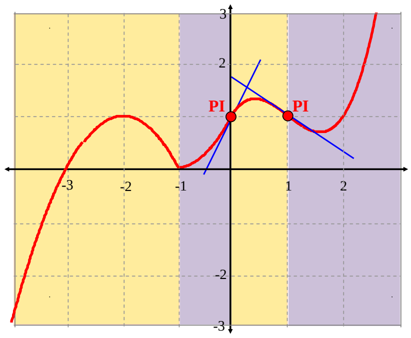
$$f'(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x < -1 \\ 2x+2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 3x^2-6x+2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 6x-6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **Punts singulars de f' :**
  - Punts crítics de la primera derivada: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow$ **x = 1**
  - Punts no derivables dues vegades: **x = −1,** per no ser f una vegada derivable en ell.
    x = 0, per no ser f derivable per segona vegada en ell.

- **Intervals de concavitat i convexitat**:
  ]−∞, −1[,]−1, 0[,]0, 1[i]1, +∞ [

- **Signe de f'' en un punt de cada interval**:

$f''(-2) = -2 < 0$, $f''(-0.5) = 2 > 0$, $f''(0.5) = -3 < 0$ i $f''(2) = 6 > 0$



Intervals	]−∞, −1[	]−1, 0[	]0, 1[	]1, +∞[
Signe de f''	–	+	–	+
f	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava

Per tant **f és convexa en]−∞, −1[∪]0, 1[i còncava en]−1, 0[∪]1, +∞ [**

- En x = −1 **no hi ha inflexió perquè f no és derivable**, encara que en els intervals que connecten amb ell la segona derivada canvia de signe. Recordem que en un punt d'inflexió, la recta tangent ha de travessar la gràfica de f, i no hi ha recta tangent quan f no és derivable.
- **En x = 0 i en x = 1** la funció sí que és derivable una vegada, i pel teorema 7, com la segona derivada canvia de signe en ells, podem dir que **f té una inflexió en x = 0 i en x = 1**. Els punts són $PI_0(0, 1)$ i $PI_1(1, 1)$.

25. Estudia els intervals de concavitat i convexitat i les inflexions de les següents funcions:

(A) $f(x) = x^2 + 3x$ (B) $f(x) = x^3 - 3x$ (C) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ (D) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(E) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (F) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ (G) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{x}$ (H) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

(I) $f(x) = x^2e^{-x}$ (J) $f(x) = xe^{-x^2/2}$ (K) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (L) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (M) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(N) $f(x) = \sin x$, en $[-\pi, 3\pi]$ (Ñ) $f(x) = x + \sin x$, en $[-\pi, 3\pi]$ (O) $f(x) = \cos^2 x$, en $[0, 2\pi]$

(P) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x & \text{si } 0 < x \le 2 \\ x^2-8x+18 & \text{si } 2 < x \le 5 \\ x^2-10x+25 & \text{si } 5 < x \le 6 \end{cases}$ (Q) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & \text{si } 0 < x \le \pi/2 \\ 3+\cos x & \text{si } \pi/2 < x \le 3\pi/2 \\ 2+\sin x & \text{si } 3\pi/2 < x \le 2\pi \end{cases}$

➢ Teorema 8. Criteri del signe de la tercera derivada

El següent teorema permet classificar els punts d'inflexió amb l'ús de la tercera derivada, de forma anàloga al teorema 4 per a classificar els extrems relatius. Però al igual que en el teorema 4, les condicions són més restrictives, ja que és necessari la tercera derivada, i a més, no sempre obtenim la resposta.

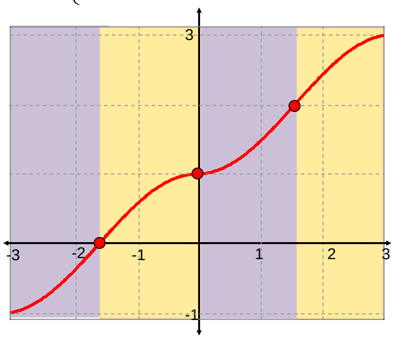
> Considerem una funció f tres vegades derivable en x_0, tal que $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ (punt crític de f'):
>
> - Si $\mathbf{f'''(x_0) \neq 0}$ $\rightarrow$ **f té una inflexió en $\mathbf{x_0}$**
> - Si $\mathbf{f'''(x_0) = 0}$ $\rightarrow$ **No podem assegurar res**

Exemple 26

Obtenim les inflexions de $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ 2 - \cos x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

F és derivable dues vegades en tots els punts de]–π, π[excepte en x = 0, on només ho és una vegada.

A més $F'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$, $F''(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$ i $F'''(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -\sin x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$



- **Punts crítics de la primera derivada**:

$$\mathbf{F''(x) = 0} \rightarrow \begin{cases} -\cos x = 0 & \rightarrow \mathbf{x = -\pi/2} \\ \cos x = 0 & \rightarrow \mathbf{x = \pi/2} \end{cases}$$

- **Apliquem el criteri de la tercera derivada a aquests punts:**

$F'''(-\pi/2) = \sin(-\pi/2) = -1 \neq 0$ ⇒ **Hi ha inflexió en x = –π/2.**

$F'''(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \neq 0$ ⇒ **Hi ha inflexió en x = π/2.**

A més en x = 0 podria tenir inflexió per ser un punt no derivable per segona vegada i, com que no podem aplicar el criteri de la tercera derivada, tenim que utilitzar el criteri del canvi de signe de la segona derivada:

- **Intervals a considerar**: **]–π, –π/2[,]–π/2, 0[,]0, π/2[** i **]π/2, π[**.
- **Signe de la segona derivada** en un punt de cada un: F''(–3π/4) > **0**, F''(–π/4) = < **0**, F''(π/4) > **0** i F ''(3π/4) < **0**.

Intervals	]–π, –π/2[	]–π/2, 0[	]0, π/2[	]π/2, π[
Signe de F''	F''(–3π/4) > **0**	F''(–π/4) = < **0**	F''(π/4) > **0**	F ''(3π/4) < **0**
F	**Còncava**	**Convexa**	**Còncava**	**Convexa**

En x = 0 canvia el signe de la segona derivada per tant **hi ha inflexió en x = 0**.

26 Troba les inflexions de les funcions:
(A) $f(x) = x^5 - 10x^2$ (B) $f(x) = x^5 - 10x^3$ (C) $f(x) = x^5 - 10x^4$ (D) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

27 Demostra que tota funció polinòmica de grau 2 és sempre còncava o sempre convexa, i no té punts d'inflexió.

28 Demostra que tota funció polinòmica de grau 3 té un únic punt de inflexió.

29 Demostra que si n és parell, la funció $f(x) = x^n$ és còncava en ℝ i no té cap punt d'inflexió.

30 Demostra que si n és imparell, n > 1, la funció $f(x) = x^n$ és convexa en]–∞, 0[i còncava en]0, +∞[, i té una inflexió en x = 0.

Exemple 27

La següent funció reflexa la quantitat de pluja (en litres/m^2) arreplegada en una estació meteorològica durant les 13 hores que va durar una tempesta:

$$f(t) = -\frac{1}{10}\left(t^3 - 18t^2 - 40t\right), \text{ amb } 0 \le t \le 13$$

Després de les 2 primeres hores de tempesta la quantitat de litres arreplegats foren f(2) = 14.4, i després de les 4 primeres f(4) = 38.4. El nombre mitjà de litres arreplegats en els intervals [0, 2] i [2, 4] és la variació mitjana:

$$\mathbf{VM_{[0,\,2]}} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \mathbf{7.2 \;\; litres/hora} \qquad\qquad \mathbf{VM_{[2,\,4]}} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \mathbf{12 \;\; litres/hora}$$

La intensitat de la pluja en cada instant de temps ve mesurada per la variació instantània, és a dir, la derivada en el moment considerat. Així obtenim per exemple la intensitat de la pluja a les 2 hores:

$$f'(t) = -\frac{1}{10}\left(3t^2 - 36t - 40\right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{f'(2) = 10 \;\; litres/hora}$$

En quin instant de temps plou amb més intensitat? La intensitat de la pluja serà màxima en l'instant t en el qual s'assoleix el **màxim absolut de f $'$(t)**; obtenim el punt crític de la derivada f $'$:

$$f''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{10}\left(6t - 36\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 6}$$

Entre els valors t = 0, 6 i 13 es trobarà el màxim absolut de f $'$ (existeix perquè f $'$ és contínua en l'interval tancat)

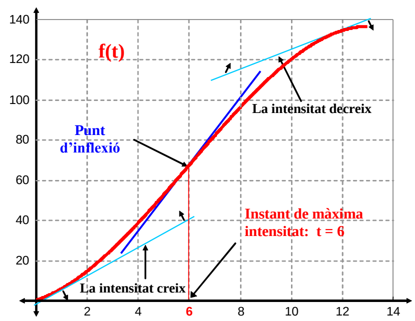
$f'(0) = 4$ $\qquad$ **$f'(6) = 14.8$** $\qquad$ $f'(13) = 0.1$ $\quad \Rightarrow \quad$ la màxima intensitat s'assoleix en **t = 6**

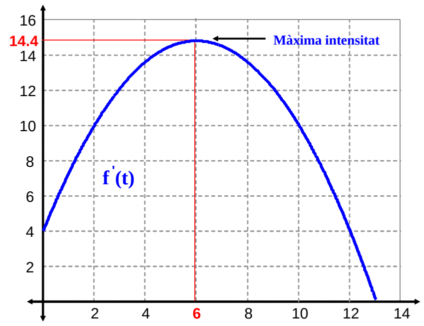
El signe de la segona derivada indica els instants en què la intensitat de la pluja augmenta o disminueix:

Intervals	[0, 6[	]6, 13]
Signe f $''$	+	–
f	**còncava**	**convexa**

En [0, 6] tenim que f $'$(t) creix mentre que en [6, 13] f $'$(t) decreix; en t = 6 s'assoleix la màxima intensitat de pluja. Des d'aquest instant, la intensitat de la pluja comença a decréixer; s'anomena punt de ***rendiments decreixents***.

En t = 6 la funció f, quantitat de pluja, té una inflexió, i la intensitat f ' té el seu valor màxim.





31 Obtén els valors de m per als quals la funció f(x) = $x^3 + mx^2 + nx$ té un punt d'inflexió en P(1, 2).

32 Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ té un punt d'inflexió en P(1, 2), i el pendent de la recta tangent en eixe punt és –1.

33 Obtén l'únic punt d'inflexió de la funció f(x) = $e^x - e^{-x}$.

34 Obtén el pendent de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ en els seus punts d'inflexió.

35 Un transportista entrega, durant la jornada laboral de 10 hores, una quantitat de kg de carga donada per la funció f(t) = $-t^3 + 18t^2 + 12t$. Quan haurà entregat la major quantitat de carga? En quin instant és més eficient i quin significat té aquest instant? Et pareixen lògics els resultats obtinguts?

3.9 Representació gràfica de funcions

Amb el càlcul de les derivades d'una funció tenim quasi tots els elements necessaris per a descriure la seua gràfica: els màxims i mínims, que separen les regions de creixement i decreixement, i els punts d'inflexió, que separen les regions de distinta curvatura. Però hem d'estudiar el comportament de les funcions en les proximitats dels seus punts de discontinuïtat, i en l'infinit a través dels limites finits i infinits. Obtindrem així les seues asímptotes.

➢ Representació gràfica de funcions polinòmiques

Exemple 28

Representem la funció polinòmica $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Les funcions polinòmiques són contínues en $\mathbb{R}$, per la qual cosa no tenen asímptotes verticals. Tampoc tenen asímptotes horitzontals ni obliqües (excepte les de grau 0 i 1, que són rectes) perquè

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

Les funcions polinòmiques són funcions derivables en $\mathbb{R}$, per la qual cosa l'estudi de les equacions

(1) $\mathbf{f(x) = 0}$ **(2)** $\mathbf{f'(x) = 0}$ **(3)** $\mathbf{f''(x) = 0}$

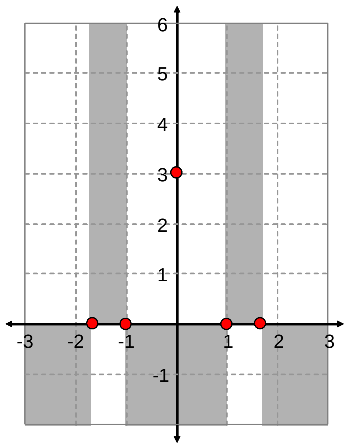
proporciona els talls amb l'eix OX (1), els possibles extrems relatius (2) i les possibles inflexions (3).

(1) $\mathbf{f(x) = 0} \;\rightarrow\; x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = \pm 1, \pm\sqrt{3}}$

Intervals	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
Signe f	+	–	+	–	+

Els talls amb l'eix OX són $\mathbf{(-\sqrt{3}, 0)}$, **(–1, 0)**, **(1, 0)** i $\mathbf{(\sqrt{3}, 0)}$.

A més, el tall amb l'eix OY és (0, f(0)), és a dir, **(0, 3)**.



La gràfica de f passa pels punts de tall marcats, però no ho fa per les regions ombrejades.

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \;\rightarrow\; 4x^3 - 8x = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = 0, \pm\sqrt{2}}$

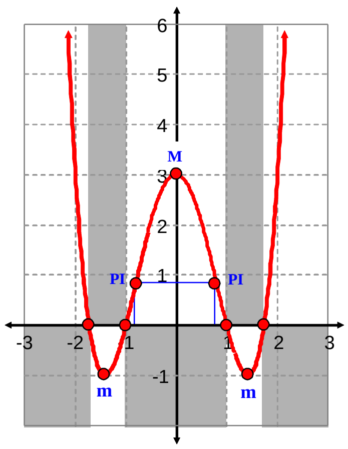
Intervals	$]-\infty, -\sqrt{2}[$	$]-\sqrt{2}, 0[$	$]0, \sqrt{2}[$	$]\sqrt{2}, +\infty[$
Signe f'	–	+	–	+
f	↓	↑	↓	↑

Mínim $\mathbf{m(-\sqrt{2}, -1)}$ Màxim **M(0, 3)** Mínim $\mathbf{m(\sqrt{2}, -1)}$

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \;\rightarrow\; 12x^2 - 8 = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = \pm\sqrt{2/3}}$

Intervals	$]-\infty, -\sqrt{2/3}[$	$]-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}[$	$]\sqrt{2/3}, +\infty[$
Signe f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava

Inflexió $\mathbf{PI\left(-\sqrt{2/3},\ 7/9\right)}$ Inflexió $\mathbf{PI\left(\sqrt{2/3},\ 7/9\right)}$



➢ Representació gràfica de funcions racionals

Exemple 29

Representem la funció racional $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$.

Les derivades són $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ i $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$.

Als passos indicats en l'exemple anterior, afegim el càlcul d'asímptotes.

- Com que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$ i $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$, les rectes **x = –1**, **x = 1** són **asímptotes verticals**.

  L'estudi del signe de la funció ens assegurarà les direccions de les branques infinites, si bé podríem fer-ho amb els límits laterals.

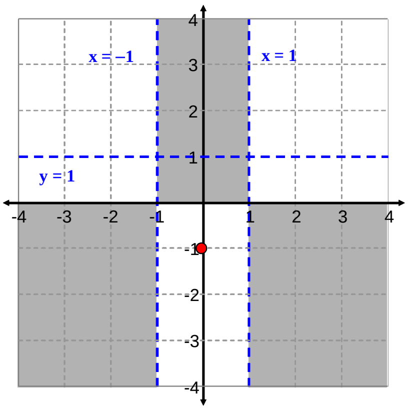
- Com que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$, la recta **y = 1** és **asímptota horitzontal bilateral**.

  Com que hi ha asímptota horitzontal bilateral, no pot haver-hi asímptotes obliqües.

(1) **f(x) = 0** $\rightarrow$ $x^2 + 1 = 0$ no té solució; f no talla l'eix OX.

El signe de f pot canviar en els punts de **discontinuïtat {–1, 1}**.

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f	+	–	+



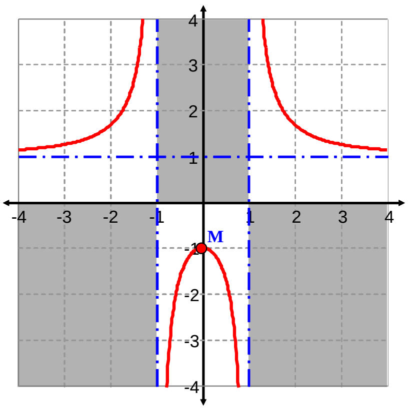
El punt de tall amb l'eix OY és (0, f(0), és a dir, **(0, –1)**.

(2) **f '(x) = 0** $\rightarrow$ $-4x = 0$ $\rightarrow$ **x = 0**

Afegim els punts de discontinuïtat **{–1, 1}** a l'estudi **del signe de f '**:

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 0[	]0, 1[	]1, +∞[
Signe f '	+	+	–	–
f	↑	↑	↓	↓

Discont. Màxim Discont.
M(0, –1)



(3) **f ''(x) = 0** $\rightarrow$ $12x^2 + 4 = 0$ no hi ha punts d'inflexió.

No obstant, la curvatura pot canviar en les discontinuïtats.

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f ''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava

36 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = -x^3 + 6x^2$ (B) $f(x) = x^5 - 5x^3$ (C) $f(x) = 4x^2 - x^4$ (D) $f(x) = x^4 - 2x^3$

(E) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (F) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ (G) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ (H) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ (I) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

Exemple 30

Representem la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ les derivades de la qual són:

$$f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = \frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

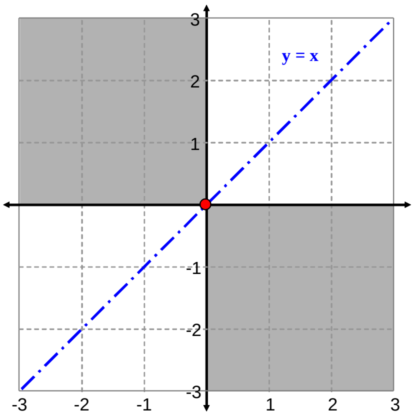
- Com que $D_f = \mathbb{R}$ no hi ha asímptotes verticals.
- Com que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty$ no hi ha asímptotes horitzontals.
- Hi ha asímptota obliqua bilateral **y = x**:

$$\mathbf{m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \mathbf{1} \ \text{ i } \ \mathbf{n} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \mathbf{0}$$

(1) $\mathbf{f(x) = 0} \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0}$

Intervals	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signe f	–	+

Passa per **(0, 0)**, que és el punt de tall amb els dos eixos.



(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \rightarrow x^4 + 3x^2 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0}$

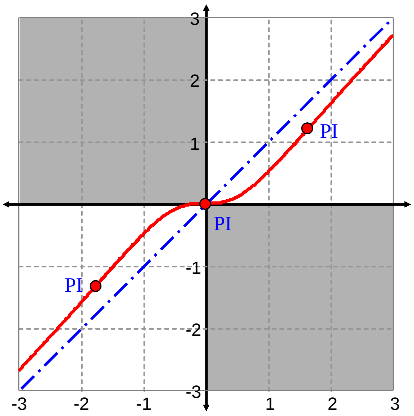
Intervals	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signe f'	+	+
f	↑	↑

f és sempre **creixent**, **no té ni màxims ni mínims**.

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \rightarrow 6x - 2x^3 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0, \pm\sqrt{3}}$

Intervals	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}, 0[$	$]0, \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
Signe f''	+	–	+	–
f	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa

Inflexió $\mathbf{PI}\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ **Inflexió** **PI(0, 0)** **Inflexió** $\mathbf{PI}\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$



37 Representa gràficament les següents funcions racionals:

(A) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ (B) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ (C) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-3x}$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$

(E) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}$ (F) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (G) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (H) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

➢ Representació gràfica d'altres funcions

Exemple 31

Representem la funció $f(x) = x + \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Les derivades són $f'(x) = 1 + \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ i $f''(x) = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $D_f = \mathbb{R}$, **no hi ha asímptotes verticals.**
- Com que $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty}(x+\sin x) = -\infty$ **no hi ha asímptotes horitzontals.**
- No hi ha asímptotes obliqües, perquè no s'obté n (encara que sí m) (és només una direcció asimptòtica):

$$\mathbf{m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{n} = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}(x+\sin x - x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sin x \quad \textbf{que no existeix}$$

(1) $\mathbf{f(x) = 0} \rightarrow x + \sin x = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0} \rightarrow$ passa per **(0, 0)**, punt de tall amb els dos eixos.

Intervals	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signe f	–	+

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \rightarrow 1 + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow \mathbf{x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

Observa que $-1 \le \cos x \le 1 \rightarrow 1 + \cos x \ge 0 \rightarrow \mathbf{f'(x) \ge 0}$

Per la qual cosa és sempre **creixent, i en els punts singulars no hi ha extrems relatius.**

Intervals	....	$]-3\pi, -2\pi[$	$]-\pi, 0[$	$]\pi, 2\pi[$	....
Signe f''		+	+	+	
f	↑	↑	↑	↑	↑

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \rightarrow -\sin x = 0 \rightarrow \mathbf{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

Intervals	....	$]-4\pi, -3\pi[$	$]-3\pi, -2\pi[$	$]-2\pi, -\pi[$	$]-\pi, 0[$	$]0, \pi[$	$]\pi, 2\pi[$	$]2\pi, 3\pi[$	$]3\pi, 4\pi[$	....
Signe f''		–	+	–	+	–	+	–	+	
f		Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	

Tenim punts d'inflexió en $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Però el pendent en aquests punts varia:

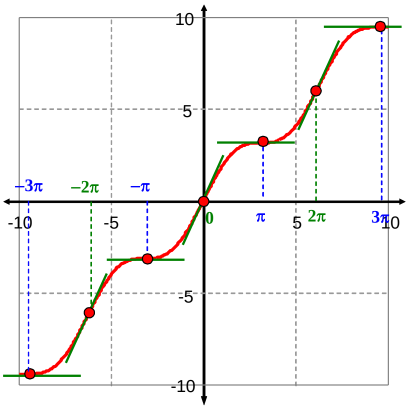
- Si k és imparell, el pendent és 0; per exemple:

  $$\mathbf{f'(\pi) = 1 + \cos\pi = 0}$$

  (Són els punts singulars de f.)

- Si k és parell, el pendent és 2; per exemple:

  $$\mathbf{f'(2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 2}$$



Exemple 32

Representem gràficament la "***campana de Gauss***", donada per la funció $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La funció és derivable en $\mathbb{R}$ dues vegades: $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ i $f''(x) = (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $D_f = \mathbb{R}$, no hi ha asímptotes verticals.
- Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, la recta **$y = 0$ és asímptota horitzontal bilateral**.

(1) $\mathbf{f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0}$, perquè qualsevol funció exponencial és sempre positiva.

El punt de tall amb l'eix OY és **(0, 1)**.

Intervals	]0, +∞[
Signe f	+

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \;\rightarrow\; -x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = 0}$

perquè la part exponencial no pot ser 0.

El màxim relatiu s'assoleix en $x = 0$ $\Rightarrow$

Intervals	]−∞, 0[	]0, +∞[
Signe f'	+	–
f	↑	↓

M(0,1)

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \;\rightarrow\; (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \;\rightarrow$

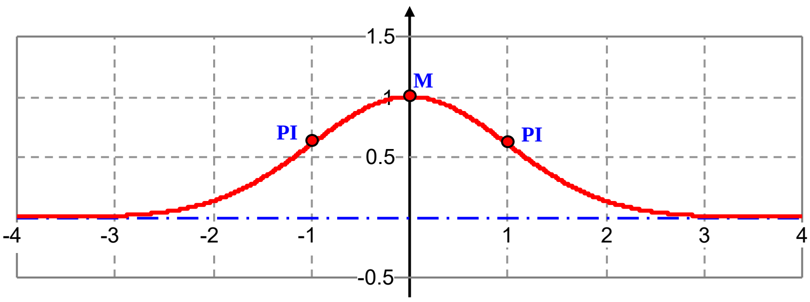
$\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = \pm 1}$

(De nou la part exponencial no pot ser 0.)

Les inflexions s'assoleixen en $x = \pm 1$ $\Rightarrow$

Intervals	]−∞, −1 [	]−1, 1[	]1, +∞[
Signe f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava

PI (-1, $e^{-1/2}$) **PI (1, $e^{-1/2}$)**



38 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ (B) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (C) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ (D) $f(x) = e^{-|x|}$

(E) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ (F) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ (G) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (H) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

Problemes del capítol 3

1 Estudia el creixement de les següents funcions en els punts $x = -2$, 2 i 4:

$f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $\quad$ $g(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\quad$ $t(x) = \operatorname{tg}(x+1)$

2 Obtén els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\quad$ $g(x) = x\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\quad$ $h(x) = (x-4)^3$ $\quad$ $t(x) = \ln(x^3+1)$

(B) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$ $\quad$ $g(x) = x\,e^{x-1}$ $\quad$ $h(x) = \ln(x^2-1)$ $\quad$ $t(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$

3 La velocitat que porta un motorista en cada instant, durant les 8 hores de recorregut, ve donada per la funció $v(t) = \ln(t+1)$. Troba els intervals en què va augmentant i disminuint la velocitat. En quins intervals incrementa i disminueix l'acceleració?

4 Obtén els extrems relatius de les funcions:

(A) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $\quad$ $g(x) = -(x-2)(x+1)^2$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ $\quad$ $t(x) = x - x^3$

(B) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}}$ $\quad$ $h(x) = x^2 - x^3\sqrt{x}$ $\quad$ $t(x) = \dfrac{x}{x^3+2}$

(C) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{x}{2} - \sin^2 x$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ $\quad$ $t(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

(D) $f(x) = x^4 - 4x^3$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ $\quad$ $t(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

(E) $f(x) = |x|e^{-|x|}$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$ $\quad$ $t(x) = \sin^2 x$

(F) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ $\quad$ $g(x) = \sin 2x + 2\sin x$ $\quad$ $h(x) = \sin 2x + 2\cos x$

5 Obtén els extrems relatius de les funcions dels problemes 1 i 2.

6 Obtén els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de les funcions:

(A) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $\quad$ $g(x) = \sqrt[3]{x}\,e^x$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ $\quad$ $t(x) = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ $\quad$ $p(x) = \dfrac{10}{1+e^{-2x+4}}$

(B) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x-6}$ $\quad$ $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ $\quad$ $h(x) = x \operatorname{arctg} x$ $\quad$ $t(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

7 Estudia el creixement, decreixement, curvatura, màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions $f(x) = x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$, segons que n siga un nombre natural parell o imparell.

8 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions en els intervals indicats:

(A) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$. $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{x^5+x+1}$, en $[-1/2, 1]$.

(B) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$, en $[-1, 3[$. $\quad$ $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, en $[-3, 3[$.

9 Representa gràficament les funcions:

(A) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ $\quad$ (B) $f(x) = -6x^5 + 11x^3 - 3x$ $\quad$ (C) $f(x) = 6x^6 - 11x^4 + 4x^2$

(D) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $\quad$ (E) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ $\quad$ (F) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\quad$ (G) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

10 Representa gràficament les funcions dels exercicis 1, 2, 4 i 6.

11 Representa gràficament les funcions:

(A) $f(x) = |\ln x|$ (B) $f(x) = \ln|x|$ (C) $f(x) = |\ln|x||$ (D) $f(x) = \ln|\ln|x||$

(E) $f(x) = x^2 - 6|x| + 8$ (F) $f(x) = |x^2 - 6|x| + 8|$ (G) $f(x) = |x^3 - x|$

12 Anomenem funció part entera de x, que representem per E(x), a la funció que associa a cada nombre x el major dels enters menors o iguals que x: $E(x) = \text{màx}\{n\in\mathbb{Z} / n \le x\}$.
Representa gràficament les següents funcions, definides en l'interval [0, 4]:
(A) $f(x) = E(x)$ (B) $f(x) = E(x)^2$ (C) $f(x) = x \cdot E(x)$ (D) $f(x) = E(x^2)$

13 La velocitat d'un mòbil (en km/h) dependent del temps (en hores) ve donada per l'expressió $v(t) = -t^2 + 4t$, en l'interval [0, 4]. Comprova que la funció verifica les hipòtesis del teorema de Rolle i troba el punt que afirma la tesi. Quin significat físic té tal punt? Què ocorre amb les variacions i variacions mitjanes de la funció en els intervals [0, 2] i [2, 4]? I en [0, 4]?

14 Comprova si les següents funcions verifiquen el teorema del valor mitjà. En cas afirmatiu troba el punt que afirma les seues tesis:

$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, en [1, 2] $g(x) = \dfrac{x^3+2x}{x+1}$, en [–2, 5] $h(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x < -1 \end{cases}$

15 Considera el segment determinat pels punts A(1, 1) i B(3, 9) en la paràbola $y = x^2$. Troba un punt de la paràbola la recta tangent del qual siga paral·lela a la corda AB.

16 Comprova si les següents funcions verifiquen el teorema de Rolle:
(A) $f(x) = x - x^3$, en $[0, 1]$. (B) $f(x) = \text{tg}\,x$, en $[0, \pi]$. (C) $f(x) = \ln x$, en $[1, e]$.

17 Separa les arrels de les següents equacions:
(A) $x^2 - x + 3 = 0$ (B) $2x^4 - 14x^2 + 14x = 1$ (C) $x^5 + 5x^4 + 2x = -1$
(D) $x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 + x = \dfrac{2}{3}$ (E) $2x^3 - 15x^2 + 36x = -1$ (F) $x^2 - x\sin x - \cos x = 0$

18 Troba els valors de a, b i c perquè la funció següent verifique el teorema de Rolle:
(A) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x+1 & \text{si } 2 \le x \le c \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx^2+4 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

19 Aplica el teorema del valor mitjà a la funció $f(x) = \sin x$ en l'interval [0, a] i dedueix que $\sin x \le x$ per a tot $x\in[0, 2\pi]$.

20 La funció $f(x) = \sqrt{x}$ verifica el teorema del valor mitjà en [0, b], amb b > 0. Existeix un valor de b per al qual el punt que verifica la tesis del teorema és $x_0 = \dfrac{b}{2}$?

21 La funció $f(x) = |x^2 - 5|$ verifica que f(1) = f(3) = 4 però la seua derivada no s'anul·la en cap punt de l'interval]1, 3[. Contradiu el teorema de Rolle?

22 Una funció polinòmica té 3 arrels o zeros, x_1, x_2 i x_3. Demostra que hi ha un punt x_0 on la derivada segona s'anul·la.

23 Donada l'equació $x \sin x + \cos x = x^2$, demostra:
(A) Si x = a és una arrel d'aquesta equació, aleshores x = –a també ho és.
(B) Hi ha una arrel en l'interval]0, π[.
(C) L'equació no té més de dues arrels en la recta real.

24 Siga $P(x)$ un polinomi de grau 4 amb 4 arrels reals distintes. Demostra que la seua derivada té 3 arrels reals distintes, i la seua segona derivada en té 2.

25 Separa les arrels de les següents equacions polinòmiques:

(A) $x^3 = 3x^2 - 1$ (B) $6x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ (C) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 = 0$

26 Obtén els valors dels paràmetres m i n per als quals la funció $f(x) = x^5 + mx^2 + nx$ té un mínim en $x = 1$ i un punt d'inflexió en $x = -1$.

27 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tinga un punt d'inflexió en $P(1, 2)$ de tangent horitzontal.

28 Obtén la forma general de totes les funcions polinòmiques de grau 3 que passen per $(0, 0)$ i tenen un punt d'inflexió en $(1, 1)$.

29 Obtén els valors de a, b i c per als quals la gràfica de la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tinga un punt d'inflexió en $P(-1, -2)$ i el pendent de la recta tangent en aquest punt siga 4.

30 Obtén els valors de a i de b perquè la funció trigonomètrica $f(x) = a\sin x + b\cos x$ tinga un màxim en el punt $P\left(\pi/6, \sqrt{3}\right)$.

31 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ tinga un punt d'inflexió en $P(\pi/4, 1)$, amb recta tangent de pendent $\sqrt{2}$ en aquest punt.

32 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de la funció $f(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x$ té un punt d'inflexió en $P(\pi/2, 4)$, i la recta tangent en eixe punt té pendent 2.

33 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ té un punt d'inflexió en $P(1, 2)$.

34 Obtén els valors de a i b perquè la funció trigonomètrica $f(x) = (ax + b)e^x$ tinga un punt extrem en $P(1, e)$.

35 Obtén els valors de a, b i c per als quals la gràfica de la funció $f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{3x}$ té un punt d'inflexió en $P(0, 1)$, i la recta tangent en eixe punt té pendent 2.

36 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ tinga un punt d'inflexió en $P(0, -2)$, amb recta tangent de pendent 1 en aquest punt.

37 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = axe^x + be^{-x} + c$ tinga un punt d'inflexió en $P(0, 1)$, amb recta tangent de pendent 3 en aquest punt.

38 Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ té un mínim en el punt $P(1, 0)$, i la recta tangent té pendent 1 en $x = 2$.

39 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ té un mínim en $P(0, 2)$ i un punt d'inflexió en $Q(1, 1)$.

40 Calcula els valors de a, b i c per als quals la següent funció definida a trossos és sempre derivable, i té un màxim en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

41 Obtén l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el punt d'inflexió d'aquesta gràfica.

42 Obtén els punts de la corba $y = \frac{4}{x}$ per als quals les rectes tangents en aquests punts es tallen en $P(4, -8)$.

43 Aplicant la regla de L'Hôpital, calcula els següents límits:

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\sin x}$ (C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x - x}{x-\sin x}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(E) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-\sin x}{\ln x+\cos x}$ (F) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$ (G) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}$ (H) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(I) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ (J) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{e^x+\cos x}$ (K) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$ (L) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg}x}$

(M) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ (N) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ (Ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x}$ (O) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

(P) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}$ (Q) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ (R) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$

44 Calcula els següents límits de funcions:

(A) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x+\sin 2\pi x}{\sin 3\pi x}$ (B) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(2+\cos x)}$

45 Obtén l'equació de l'asímptota horitzontal de $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)}$.

46 Classifica les dues discontinuïtats de la funció $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}$, per a $0\le x\le\pi$.

47 Classifica la discontinuïtat de la funció $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & \text{si } x<2\\[2ex] \dfrac{x^3-8}{3x^2-12} & \text{si } x>2\end{cases}$.

48 Donada la funció definida a trossos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x} & \text{si } 0<x<\pi\\ 3\cos x & \text{en altre cas}\end{cases}$.

(A) Obtén el conjunt de punts on és contínua. (B) Classifica les discontinuïtats.

49 La cota de neu assolida (en metres) en un determinat indret, durant les 4 primeres setmanes de l'hivern, es pot expressar amb la funció $f(x) = -(x-1)^3 + 3(x-1)^2$, sent x el temps transcorregut en setmanes.

(A) Calcula la variació mitjana en l'interval [0, 1] i en [1, 2]. Quin és el seu significat?
(B) A quin ritme (velocitat) s'arreplega la neu en l'instant x = 1.5? I en l'instant x = 2? I en x = 2.5?
(C) En quin instant de temps hi ha més neu acumulada? Quina màxima altura assoleix?
(D) En quins instants de temps hi ha menys acumulació de neu? ¿Quina mínima altura assoleix?
(E) En quin instant de temps la velocitat amb què la neu s'acumula és màxima? Quina és eixa màxima velocitat?

50 A partir de 1960, la població en milers de persones d'un poble es va modelitzar amb la funció $P(t)=180-\dfrac{165}{0.03t^2+1}$, on t indica els anys transcorreguts des de 1960.

(A) Segon aquest model, decreixerà la població en algun moment?
(B) Obtén l'instant de temps en què la taxa de creixement és màxima. A quin ritme (velocitat) anual està creixent la població en eixe moment?
(C) Obtén les asímptotes de P(t). Quin és el seu significat?
(D) Representa la funció i la seua funció derivada.

51 Una màquina fabrica un producte amb dues qualitats distintes: una quantitat x de tones de baixa qualitat i una altra quantitat y de tones d'alta qualitat. La relació entre ambdues quantitats és $y = \frac{18-5x}{10-x}$, i sabem que la màquina no produeix més de 9 tones de baixa qualitat. Obtén la quantitat de tones del producte de cada qualitat que s'ha de produir per a obtenir ingressos màxims si el preu per tona de baixa qualitat és 10 000 € i el d'alta qualitat el doble.

52 S'ha comprovat que la relació entre el benefici B obtingut per la venda d'un producte (en milers d'euros) i el temps t (en mesos) que està en el mercat és $B(t) = \frac{100t}{t^2+400}$.

(A) Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció B(t).
(B) Quina informació ens proporcionen els anteriors intervals sobre la evolució dels beneficis al llarg del temps?
(C) Quant de temps ha d'estar el producte en el mercat perquè el benefici siga màxim? Quin és eixe màxim benefici?
(D) Fes una representació gràfica de la funció B(t).

53 La concentració d'ozó contaminant, en micrograms per m^3, en una ciutat durant els anys 90 es pot expressar amb la fórmula $C(x)= 90 +15x - 0.6x^2$, on x és el temps en anys mesurat des de l'1 de gener de 1990.

(A) Obtén el ritme de creixement del període 1990 - 1995, ambdós anys inclosos.
(B) A quin ritme creixeria l'1 de gener de1998?
(C) En quin moment el ritme de creixement serà major?

54 Un article ha estat 8 anys en el mercat. Si el seu preu P(t) (en desenes de €) està relacionat amb el temps t (en anys) que porta en el mercat, amb la funció $P(t) = \begin{cases} 4t^2+4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2 \\ \frac{-5}{2}t+25 & \text{si} \quad 2 < t \le 8 \end{cases}$, calcula:

(A) El preu a l'any d'estar en el mercat.
(B) La variació mitjana del preu entre el tercer i cinquè any.
(C) La variació instantània al primer i al quart any.
(D) Estudia el creixement i decreixement de la funció.
(E) Quin va ser el preu màxim que va assolir el producte en el mercat? En quin instant de temps es va assolir?
(F) Escriu la funció derivada de P(t). Què representa?
(G) En quin moment la variació del preu ha sigut màxima?

55 En un punt del Cantàbric observem el moviment de les marees durant 6 hores, entre les 12 del migdia i les 6 de la vesprada. La funció que indica la seua variació en altitud (en metres) depenent del temps (en hores) ve donada per $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x$. Calcula:

(A) Els intervals de concavitat i convexitat.
(B) El punts d'inflexió de la funció.
(C) Què li passa a la velocitat de variació de la marea en el punt d'inflexió? Quin significat té?
(D) Representa gràficament f (x) i f'(x).

56 Observem un globus que realitza fotografies aèries. L'altitud del globus sobre el nivell del mar (en Dam) en funció del temps transcorregut (en hores) ve donat per la funció $f(t) = t^3 - 1.5t^2 + 1$, amb $t \in [0, 10]$. Obtén:

(A) f(0) i f(5), i expressa el seu significat.
(B) La variació mitjana de l'altitud del globus entre la 3a i 5a hora.
(C) La variació instantània de l'altitud en t = 6.
(D) En quin moment assoleix el globus la major i menor altura? Quins són els seus valors?
(E) En quin moment assoleix la major variació d'altitud? Quina és? I la menor variació?

57 Un motorista dona una volta de reconeixement en un circuit. Realitza el trajecte en 3.5 minuts i la velocitat de la seua moto, durant el trajecte, s'expressa per la funció v(t) = $-\frac{1}{2}t^4 + 4t^3 - 11t^2 + 12t$ on el temps t ve donat en minuts i la velocitat v(t) en km/minut. Es demana:

(A) La variació mitjana en [1,3]. Expressa el significat i les unitats en què es mesura.
(B) La variació instantània en t = 2.5. Expressa el significat i les unitats en què es mesura.
(C) Intervals en què augmenta la velocitat i intervals en què disminueix.
(D) Velocitat màxima que assoleix. En quin instant es produeix?
(E) Velocitat mínima. En quin instant es produeix?
(F) Acceleració màxima i mínima. En quins instants es produeixen?
(G) Amb les dades obtingudes fes una representació gràfica aproximada de v(t).

58 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{2x}-1} & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x\ln x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$:

(A) Calcula els valors de m i n per als quals f és sempre contínua.
(B) Obtén les equacions de les asímptotes horitzontals, si n'hi ha, de l'anterior funció.

59 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+x)+\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a perquè f siga contínua en x = 0.
(B) Obtén l'equació de la seua asímptota horitzontal.

60 Calcula el valor de a perquè les següents funcions siguen contínues en els seus dominis:

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 2 - 2e^x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \text{tg}x}{x - \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+5}-3} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(E) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(F) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(G) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

61 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a perquè f siga contínua en x = 0.
(B) Obtén la derivada de f en x = 0.

62 Obtén el valor de a per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{arctg}\,2x}{\text{arctg}\,3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ és contínua en x = 0.

63 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$, es demana:

(A) Valor de a per al qual f és contínua en x = 0.
(B) Si a = 3/4, calcula la derivada de f en x = 0.

64 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 1+(x+1)^2 & \text{si } x<1 \\ 3+2(x-2)^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, es demana:

(A) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat, i obtén la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Fes la seua representació gràfica.

65 Donada la funció definida a trossos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2e^x-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2+2}{x+2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén raonadament el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de totes les asímptotes que té.
(C) Comprova si f és derivable en x = 0.

66 Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$, es demana:

(A) Expressa-la com una funció definida a trossos.
(B) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat.
(C) Obtén el major i el menor valor de la funció en l'interval [−2, 3.

67 Comprova que les següents funcions són derivables en x = 0, i calcula f'(0).

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 & \text{si } x=0 \end{cases}$

68 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{e^x-3} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de les asímptotes que tinga.

69 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+4x)} & \text{si } x<0 \\ xe^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de les asímptotes que tinga.

70 Donada la funció $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\ln(1+5x^2)}$:

(A) Obtén el domini de f.
(B) Comprova si la gràfica de f té una asímptota vertical.
(C) Comprova si la gràfica de f té una asímptota horitzontal.

71 Donada la funció $f(x) = \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+x^2+x^4)}$:

(A) Obtén el domini de f.
(B) Obtén les equacions de les seues asímptotes.

72 Donada la funció $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$, es demana:
- (A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
- (B) Major i menor valor de la funció, i punt del domini on s'assoleix.
- (C) Intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
- (D) Representació gràfica aproximada.

73 Donada la funció $f(x) = x^2\left(1-x^2\right)^2$, es demana:
- (A) Obtén els punts de tall amb els eixos de coordenades.
- (B) Obtén els intervals de creixement i decreixement.
- (C) Obtén el màxim i mínim absolut de f en l'interval $[-1, 1]$.
- (D) Amb els apartats anteriors, fes una representació gràfica aproximada.

74 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, es demana:
- (A) Obtén els intervals on f és positiva.
- (B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
- (C) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
- (D) Equacions de les asímptotes i representació gràfica.

75 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$, es demana:
- (A) Obtén les equacions de les seues asímptotes.
- (B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
- (C) Fes la representació gràfica.

76 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, es demana:
- (A) Obtén les seues dues primeres derivades.
- (B) Obtén els intervals de creixement i decreixement.
- (C) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
- (D) Equació de la seua única asímptota, i representació gràfica.

77 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$, es demana:
- (A) Obtén els punts de tall amb els eixos de coordenades.
- (B) Obtén els intervals on f és no negativa.
- (C) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
- (D) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
- (E) Equacions de les asímptotes, i representació gràfica.

78 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$:
- (A) Obtén l'equació de les asímptotes que tinguen.
- (B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius de f.
- (C) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius de g.
- (D) Fes una representació gràfica aproximada de les dues funcions.

79 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, es demana:
- (A) Domini i equació de les asímptotes que tinga.
- (B) Intervals de creixement i decreixement.
- (C) Extrems relatius i absoluts de f, si en té.
- (D) Intervals on f és positiva, i on f és negativa.
- (E) Amb els apartats anteriors, fes una representació gràfica aproximada.

80 Donada la funció $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$:
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

81 Donada la funció $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén el màxim absolut i el mínim absolut de f en $[-2, 2]$.

82 Donada la funció $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$:
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

83 Donada la funció $f(x) = \ln(16x^2 - x^4)$, es demana:
(A) Conjunt de punts on f és contínua.
(B) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

84 Donada la funció $f(x) = \ln(-x^4 + 8x^2 + 9)$, es demana:
(A) Domini de f.
(B) Intervals de creixement i decreixement de f.
(C) Màxims i mínims relatius de f.
(D) Màxim i mínim absolut de f, si n'hi ha.

85 Donada la funció $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims.
(B) Intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(C) Pendent de la recta tangent en els punts d'inflexió.
(D) Representació gràfica aproximada.

86 Donada la funció $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$, es demana:
(A) Comprova que f és sempre no negativa.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén l'equació de la seua asímptota horitzontal.
(D) Representació gràfica.

87 Donada la funció $f(x) = (x^3 + 2x + 2)e^{-x}$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(B) Asímptotes i representació gràfica aproximada.

88 Donada la funció $f(x) = xe^{-x^2/2}$, es demana:
(A) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(B) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(C) Equació de la seua única asímptota, i representació gràfica.

89 Donada la funció $f(x) = e^{x^2} + e^{2-x^2}$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement de f.
(B) Màxims i mínims relatius de f, i punts on s'assoleixen.
(C) Raona si esta funció té màxim o mínim absolut en tot el seu domini.

90 Donada la funció $f(x) = \sin x + \cos x$ definida en l'interval $[0, 2\pi]$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement de f.
(B) Màxims i mínims relatius de f, i punts on s'assoleixen.
(C) Valors màxim i mínim absolut en l'interval $[0, 2\pi]$.

91 Donada la funció F(x) = $\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si } x<0 \\ x^2-4x+3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat.
(B) Obtén la seua funció derivada.
(C) Obtén els extrems absoluts de f en l'interval [–3, 3].

92 Donada la funció f(x) = $\begin{cases} x^3-3x^2+1 & \text{si } x<1 \\ -x^2+4x-4 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, es demana:

(A) Estudia la derivabilitat de f, i obtén la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement de f, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén els intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(D) Fes la representació gràfica.

93 Donada la funció $f(x) = x^2 - |x|$, es demana:

(A) Expressa esta funció com una funció definida a trossos, estudia la seua continuïtat i derivabilitat, i expressa la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Fes la seua representació gràfica.

94 Obtén el major i el menor valor de la funció f(x) = sinx cosx en l'interval [0, π], i els valors de x on s'assoleixen aquests valors màxim i mínim.

95 Obtén la condició necessària perquè la funció $f(x) = x^3 + mx + n$ siga sempre creixent.

96 Demostra que tota funció polinòmica de grau 3, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$, té un punt d'inflexió.

97 Donada la funció polinòmica de grau 3, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$, es demana:
(A) Obtén una expressió per a obtenir els punts singulars de f.
(B) Obtén la condició que han de verificar a, b i c perquè f tinga dos extrems relatius.
(C) Obtén la condició que han de verificar a, b i c perquè f no tinga cap extrem relatiu.
(D) Comprova que si f té un únic punt singular, és d'inflexió.

98 Volem construir dues habitacions rectangulars iguals de 27 m^2 cadascuna, que comparteixen una paret comuna. Obtén les dimensions d'una d'aquestes habitacions si volem que el perímetre total de les parets siga mínim.

99 Obtén les dimensions del rectangle de major perímetre que es pot inscriure en una circumferència de radi R.

100 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea, i el valor d'aquesta màxima àrea, entre tots els rectangles que tenen les diagonals de 10 metres de longitud.

101 Obtén les dimensions del rectangle amb 1 m^2 d'àrea que tinga diagonal mínima i el valor d'aquesta diagonal.

102 Obtén la base i l'altura del rectangle de major àrea que podem inscriure en una semicircumferència de 1 metre de radi, que tinga la seua base sobre el diàmetre de la semi-circumferència, i el valor d'aquesta màxima àrea.

103 De tots els triangles isòsceles que tenen els seus costats iguals de 10 cm de longitud, obtén les dimensions (base i altura) del que té la major àrea possible, i el valor d'aquesta màxima àrea.

104 Un full de paper ha de contenir un àrea de 200 cm^2 reservada per a text. Si els marges superior i inferior són de 2 cm i els laterals d'1 cm, quines dimensions ha de tenir el full per a utilitzar la menor quantitat de paper possible?

105 Calcula el radi r de la base i l'altura h d'un cilindre inscrit en un con de revolució de radi de la base R = 3 cm i altura H = 9 cm perquè el seu volum siga màxim.

106 Una piscina en forma de paral·lelepípede rectangular de base quadrada té una àrea de 192 m^2. Troba les longituds de les seues arestes perquè el volum d'aigua continguda siga màxim.

107 Un pentàgon amb un perímetre de 30 cm es construeix adjuntant un triangle equilàter al costat d'un rectangle. Obtén les dimensions del dos polígons per a que l'àrea del pentàgon siga màxima.

108 Considera un octàedre regular d'aresta 1 metre. Troba les dimensions del cilindre inscrit de volum màxim que tinga el seu eix sobre la diagonal de l'octàedre.

109 Troba les dimensions del rectangle d'àrea màxima que té dos dels vèrtexs sobre la paràbola d'equació $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs sobre l'eix OX.

110 Considerem la paràbola d'equació $y = 12 - x^2$. Obtén

(A) Per a qualsevol $a > 0$, l'equació de la recta tangent a la paràbola en $x = a$.

(B) Valor de $a > 0$ per al qual l'àrea del triangle que forma la recta tangent anterior amb els eixos de coordenades siga mínima, i troba valor d'aquesta mínima àrea.

111 Volem cercar una parcel·la rectangular de 2400 m^2 d'àrea. El costat de la parcel·la que limita amb la carretera es farà amb material de qualitat, que resulta a 30 € el metre de longitud, mentre que els altres tres costats es faran amb material d'inferior qualitat, que resulta a 15 € el metre. Obtén les longituds dels costats de la parcel·la perquè les despeses en la tanca siguen mínimes, i el valor d'aquestes mínimes despeses.

112 Volem construir 5 parcel·les rectangulars iguals adossades, que tenen un costat comú, cadascuna amb un àrea de 1200 m^2. Si els murs exteriors de cada parcel·la costen a 90 € el metre, i els murs interiors costen a 30 € el metre, obtén les dimensions de cada parcel·la perquè el cost total de construcció dels murs siga mínim, i troba el valor d'aquest mínim cost.

113 Volem construir 4 parcel·les rectangulars iguals adossades que comparteixen un costat comú, Els murs del perímetre exterior costen a 60 € el metre, i els murs dels costats comuns de les parcel·les costen a 10 € el metre. Obtén les dimensions de cada parcel·la si volem que l'àrea total siga màxima, i el valor d'aquesta màxima àrea, si volem gastar-se un total de 24000 € en la construcció de tots els murs.

114 Tenim una parcel·la en forma de triangle equilàter de 100 metres de costat, i volem inscriure la parcel·la rectangular de major àrea possible, que tinga la base sobre la base del triangle. Obtén les dimensions d'aquesta parcel·la, i el valor de la màxima àrea.

115 Tenim una parcel·la en forma de semicercle de 20 metres de diàmetre, i volem inscriure una parcel·la en forma de rectangle, amb dos vèrtexs sobre la semicircumferència i els altres dos sobre el diàmetre. El material del costat que va sobre el diàmetre costa a 20€/m, i els altres tres costats costen a 10€/m. Obtén les dimensions del rectangle de major cost, i el valor d'aquest màxim cost.

116 El cost total de producció, en euros, de x litres d'un producte ve donat per la funció

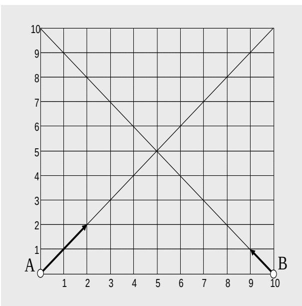
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 800,\ 0 \le x \le 100.$$

(A) Defineix la funció que determina el cost mitjà per litre produït.

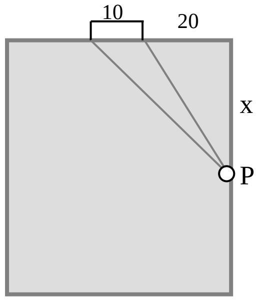
(B) Obtén el nombre de litres que cal produir perquè el cost mitjà de producció siga mínim, i troba el valor d'aquest mínim cost.

117 Volem construir 4 zones enjardinades semicirculars adossades a cada costat d'un rectangle de 400 m^2 d'àrea. Obtén les dimensions del rectangle perquè l'àrea total de les zones enjardinades siga mínima, i troba el valor d'aquesta mínima àrea.

118 Dos mòbils A i B es desplacen seguint les trajectòries de la figura. Si la velocitat amb que es desplaça A és doble que la de B, obtén la menor distància a que es trobaran els dos mòbils.



119 Un edifici de 20 m d'alçada té damunt d'ell una antena rectilínia de 5 m d'altura. Ens situem a una distància x de la base de l'edifici, i anomenem α a l'angle amb què es veu l'antena des d'eixa distància.
(A) Expressa α en funció de x.
(B) Obtén el valor de x per al qual l'antena es veu amb el major angle possible, i troba el valor d'aquest angle.



120 En un camp de futbol situem el baló en un punt P situat sobre la banda dreta, a una distància x del banderí de córner (mira la figura). La longitud de la porteria és de 10 m, i la distància del córner a la porteria, de 20 m. Anomenem α a l'angle amb què es veu la porteria des del punt P.
(A) Expressa α en funció de x.
(B) Obtén el valor de x per al qual la porteria es veu amb el major angle possible, i troba el valor d'aquest angle.

121 En una plaça horitzontal hi ha un edifici de 15 metres d'alçada que té 5 plantes de la mateixa alçada. Calcula la distància de l'edifici a la qual ens hem de situar per a veure l'última planta amb el major angle possible, i el valor d'aquest màxim angle.

122 La següent funció ens proporciona la velocitat, en km/h, d'un mòbil durant les seues 6 hores de recorregut:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x, \text{ per a } 0 \le x \le 6 \text{ (x en hores).}$$

(A) Obtén els intervals de temps on el mòbil incrementa la seua velocitat, i on la disminueix.
(B) Obtén la major velocitat que assoleix el mòbil, i els instants de temps on l'assoleix.

123 Un ciclista realitza una prova durant 5 hores. La funció que indica la distància recorreguda (en km) depenent del temps (en hores) ve donada per $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$. Calcula:
(A) El màxim absolut de la funció. Et pareix lògic el resultat?
(B) Els punts d'inflexió de la funció.
(C) Els intervals de concavitat i convexitat.
(D) Quin és el màxim de la funció velocitat?
(E) Quina relació existeix entre els instants en què s'assoleix la inflexió i el màxim de la velocitat? Sempre passarà el mateix?

124 Sabem que la velocitat d'un mòbil als 10 minuts de començar un trajecte era de 250 km/h, i als 30 minuts era de 450 km/h, la qual va ser la màxima velocitat assolida al llarg del trajecte.
(A) Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa la velocitat en funció del temps transcorregut.
(B) Quina va ser la duració total del trajecte?

125 Una màquina no pot produir més de 100 kg de sacarina, en un determinat període de temps. La funció de costs totals (euros) és $C(x) = 0.2x^2 + 30x + 1000$, on x representa els kg produïts. Un bon client de l'empresa paga un preu, en funció de la quantitat comprada, que ve donat per la funció $p(x) = 100 - 0.2x$. Calcula quina quantitat x de kg de sacarina convé fabricar i vendre al client per a maximitzar el benefici.

126 El cost total de fabricació en € de x unitats d'un article ve donat per la funció $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.
(A) Obtén la funció g(x) que representa el ***cost de fabricació unitari***, i el cost unitari quan es fabriquen 25 unitats, i quan s'en fabriquen 100.
(B) Obtén el nombre d'unitats que cal fabricar perquè el cost unitari siga mínim, i el valor d'aquest mínim cost.

127 Donada la funció $f(x) = \operatorname{arctg} x$, es demana:
(A) Punts on la gràfica d'aquesta funció té pendent 1/2.
(B) Quin és el valor del major pendent que té aquesta corba?

128 Donada la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, es demana:
(A) Punts de la gràfica de f on la recta tangent és paral·lela a la recta r: $4x - 5y = 0$.
(B) Punt de la gràfica de f on la recta tangent té pendent màxima, i valor d'aquesta màxima pendent.

129 Volem construir una tenda de campanya en forma de piràmide de base quadrada, que tinga un volum de 36 m^3, col·locant un pal vertical en el centre de la base, i unint l'extrem superior del pal amb els 4 vèrtexs de la base per mitjà de 4 filferros de la mateixa longitud. Calcula la longitud del pal i la longitud del costat de la base, perquè les despeses en filferro siguen mínimes.

130 Troba, entre totes les rectes que passen pel punt P(1, 2), aquella que forma amb les parts positives dels eixos de coordenades un triangle d'àrea mínima.

131 Obtén dos nombres positius la suma dels quals siga 20 i el seu producte siga màxim.

132 Una horta té actualment 25 arbres, que produeixen 600 fruits cadascun. Es calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits.
(A) Calcula la producció actual de l'horta.
(B) Calcula la producció total si es plantaren x arbres més.
(C) Calcula el nombre total d'arbres que ha de tenir l'horta perquè la producció siga màxima.

133 Una agència de viatges ofereix a un grup de 50 persones un viatge a 1000€ per persona. A més, per cada viatger addicional que es puga aconseguir, el preu per persona disminuirà en 10€.
(A) Expressa els ingressos totals de l'agència en funció del nombre addicional x de viatgers.
(B) Obtén el nombre total de viatgers que proporciona els majors ingressos possibles a l'agència, el valor d'aquests màxims ingressos, i el preu que pagaria cada persona.

134 Dos pals d'1 i 2 metres d'altura, respectivament, estan separats per una distància de 6 metres. Volem unir els dos pals amb un cable que vaja des de l'extrem superior d'un pal a un punt del sòl, i després fins a l'extrem superior de l'altre pal (tots tres en el mateix pla). Obtén la menor longitud que ha de tenir el cable.

135 Tenim 2 punts A i B separats per una distància de 2 metres, i entre ells, a igual distància, un pal de 5 metres d'alçada. En el pal volem elegir un punt P, i unir aquest punt amb 3 cordes que vagen als punts A, B i a l'extrem superior del pal. Calcula l'alçada a què es trobarà aquest punt P, perquè la longitud total de les cordes utilitzades siga mínima, i el valor d'aquesta mínima longitud.

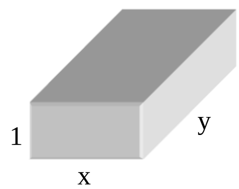
136 Un fabricant vol produir caixes amb tapa, amb una capacitat de 9 litres, de forma que el cost de material utilitzat en la seva elaboració siga mínim. Obtén les dimensions de les caixes si el fabricant vol que la base siga rectangular, amb un costat de doble longitud que l'altre. (1 litre de capacitat equival a 1000 cm^3 de volum).

137 Obtén les dimensions d'una caixa de base rectangular que siga doble llarga que ampla, de forma que la suma de les longituds de totes les seues arestes siga de 36 m, i el volum siga màxim. Obtén també el valor de aquest volum.

138 Volem construir una caixa amb una capacitat de 250 litres, sense tapa en la part superior, i de forma que la base de la caixa siga un rectangle amb doble base que altura. El material de la base de la caixa costa 3€/dm^2 i el de les parets laterals 2€/dm^2. Obtén les dimensions de la caixa de mínim cost, i el valor d'aquest mínim cost.

139 Volem construir una tenda de campanya en forma de caixa de base rectangular, amb una altura de 2 m i un volum de 32 m^3, amb unes despeses mínimes. Les parets, sòl i sostre han de ser de lona, a 10 € el m^2, i les varetes que uneixen totes les cares han de ser d'alumini, a 20 € el metre. Obtén les dimensions de la tenda i el seu mínim preu.

140 Volem construir un contenidor en forma de paral·lelepípede rectangular de 9 m^3 de volum, amb una altura d'un metre. Suposem que el cost de construcció per m^2 és de 50 euros per a la base, 70 euros per a la tapa i 40 euros per a les parets laterals. Si anomenem x i y a les dimensions de la base:
(A) Expressa el cost de construcció del contenidor en funció de x.
(B) Obtén les dimensions del contenidor més econòmic.



141 Volem construir un dipòsit de base quadrada, sense tapa, i disposem de 1500€ per al material. El preu de la base del dipòsit és de 5€/m^2, i el de les 4 parets laterals, de 10€/m^2. Obtén les dimensions del dipòsit de major volum possible, i el valor d'aquest màxim volum.

142 Volem construir un pot cilíndric amb una capacitat de 0.5 m^3, sense tapa en la part superior. El material de la base costa 1€/dm^2 i el de la paret lateral 2 €/dm^2. Obtén les dimensions (radi de la base i altura) del pot de mínim cost, i el valor aproximat d'aquest mínim cost.

143 Obtén les dimensions del rectangle amb perímetre 2p i diagonal mínima.

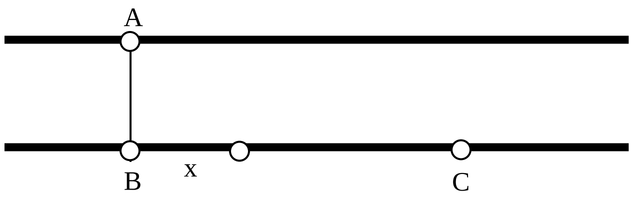
144 Un vaixell A es troba a 1000 km a l'est d'un altre vaixell B, i navega cap a l'oest a una velocitat de 20 km/h. Mentrestant, el vaixell B navega cap al nord a 10 km/h.

(A) Fes un croquis representant la situació, elegeix un sistema de coordenades còmode, i planteja una funció que represente la distància que en cada instant hi ha entre els dos vaixells.

(B) Quan es trobaran a una distància de 500 km?

(C) Troba l'instant de temps en què els dos vaixells es trobaran més prop, i el valor d'aquesta distància mínima.

145 La figura representa un canal d'aigua que té 10 km d'amplària. Un biatleta es troba en A i vol anar a C. Pot creuar el canal nedant a una velocitat mitjana de 2 km/h, i pot córrer a 6 km/h. La distància entre els punts B i C és de 24 km.



Calcula a quina distància x del punt B hauria d'aplegar nedant el biatleta per tardar el menor temps total possible en aplegar a C, i el valor d'aquest temps mínim.

146 Obtén les dimensions del triangle isòsceles de major àrea que es pot inscriure en una circumferència de radi R.

147 Volem construir una piscina rectangular de 800 m^2 de superfície, i el terreny que l'envolta cobrir-lo de gespa amb una extensió de 10 m d'amplària als costats curts de la piscina, i de 5 m d'amplària als costats llargs. Obtén las dimensions de la piscina per a les quals les despeses en gespa siguen mínimes, i el valor d'aquestes despeses, si el m^2 de gespa val 10 euros.

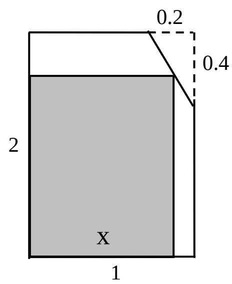
148 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en un triangle rectangle amb catets de longituds a i b.

149 L'espill d'1 metre per 2 metres de la figura se'ns trenca per un cantó. Amb el tros gran d'espill que ens queda podem tallar molts espills rectangulars distints, que tinguen un dels seus cantons sobre el costat trencat.

(A) Expressa en funció de x l'àrea del nou espill tallat. Entre quins valors varia x?

(B) Obtén les dimensions de l'espill de major àrea que podem tallar.

(C) Obtén també les dimensions de l'espill de menor àrea.



150 Dividim un filferro de 10 metres de longitud en dues parts, i anomenem x a la longitud d'una de les parts:

(A) Si amb cada part construïm un quadrat, expressa l'àrea total d'aquests en funció de x, i el valor de x per al qual la suma de les àrees és mínima.

(B) Si amb una part construïm un quadrat i amb l'altra un cercle, expressa l'àrea total en funció de x, i el valor de x per al qual la suma de les àrees és mínima.

151 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en l'el·lipse d'equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

152 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en un semicercle de radi R.

153 Troba les dimensions d'un triangle rectangle de perímetre mínim que tinga inscrita una circumferència de radi 1. Observa que els radis determinats pels punts de tangència divideixen el triangle en tres quadrilàters (un d'ells quadrat).

154 Volem construir una parcel·la en forma de triangle isòsceles amb un perímetre de 12 metres, i adossar a cada costat del triangle un quadrat amb els costats de la mateixa longitud que el costat del triangle al qual s'adossa. Obtén les longituds dels costats del triangle per als quals la suma de les àrees dels quadrats adossats és mínima, i el valor d'aquesta mínima suma d'àrees.

155 Volem construir una finestra en forma d'estrella de 4 puntes, adossant a cada costat d'un rectangle de 4 m^2 d'àrea un triangle equilàter. Obtén les dimensions del rectangle de forma que l'àrea total de la finestra siga mínima.

156 Volem construir un aparcament cobert en forma de paral·lelepípede amb una altura fixa de 2 m, i base rectangular, que tinga una àrea de 70 m^2. El material per a la base costa a 20€/m^2, per al sostre a 50€/m^2, i per a les parets a 30€/m^2. L'aparcament per davant (aresta base x) no tindrà paret. Les arestes del paral·lelepípede seran de ferro, a 20€/m. Obtén les dimensions de l'aparcament rectangular de mínim cost, i el valor d'aquest mínim cost.

157 Obtén el punt P(x, y) de la paràbola $y = x^2$ que es troba a menor distància del punt A(3, 0), i el valor d'aquesta mínima distància.

158 Considerem l'arc de paràbola $y = 1 - x^2$, amb $-1 \le x \le 1$. Obtén els punts d'aquest arc que es troben a menor i a major distància de l'origen de coordenades, i el valor d'aquestes distàncies.

159 Obtén els punts de la paràbola $y = 4 - x^2$ que es troben a menor distància de A(0, −1), i el valor d'aquesta mínima distància.

160 Obtén els punts P(x, y) de l'arc de paràbola $y = \dfrac{x^2 - 2}{2}$ amb $-2 \le x \le 2$, que es troben a menor i a major distància del punt M(0, 1), i el valor d'aquesta mínima i màxima distància.

161 Considera la branca de la hipèrbola d'equació $xy = 1$, i siga $a > 0$.
(A) Obtén els punts de tall A i B de la recta tangent a la hipèrbola en $x = a$ amb els eixos de coordenades.
(B) Obtén la distància entre els punts de tall A i B, en funció de a.
(C) Obtén el valor de a per al qual la distància entre els punts de tall A i B és mínima, i el valor d'aquesta mínima distància.

162 Obtén el punt P(x, y), amb x entre 0 i 1, de la paràbola d'equació $y = 1 - x^2$, per al qual l'àrea del triangle rectangle inscrit que té per hipotenusa el segment d'extrems P(x, y) i Q(−1, 0) és màxima, i el valor d'aquesta màxima àrea.

163 Considerem el segment de la recta d'equació $x + y = 4$, situada en el primer quadrant, i un punt P(x, y) d'aquest segment. Construïm el segment AB, on A i B són les projeccions de P sobre els eixos de coordenades. Obtén la menor longitud que pot tindre el segment AB.

164 Siga r una recta que passe pel punt P(1, 3) amb pendent negativa. Construïm un triangle rectangle que té com a vèrtexs l'origen de coordenades O i els punts de tall A i B de la recta r amb els eixos de coordenades. Obtén la mínima àrea que pot tindre el triangle OAB, les coordenades dels punts A i B, i l'equació de la recta r per als quals hem assolit l'àrea mínima.

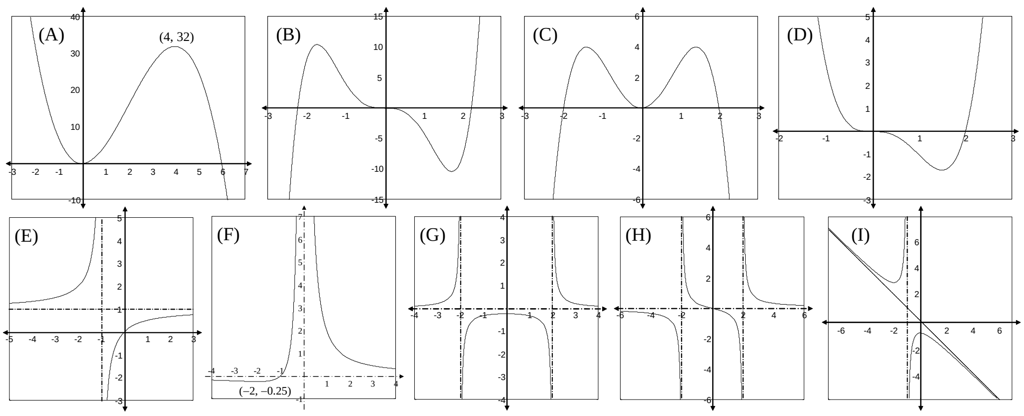
Solucions de les activitats del capítol 3

1. f no verifica les hipòtesis en [0.5, 4]: f(0.5) = 1/16 ≠ f(4) = 4, ni la tesi: $f'(x) = 0.5x^2 \neq 0$ en]0.5, 4[; f no verifica la hipòtesi en [–1, 4]: f(–1) = 1/4 ≠ f(4) = 4, però sí verifica la tesi: 0∈]–1, 4[i f'(0) = 0. **2.** a = –4; f'(–3/2) = 0. **4.** (A)]–1, 0[,]0, 4[i]4, 7[. (B) Una solució en]0, π/2[. (C)]–2, –1[,]–1, 2[,]2, 4[. **5.** (A) Sí; $x = 2(\sqrt{3}-1)$. (B) Sí; x = 0, x = 2. **6.** (A) 2/3. (B) –1. (C) 0. (D) +∞. (E) –1/3. (F) 2/3. (G) 1/3. (H) 1/2. (I) 0. (J) 1/2. **7.** (A) e. (B) –1/2. (C) 0. (D) 0. (E) 1. (F) 1. (G) 1. (H) 1/e. (I) 0. (J) 3/11. (K) 0. (L) 3/2. **8.** En el primer límit és correcte aplicar L'Hôpital (indeterminació 0/0), no en el segon que dona 0/2 = 0 i no s'aplica L'Hôpital. **9.** (A) a = 0; AH: y = 2 (bilateral). (B) a = 2; AH: y = 0 (bilateral). **10.** (A) m = n = 1/2. (B) g és contínua en x = 1, discontínua en x = 0. **11.** (A) Creix en x = 1 i 2, decreix en x = –1, res podem afirmar de moment en x = 0. (B) Sempre creix encara que en x = 0 no podem afirmar-ho de moment. (C) Creix en x = 1 i 2, decreix en x = –1, ni creix ni decreix en x = 0 encara que no ho podem afirmar de moment. (D) Sempre creix encara que en x = 0 no podem afirmar-ho de moment. (E) Decreix en x = –1, 0 i 1, ni creix ni decreix en x = 2 encara que no ho podem afirmar de moment. **12.** Únic punt singular és x = 1 (f no derivable en ell); com que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ (si x ≠ 1), aleshores f és decreixent en] –∞, 0[∪]1, +∞[. **13.** (A) Decreix en]–∞, 1[i creix en]1, +∞[; mínim relatiu en x = 1. (B) Decreix en] –∞, –2[∪]0, 2[i creix en]–2, 0[∪]2, +∞[; mínim relatiu en x = ±2, màxim relatiu en x = 0. (C) Decreix en] –∞, 0[∪]2, 4[i creix en]0, 2[∪]4, +∞[; mínim relatiu en x = 0 i 4, màxim relatiu en x = 2. (D) Decreix en] –∞, –1[∪]0, 1[i creix en]–1, 0[∪]1, +∞[; mínim relatiu en x = ±1, màxim relatiu en x = 0. (E) Decreix en]–∞, ln2[i creix en]ln2, +∞[; mínim relatiu en x = ln2. (F) Creix en]–∞, 1[i decreix en]1, +∞[; màxim relatiu en x = 1. (G) Creix en]0, e[i decreix en]e, +∞[; màxim relatiu en x = e. (H) Decreix en]–∞, –1[∪]1, +∞[i creix en]–1, 1[; mínim relatiu en x = –1, màxim relatiu en x = 1. (I) Creix en]–∞, 0[∪]2, +∞[i decreix en]0, 1[∪]1, 2[; màxim relatiu en x = 0, mínim relatiu en x = 2. (J) Creix en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{3},-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,\sqrt{3}\right[$; màxim relatiu en $x = -\sqrt{3}$, mínim relatiu en $x = \sqrt{3}$. (K) Creix en]–∞, –1[∪]0, 1[i decreix en]–1, 0[∪]1, +∞[; màxim relatiu en x = ±1, mínim relatiu en x = 0. (L) Creix en]0, 2[∪]4, 5[∪]5, 6[i decreix en]2, 4[; mínim relatiu en x = 4, màxim relatiu en x = 5 i 6. **14.** (A) Creix en]–∞, –1[∪]1, +∞[i decreix en]–1, 1[; màxim relatiu en (–1, 2), mínim relatiu en (1, –2). (B) Decreix en]–∞, –1[∪]0, 1[i creix en]–1, 0[∪]1, +∞[; mínim relatiu en (–1, 0) i (1, 0), màxim relatiu en (0, 1). (C) Decreix en]–∞, 3/2[i creix en]3/2, +∞[; mínim relatiu en (3/2, –27/16). (D) Creix en [0, π/4[∪]3π/4, 5π/4[∪]7π/4, 2π] i decreix en]π/4, 3π/4[∪]5π/4, 7π/4[; mínim relatiu en (0, 0), (3π/4, –1) i (7π/4, –1), màxim relatiu en (π/4, 1), (5π/4, 1) i (2π, 0). (E) Decreix en]–∞, –2[i creix en]–2, +∞[; mínim relatiu en (–2, –25). (F) Creix en]–∞, –2[∪]0, +∞[i decreix en]–2, 0[; màxim relatiu en $(-2, 4e^{-2})$, mínim relatiu en (0, 0). (G) Decreix en $]0, e^{-1/2}[$ i creix en $]e^{-1/2}, +\infty[$; mínim relatiu en $(e^{-1/2}, -1/(2e))$. (H) Creix en [0, π/2[∪]π, 3π/2[i decreix en]π/2, π[∪ ∪]3π/2, 2π[; mínim relatiu en (0, 0), (π, 0) i (2π, 0), màxim relatiu en (π/2, 1) i (3π/2, 1). **15.** a = –4, b = 6.

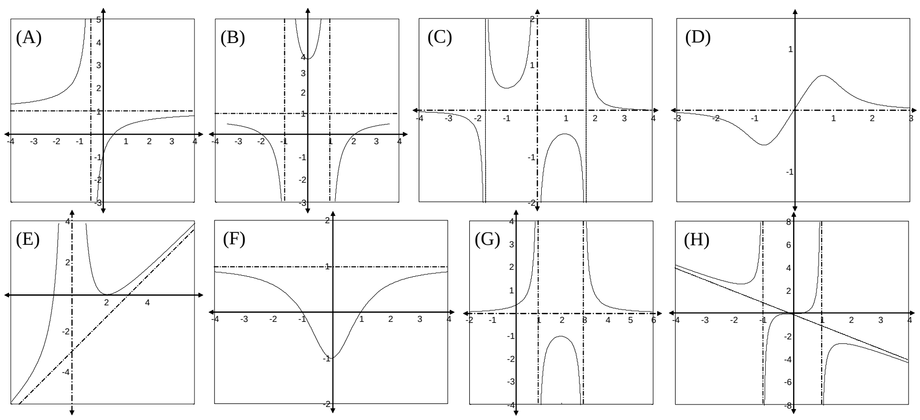
16. (A) En [0, 5]: M = f(0) = 0, m = f(4) = –32; en ℝ no hi ha ni màxim ni mínim absolut. (B) En [0, 5]: m = f(0) = 0, M = f(4) = 32; en ℝ: m = f(0) = f(6) = 0, no hi ha màxim absolut. (C) m = f(π) = –1, M = f(0) = f(2π) = 1. (D) M = f(2) = 13, no hi ha mínim absolut. (E) m = f(0) = f(8) = 0, M = f(4) = 4. (F) $m = f\left(-\sqrt{2}\right) = -2$, $M = f\left(\sqrt{2}\right) = 2$. **17.** (A) En [0, 5]: m = f(2) = –7, M = f(5) = 434; en]–2, 2[: M = f(0) = 9 i no hi ha mínim absolut. (B) En [–1, 5]: m = f(5) = 0, M = f(3) = 5; en [2, 4[: M = f(3) = 5 i no hi ha mínim absolut. **18.** Base = altura = 5 m. **19.** Base = altura = 25 m. **20.** Triangle equilàter de costat 40 cm.

21. Base = altura = $\sqrt{2}$ m; àrea = 2 m^2. **22.** Radi de la base = $\sqrt{6}$ cm, altura = $2\sqrt{3}$ cm, volum = $12\pi\sqrt{3}$ cm^3. **23.** Cara quadrada de costat $10\sqrt{2}$ cm; superfície: $400+200\sqrt{2}$ cm^2. **24.** (A) Còncava en tots. (B) Còncava en x = 1 y en x = 2, convexa en x = –1, PI en x = 0. (C) Còncava en x = 2, convex en x = 0 y en x = –1, PI en x = 1. (D) Convexa en tots. (E) Convexa en x = 1, còncava en –1. **25.** (A) Còncava en ℝ. (B) Convexa en]+∞, 0[i còncava en]0, +∞[; PI en x = 0. (C) Còncava en]–∞, –1[∪]1, +∞[i convexa en]–1, 1[; PI en x = ±1. (D) Còncava en]–∞, 0[i convexa en]0, +∞[. (E) Còncava en $\left]-\infty,-1/\sqrt{3}\right[\cup \left]1/\sqrt{3},+\infty\right[$ i convexa en $\left]-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right[$; PI en x = $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (F) Còncava en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$ i convexa en $\left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; PI en x = 0, $\pm\sqrt{3}$. (G) Còncava en]–∞, 0[i convexa en]0, +∞[. (H) Convexa en]–∞, –1[∪]0, 1[i còncava en]–1, 0[∪]1, +∞[; PI(0, 0). (I) Convexa en $\left]2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right[$, còncava en els altres; PI en x = $2\pm\sqrt{2}$. (J) Convexa en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$ i còncava en $\left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; PI en x = 0, $\pm\sqrt{3}$. (K) Convexa en]–∞, 2[i còncava en]2, +∞[, PI en x = 2. (L) Convexa en]–∞, 0[i còncava en]0, +∞[. (M) Convexa en]–∞, e$^{3/2}$[i còncava en]e$^{3/2}$, +∞[: PI en x = e$^{3/2}$. (N) Còncava en [–π, 0[∪]π, 2π[i convexa en]0, π[∪]2π, 3π[; PI en x = 0, π i 2π. (Ñ) Igual que l'anterior. (O) Convexa en [0, π/4[∪]3π/4, 5π/4[∪]7π/4, 2π] i còncava en]π/4, 3π/4[∪]5π/4, 7π/4[; PI en x = π/4, 3π/4, 5π/4 i 7π/4. (P) Convexa en]0, 2[i còncava en]2, 5[∪]5, 6[. (Q) Convexa en]0, π/2[i còncava en]π/2, 3π/2[∪]3π/2, 2π[. **26.** (A) PI(1, –9). (B) PI(0, 0), PI$\left(\sqrt{3},-21\sqrt{3}\right)$, PI$\left(-\sqrt{3},21\sqrt{3}\right)$. (C) PI(6, –5184). (D) PI(2, –14). **31.** m = –3, n = 4. **32.** A = –3, b = 2, c = 2. **33.** PI(0, 0). **34.** $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **35.** A les 10 hores. A les 6 hores és més eficient, el ritme de càrrega (derivada) és màxim. Sí, a partir de t = 6 entrega amb menor ritme.

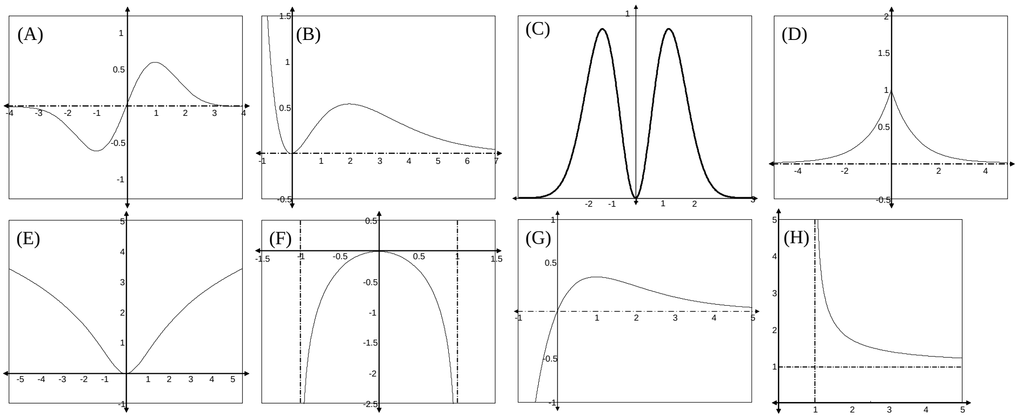
36.



37.



38.



Solucions dels problemes del capítol 3

1. f creix en –2, decreix en 2 i 4; g i h decreix en –2, 2 i 4; t creix en –2, 2 i 4. **2.** (A) f creix en]1, +∞[i decreix en]–∞, 1[; g creix en]0, +∞[; h creix en ℝ; t creix en]–1,+∞[. (B) f decreix en]–1, 0[∪]0, e – 1[i creix en]e –1, +∞[; g decreix en]–∞, –1[i creix en]–1, +∞[; h decreix en]–∞, –1[i creix en]1, +∞[; t decreix en]–∞, 0[~{–1} i creix en]0, +∞[~{1}. **3.** La velocitat augmenta en [0, 8] i l'acceleració disminueix en [0, 8].

4.

(A)	f	g	h	t	(B)	f	g	h	t
Mín.	(1,0)	(–1,0)	(1,1/3)	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$		No	(a, $\sqrt{2}$)	(0,0)	No
Màx.	(–1,4)	(1,4)	(–1,3)	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		(–3,–27/4)	No	$\left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3},h\left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}\right)\right)$	$\left(1,\frac{1}{3}\right)$

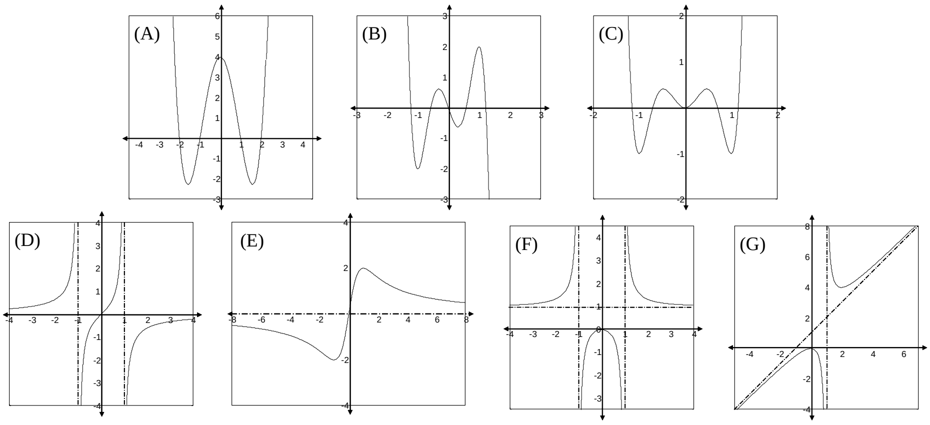
(C)	f	g	h	t	(D)	f	g	h	t
Mín.	$\left(-e,\frac{-1}{e}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{12}+k\pi, g\right)$	No	No		(3, –27)	$(2,e^2)$	(0,1)	(± $\sqrt{3/2}$,–1/4)
Màx.	$\left(e,\frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{\pi}{12}+k\pi, g\right)$	(0,1)	No		No	No	No	(0,2)

(E)	f	g	h	t	(F)	f	g	h
Mín.	No	No	(–4,0)	(kπ,0)		No	$\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi, g\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, h\right)$
Màx.	$\left(1,\frac{1}{e}\right);\left(-1,\frac{1}{e}\right)$	$(3,27e^{-3})$	No	(π/2+kπ,1)		No	$\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, g\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, h\right)$

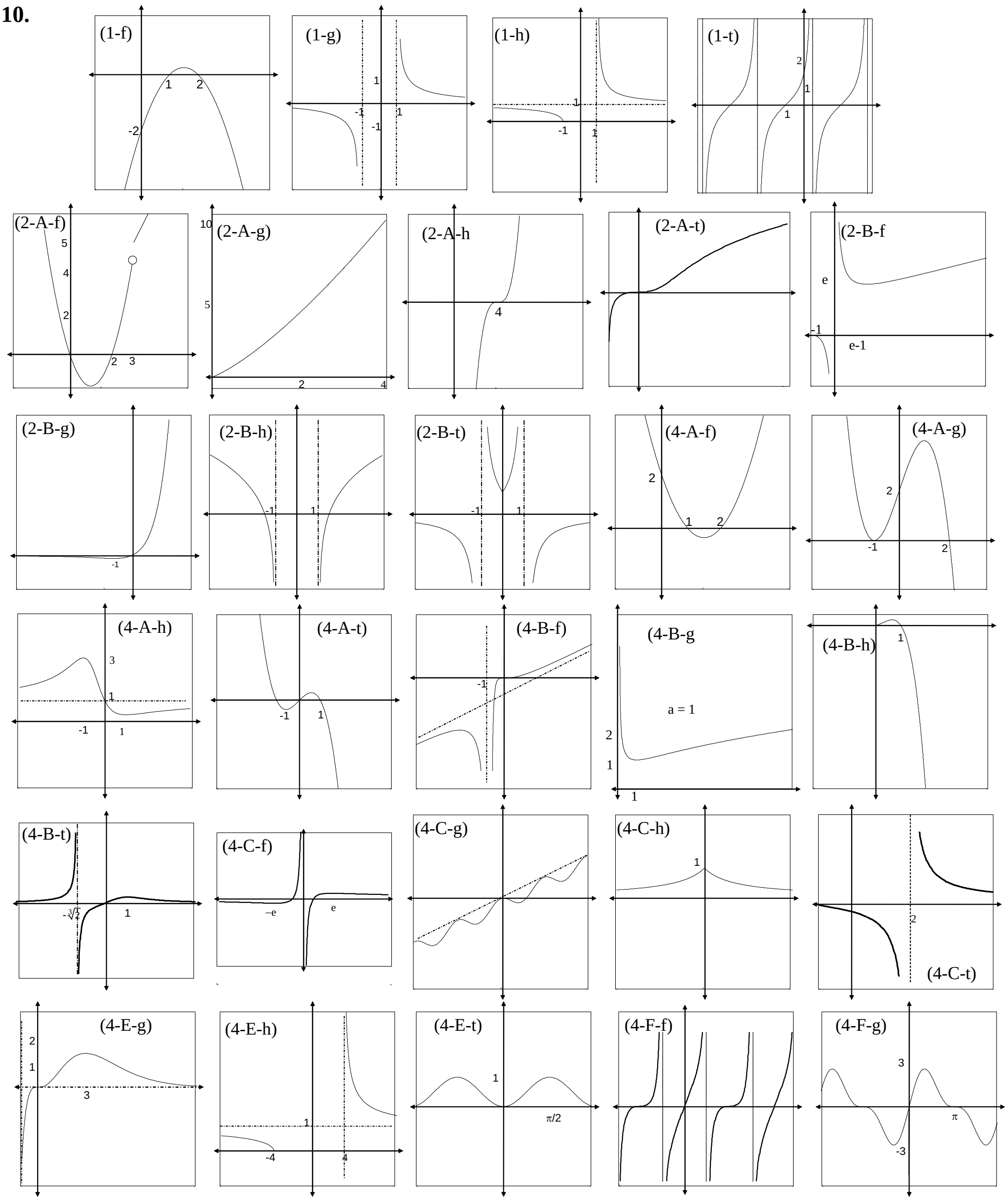
5. (A) f té màxim relatiu en $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$; h té mínim relatiu en (–1,0); g i t no en tenen. (B) f té mínim relatiu en $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$; g té mínim relatiu en (0,0); p té mínim relatiu en (e – 1, e); q té mínim relatiu en $(-1, -e^{-2})$; s té mínim relatiu en (0,1); h, t i r no en tenen. **6.** (A) f convexa en]–∞, 0[, còncava en]0, 1[∪]1, +∞[, PI en 0; g convexa en $\left]-\infty,-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]0,\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right[$, còncava en els altres, PI en x = $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$; h còncava en $\left]-\infty,-2-\sqrt{3}\right[\cup$ $\cup\left]-2+\sqrt{3},1\right[$, convexa en els altres, PI en x = 1, $-2\pm\sqrt{3}$; t còncava en]–∞, –2[, convexa en els altres, sense PI; p còncava en]–∞, 2[, convexa en els altres, PI en 2. (B) f convexa en]–∞, 3[, còncava en els altres, sense PI; g còncava en]–∞, –1[, convexa en els altres, PI en –1; h còncava en ℝ; t convexa en]–∞, 2[∪]3, +∞[.

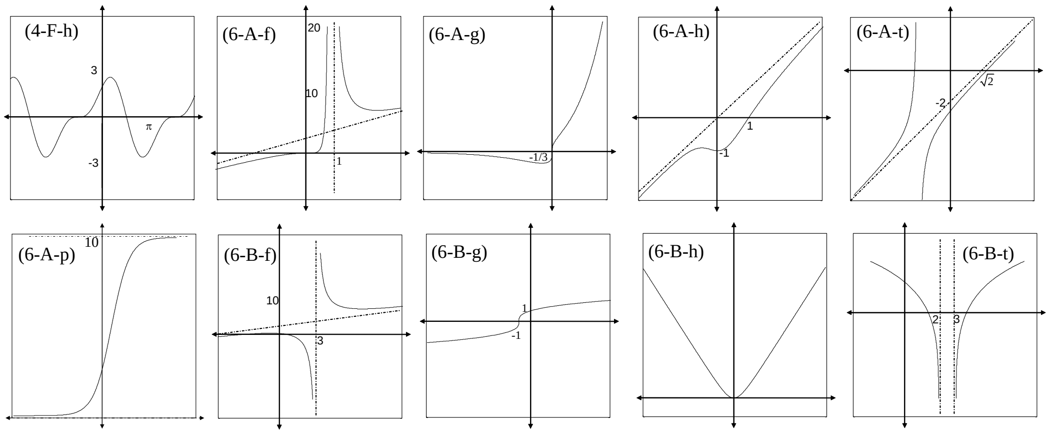
7. Si n = 1, recta creixent i no té extrems ni inflexions; si n ≠ 1 és imparell, f creix en $\mathbb{R}$, convexa en $]-\infty, 0[$ i còncava en $]0, +\infty[$, PI en x = 0; si n parell, f còncava en $\mathbb{R}$, decreix en $]-\infty, 0[$, creix en $]0, +\infty[$, mínim relatiu en x = 0. **8.** (A) f té $M\left(-\frac{4}{3}, \frac{203}{27}\right)$ i m(2, –11); g té $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{32}{15}\right)$ i $m\left(1, \frac{1}{3}\right)$. (B) f té m(–1, –28) i no té M; g té M(0, 9) i m(–3, –72).

9.

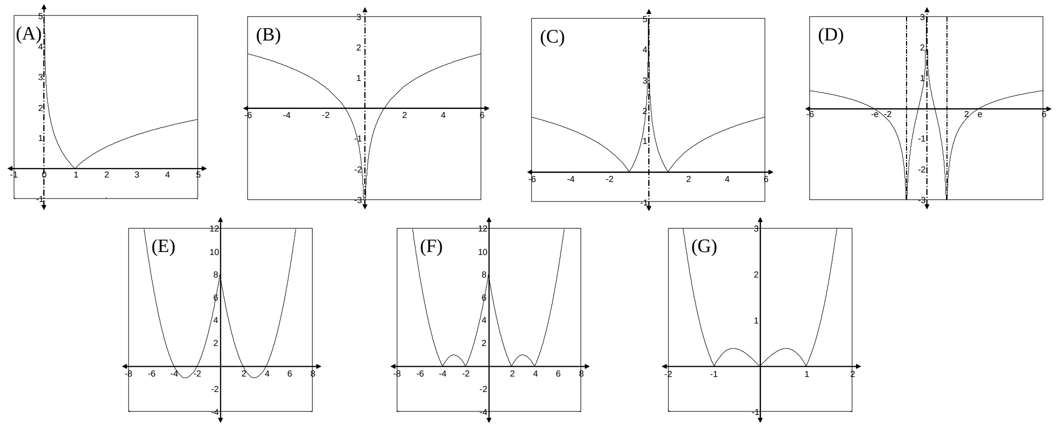


10.

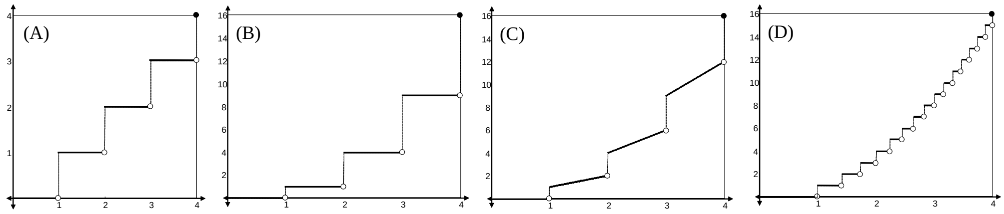




11.



12.



13. En t = 2, l'acceleració es nul·la, v'(2) = 0; $VMv_{[0,\,2]} = 2$, $VMv_{[2,\,4]} = -2$ i $VMv_{[0,\,4]} = 0$; en [0, 2] el moviment és accelerat, en [2, 4] és desaccelerat i en [0, 4] l'acceleració mitjana és 0. **14.** Només f verifica les hipòtesis, per a x = 3/2, perquè g i h són discontinues en x = –1. **15.** P(2, 4). **16.** (A) Sí, x = $\sqrt{3}/3$. (B) No, discontínua en x = $\pi/2$. (C) No perquè $\ln 1 \neq \ln e$. **17.** (A) No té solucions. (B) Una solució en]–4, –3[i una altra en]0, 1[. (C) Una solució en]–5,–4[. (D) Una solució en]0, 1[. (E) Una solució en]–1, 0[. (F) Una solució en]–1, 0[i una altra en]1, 2[.
18. (A) a = –3, b = 5, c = 4. (B) a = –16/5, b = 36/5, c = 1/5. **19.** Per a $a\in[0, 2\pi]$, $\exists x_0\in]0, a[$ tal que $\dfrac{\sin a - \sin 0}{a-0} = \cos x_0 \le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin a}{a} \le 1 \;\Rightarrow\;$ $\sin a \le a$, $\forall a\in[0, 2\pi]$. **20.** No. **21.** No, perquè f no és derivable en $\sqrt{5} \in]1, 3[$.
23. (A) Siga $f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$. Com que f(–a) = f(a), si a és arrel, f(a) = 0 $\rightarrow$ f(–a) = 0 $\rightarrow$ –a també és arrel. (B) f és contínua en $[0, \pi]$ i f(0) > 0 i $f(\pi) < 0$ $\rightarrow$ (Bolzano) $\exists x_0\in]0, \pi[$ tal que $f(x_0) = 0$. (C) Com que f és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, si f té tres arrels, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, aleshores per Rolle, f ' tindria dues arrels, però f '(x) = 0 només té una arrel: x = 0. **24.** Si f és una funció polinòmica, aleshores és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, i li podem aplicar el Teorema de Rolle. Si f té 4 arrels distintes, les ordenem, i per Rolle, entre cada dues arrels consecutives hi ha una arrel de f'. Per tant, f' té 3 arrels distintes (no en té més, perquè f' és polinòmica de grau 3). Repetint aquest raonament per a f', que també és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, obtenim que f'' té dues arrels distintes. **25.** (A)]–1, 0[,]0, 2[,]2, 3[. (B)]0, 1[,]1, 2[. (C)]–3, –2[,]–2, 0[,]0, 1[,]1, 2[. **26.** m = 10, n = –25. **27.** a = –3, b = 3, c = 1.
28. $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + (1+2a)x$, $a \neq 0$. **29.** a = c = 1/2, b = –3.

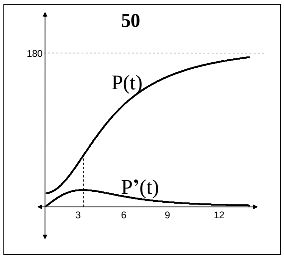
30. $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$. **31.** a = c = 1, b = –1. **32.** a = 9/2, b = –1, c = 1/2. **33.** a = 3, b = –1. **34.** a = –1, b = 2. **35.** a = –2, b = 5, c = –2. **36.** a = c = –2, b = 3. **37.** a = 1, b = –2, c = 3. **38.** a = 1, b = –2, c = 2. **39.** a = –2, b = 0, c = 0, d = 2. **40.** a = –1, b = 4, c = 0. **41.** y + 2 = –3(x – 1). **42.** P(1, 4) i Q(–2, –2). **43.** (A) 3/4. (B) 1/2. (C) 2. (D) 1/3. (E) 1. (F) 1. (G) 1. (H) 4. (I) 1. (J) 1. (K) +∞. (L) 0. (M) 0. (N) 1. (Ñ) 1. (O) –1/3. (P) 1. (Q) 1/e. (R) 1. **44.** (A) –1/3. (B) 2. **45.** y = 2 (bilateral). **46.** Discontinuïtat evitable en x = 0 i de 2n espècie en x = π/2. **47.** Discontinuïtat evitable en x = 2. **48.** (A) $\mathbb{R} \sim \{\pi/2, \pi\}$. (B) Evitable en x = π/2, de salt 6 en x = π. **49.** (A) –2 m/setmana i 2 m/setmana. En la primera setmana disminueix la neu acumulada i en la segona augmenta (en ambdós casos a raó de 2 m per setmana). (B) 2.25, 3 i 2.25 m/setmana respectivament. (C) En x = 3, assoleix 4 metres. (D) En x = 1 i en x = 4, que no hi ha neu. (E) En x = 2, amb 3 metres/setmana. **50.** (A) No, la funció creix sempre. (B) La taxa és màxima als $\dfrac{10}{3}$ anys i la població creix a $\dfrac{33}{4}$ = 8.25 milers d'habitants/any.

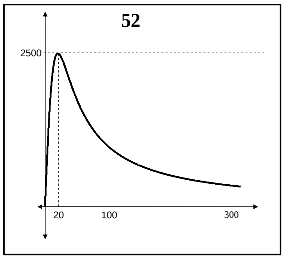
(C) AH: y = 180; la població creix aproximant-se a 180000 habitants. **51.** Produir 2 tones de baixa qualitat i 1 d'alta qualitat, amb un ingrés màxim de 40 000 €. **52.** (A) Creix en [0, 20[i decreix en $]20,+\infty[$. (B) El benefici de tindre el producte al mercat augmenta els primers 20 anys, després disminueix. (C) 20 mesos, 2500€.

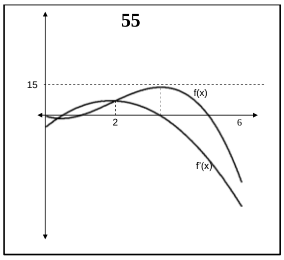
53. (A) 11.4 mcg/(m^3 · any). (B) C'(8) = 5.4 mcg/(m^3 · any). (C) Com que C''(x) = –1.2, la variació del ritme és constant. **54.** (A) 80 €. (B) –25 €/any (ha perdut de mitjana 25 € de valor cada any). (C) 8 €/any i –25 €/any.

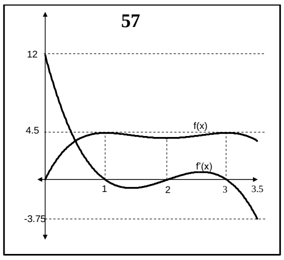
(D) Creix en [0, 2[i decreix en]2, 8]. (E) 20 €, en l'instant t = 2. (F) $P'(t) = \begin{cases} 8t & \text{sí } 0 \le t < 2 \\ \dfrac{-5}{2} & \text{sí } 2 < t \le 8 \end{cases}$. La velocitat a què canvia el preu del producte. (G) No té màxim; fins a t = 2 la segona derivada és positiva i la variació del preu augmenta, però com f no és derivable en t = 2, f' no assoleix el màxim. Després de t = 2 la segona derivada és constant i la primera és negativa. **55.** (A) f còncava en]0, 2[i convexa en]2, 6[(B) PI en x = 2. (C) En x = 2, la velocitat de variació de la marea passa de créixer a decréixer i és per tant màxima: a les 2 hores és quan més ràpidament canvia la marea. **56.** (A) f(0) = 1 Dam, f(5) = 88.5 Dam, l'altitud a què es troba el globus en eixe instant. (B) VMf[3, 5] = 37 Dam/h. (C) 90 Dam/h. (D) Menor altura: 0.5 Dam, als 60 minuts; major altura: 850 Dam, a les 10 hores. (E) La major a les 10 hores, 270 Dam/h; la menor als 30 minuts, –0.75 Dam/h.

57. (A) 0 km/min^2, no varia l'acceleració mitjana en eixe tram. (B) 0.75 km/min. (C) Augmenta en $]0,1[\cup]2,3[$ i disminueix en $]1,2[\cup]3,3.5[$. (D) 4.5 km/min, en x = 1 i en x = 3. (E) 0 km/min, en x = 0. (F) Acceleració màxima: 12 km/min^2 en x = 0; mínima –3.75 km/min^2 en x = 3.5.









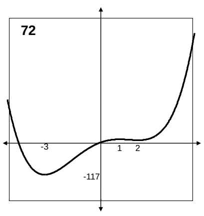
58. (A) m = n = 1/2. (B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, no en té; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, AH: y = 0. **59.** (A) a = 1. (B) AH: y = 2/3. **60.** (A) a = –1/3. (B) a = –2. (C) a = 2. (D) a = 1/2. (E) a = 2. (F) a = 3. (G) a = 1/2. **61.** (A) a = 1. (B) $f'(x) = -1/2$. **62.** a = 3/2. **63.** (A) a = 3/4. (B) $f'(x) = 0$. **64.** (A) (A) f contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{1\}$, $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 1 \\ 4(x-2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$. (B) Decreix en $]-\infty,-1[\cup]1,2[$ i creix en $]-1,1[\cup]2,+\infty[$; màxim relatiu en x = 1, valor 5; mínim relatiu en x = –1, valor: 1; mínim relatiu en x = 2, valor 3.

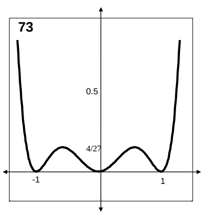
65. (A) $\mathbb{R} \sim \{\ln 1/2\}$. (B) AV: $x = \ln 1/2$; AH: $y = 0$ (esquerra); AO: $y = x - 2$ (dreta). (C) No és derivable en $x = 0$.

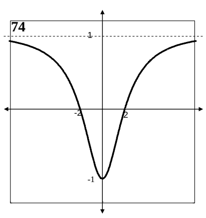
66. (A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. (B) f contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{0\}$. (C) Màxim valor $1 = f(0)$; mínim valor $1/4 = f(3)$. **67.** (A) $f'(0) = 1/2$. (B) $f'(0) = 0$. **68.** (A) $\mathbb{R} \sim \{-1, 0, \ln 3\}$. (B) AO: $y = x$ (esquerra); AH: $y = 0$ (dreta); AV: $x = \ln 3$. **69.** (A) $]-1/4, +\infty[\sim\{0\}$. (B) AH: $y = 0$ (dreta). **70.** (A) $\mathbb{R} \sim \{0\}$. (B) No, en $x = 0$ hi ha una discontinuïtat evitable. (C) Sí, $y = 1$ és AH bilateral. **71.** (A) $\mathbb{R}$. (B) AH: $y = 1/2$ (bilateral); AV: $x = 0$.

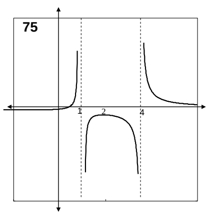
72. (A) Creix en $]-3, 1[\cup]2, +\infty[$ i decreix en $]-\infty, -3[\cup]1, 2[$; màxim relatiu en $x = 1$, valor 9; mínim relatiu en $x = -3$, valor -117 i en $x = 2$, valor 8. (B) Com que no esta definida en interval tancat no estan garantits els extrems absoluts; no hi ha màxim absolut però sí mínim absolut: -117, assolit en $x = -3$. (C) Còncava en $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right[$ i convexa en $\left]-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right[$. PI. en $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. **73.** (A) O(0, 0), A(1, 0) i B(−1, 0). (B) f creix en $\left]-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup]1, +\infty[$ i decreix en els altres intervals. (C) Màxim absolut $4/27 = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; mínim absolut $0 = f(\pm 1)$. **74.** (A) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. (B) f decreix en $]-\infty, 0[$ i creix en $]0, +\infty[$; mínim relatiu i absolut en $x = 0$, valor -1. (C) f convexa en $\left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ i còncava en $\left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$; PI en $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. (D) AH: $y = 1$, bilateral. **75.** (A) AH: $y = 0$, bilateral; AV: $x = 1$ y $x = 4$. (B) f creix en $]-2, 1[\cup]1, 2[$ i decreix en $]-\infty, -2[\cup]2, 4[\cup]4, +\infty[$. (C) Màxim relatiu en $x = 2$, valor -1; mínim relatiu en $x = -2$, valor $-1/9$.

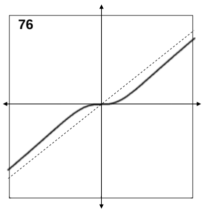
76. (A) $f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{6x - 2x^3}{(x^2+1)^3}$. (B) Creix en $\mathbb{R}$. (C) Convexa en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i còncava en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$. (D) AO: $y = x$ (bilateral). **77.** (A) A(1, 0) i B(−2, 0). (B) $[-2, +\infty[\sim\{0\}$. (C) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]0, 1[$; mínim relatiu en $x = 1$, valor 0. (D) Còncava en $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$ i convexa en $]2, +\infty[$; PI. en $x = 2$. AV: $x = 0$; AO: $y = x$ (bilateral). **78.** (A) AH: $y = 0$ (bilateral per les dues). (B) f creix en $]-1, 1[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en $x = -1$, valor $-1/2$, màxim relatiu en $x = 1$, valor $1/2$. (C) g creix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ i decreix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en $x = 0$, valor 0, màxims relatius en $x = \pm 1$, valor 1/4. **79.** (A) $D_f = \mathbb{R}$; AH: $y = 0$ (bilateral). (B) f creix. en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$. Màxim relatiu i absolut en $x = \pm\sqrt{3}$, valor 1/8; mínim relatiu i absolut en $x = 0$, valor -1. (D) f positiva en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i negativa en $]-1, 1[$.

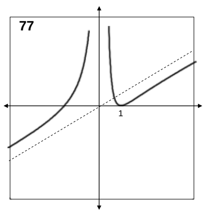


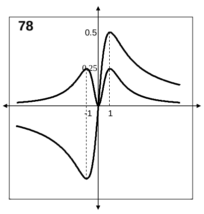


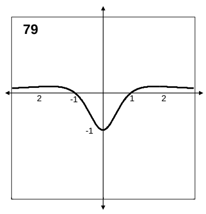




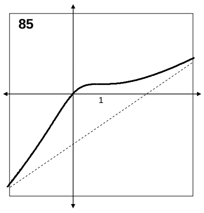


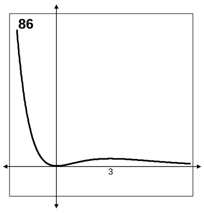


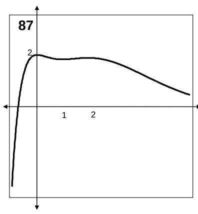


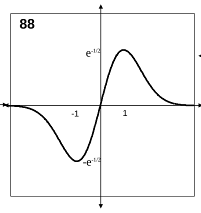


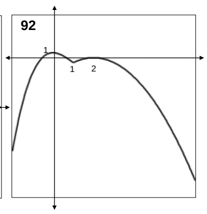
80. (A) $[-2, +\infty[$. (B) Creix en $[-2, -1[\cup]1, +\infty[$, decreix en $]-1, 1[$; màxim relatiu en x = –1, valor 2; mínim relatiu en x = 1 i x = –2, valor 0. **81.** (A) $[-2, 2]$. (B) f creix en $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$. Màxim relatiu en $x = \pm\sqrt{2}$, valor 2; mínim relatiu en x = 0 i ±2, valor 0. (C) Mínim absolut 0, màxim absolut 2. **82.** (A) $]-2, +\infty[\sim \{1\}$. (B) Creix en $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]-1, 1[$; màxim relatiu en x = –1, valor ln4. **83.** (A) $]-4, 4[\sim \{0\}$. (B) Creix en $\left]-4, -\sqrt{8}\right[\cup \left]0, \sqrt{8}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{8}, 0\right[\cup \left]\sqrt{8}, 4\right[$. Màxim relatiu en $x = \pm\sqrt{8}$, valor 6ln2. **84.** (A) $]-3, 3[$. (B) Creix en $]-3, -2[\cup]0, 2[$ i decreix en $]-2, 0[\cup]2, 3[$. (C) Màxim relatiu en x = ±2, valor 2ln5;mínim relatiu en x = 0, valor 2ln3. (D) Màxim absolut 2ln5, no hi ha mínim absolut. **85.** (A) Creix en $\mathbb{R}$; no té extrems relatius. (B) Còncava en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i convexa en $]-1, 1[$; PI en x = ±1. (C) m = 0, en x = 1; m = 2, en x = –1. **86.** (B) Decreix en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ i creix en $]1, 3[$. (C) Màxim relatiu en x = 3, valor $4e^{-3}$; mínim relatiu en x = 1, valor 0. (C) y = 0 (dreta). **87.** (A) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, 2[$ i decreix en $]0, 1[\cup]2, +\infty[$; màxim relatiu en x = 0, valor 2 i en x = 2, valor $14e^{-2}$; mínim relatiu en x = 1, valor $5e^{-1}$. (B) AH: y = 0 (dreta). **88.** (A) Creix en $]-1, 1[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; màxim relatiu en x = 1, valor $e^{-1/2}$; mínim relatiu en x = –1, valor $-e^{-1/2}$. (B) Còncava en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i convexa en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$; PI. en x = 0 i $\pm\sqrt{3}$. (B) AH: y = 0 (bilateral). **89.** (A) Creix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$. (B) Màxim relatiu en x = 0, valor $1 + e^2$; mínim relatiu en x = ±1, valor 2e. (C) Mínim absolut 2e; no hi ha màxim absolut. **90.** (A) Creix en $]0, \pi/4[\cup]5\pi/4, 2\pi[$ i decreix en $]\pi/4, 5\pi/4[$. (B) Màxim relatiu en x = π/4, valor $\sqrt{2}$; màxim relatiu en x = 2π, valor 1; mínim relatiu en x = 5π/4, valor $-\sqrt{2}$, mínim relatiu en x = 0, valor 1. (C) Màxim absolut $\sqrt{2}$ i mínim absolut $-\sqrt{2}$. **91.** (A) f és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{0\}$. (C) Màxim absolut: 3, quan x = 0; mínim absolut: –1, quan x = ±2. **92.** (A) Es contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{1\}$. (B) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, 2[$ i decreix en $]0, 1[\cup]2, +\infty[$; màxim relatiu en x = 0, valor 1, màxim relatiu en x = 2, valor 0, mín. relatiu en x = 1, valor –1. (C) Convexa en $\mathbb{R} \sim \{1\}$. **93.** (A) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, contínua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R} \sim \{0\}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. (B) Creix en $]-1/2, 0[\cup]1/2, +\infty[$, decreix en $]-\infty, -1/2[\cup]0, 1/2[$; màxim relatiu en x = 0, valor 0, mínim relatiu en x = ±1/2, valor –1/4.

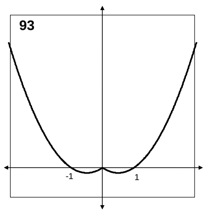












94. Màxim absolut 1/2, en x = π/4; mínim absolut –1/2, en x = 3π/4. **95.** m ≥ 0. **96.** f ''(x) = 0 si i només si 6ax + 2b = 0, que té solució necessàriament. **97.** (A) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. (B) $b^2 - 3ac > 0$. (C) $b^2 - 3ac < 0$. (D) Si $b^2 - 3ac = 0$, l'únic punt singular és $x = -\dfrac{b}{3a}$, però esta és solució de f ''(x) = 0, i com que f '''(x) = 6a ≠ 0, f té una inflexió en eixe punt. **98.** 4.5 i 6 m. **99.** Quadrat de costat $\sqrt{2}R$. **100.** Base i altura de $5\sqrt{2}$ m; àrea màxima 50 m². **101.** Costats de 1 m, diagonal mínima $\sqrt{2}$ m. **102.** Base: $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ m, altura: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ m; àrea màxima: 1 m². **103.** Base: $2\sqrt{50}$ cm, altura: $\sqrt{50}$ cm; àrea màxima 50 cm². **104.** 12 i 24 cm. **105.** r = 2 cm, h = 3 cm. **106.** 8, 8 i 4 m. **107.** Costat triangle: $\dfrac{30}{6-\sqrt{3}}$ cm, altura rectangle: $\dfrac{15(3-\sqrt{3})}{6-\sqrt{3}}$ cm. **108.** $r = \dfrac{1}{3}$ m, $h = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ m.

109. Base = 4, altura = 8. **110.** (A) t: $2ax + y = a^2 + 12$. (B) a = 2; mínima àrea = 32. **111.** x = 40 m, y = 60 m, 3600 €. **112.** 20×60 m; cost = 36000 €. **113.** 25×80 m; màxima àrea: 8000 m^2. **114.** Base: 50m, altura: $25\sqrt{3}$ m; àrea màxima: $1250\sqrt{3}$ m^2. **115.** Base: $6\sqrt{10}$ m, altura: $\sqrt{10}$ m; cost màxim: $200\sqrt{10}$ €. **116.** 40 litres; cost: 45 €/litre. **117.** Quadrat de 20 m de costat; mínima àrea: 200 π m^2. **118.** $\sqrt{10}$. **119.** $\alpha = \text{arctg}\frac{25}{x} - \text{arctg}\frac{20}{x}$. (B) $x = 10\sqrt{5}$ m, $\alpha \simeq 6.38°$. **120.** $\alpha = \text{arctg}\frac{30}{x} - \text{arctg}\frac{20}{x}$. (B) $x = 10\sqrt{6}$ m, $\alpha \simeq 11.54°$. **121.** $6\sqrt{5}$ m; 6.38º.

122. (A) Creix en]0, 3[i en]5, 6[; decreix en]3, 5[. (B) Màxima velocitat 54 km/h, a las 3 h i a las 6 h.

123. (A) f(5) = 100 km (lògic perquè la funció acumula km recorreguts). (B) PI en x = 2. (C) f és còncava en]0, 2[i convexa en]2, 5[. (D) f'(2) = 27 km/h. (E) Màxima velocitat en el PI de f. No sempre és així, perquè la coincidència és en un màxim relatiu, no necessàriament absolut i també podria coincidir el PI amb un mínim. **124.** (A) a = –0.5, b = 30, c = 0. (B) 60 minuts. **125.** 87.5 kg. **126.** (A) $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x}$; g(25) = 1.4 €/unitat, g(100) = 1 €/unitat. (B) 400 unitats, 0.95 €/unitat. **127.** (A) P(1, π/4) i Q(–1, –π/4). (B) $f'(0) = 1$.

128. (A) P(2, ln5) i $Q\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{4}\right)$. (B) P(1, ln2), màxim pendent: 1. **129.** 3 i 6. **130.** y = –2x +4. **131.** 10 i 10.

132. (A) 15000 fruits. (B) $P(x) = 15000 + 225x - 15x^2$. (C) 7 o 8 arbres més.

133. (A) I(x) = (50 + x)(1000 – 10x). (B) 75 viatgers a 750 €/persona; Ingrés màxim: 56250 €.

134. $3\sqrt{5}$ m. **135.** Altura: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ m; longitud mínima: $5 + \sqrt{3}$ m. **136.** Base: 15×30 cm; altura: 20 cm. **137.** 2, 4 i 3 m; 24 m^2. **138.** Base: 10×5 cm, altura 5 cm; cost mínim: 450 €. **139.** x = y = 4 m; 1440 €.

140. (A) $C(x) = 1080 + 80x + \frac{720}{x}$. (B) x = y = 3 m. **141.** Base 10x10 m, altura 2.5 m; volum 250 m^3.

142. Radi $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$; 6.83 dm, altura: $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$; 3.41 dm; cost mínim $300\sqrt[3]{\pi}$; 439.38 €. **143.** x = y = p/2.

144 (A) $D(t) = \sqrt{(1000-20t)^2 + 100t^2}$. (B) t = 30 i 50 h. (C) t = 40 h, $D = 200\sqrt{5}$ km. **145.** $\sqrt{12.5}$ km; temps mínim 8.714 h. **146.** Triangle equilàter de base $\sqrt{3}R$ i altura 3R/2. **147.** 40×20 m i despeses de 18000 €.

148. x = a/2, y = b/2. **149.** (A) A(x) = x(3.6 – 2x); $0.8 \le x \le 1$. (B) x = 0.9, y = 1.8. (C) x = 0.8, y = 2 o x = 1, y = 1.6. **150.** (A) $A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$; x = 5 m, A(5) = 25/8 m^2. (B) $A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$; $x_0 = \frac{10\pi}{\pi+4}$, $A(x_0) = \frac{25}{\pi+4}$ m^2. **151.** $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$. **152.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$ i $R\sqrt{2}$. **153.** Catets iguals de longitud $2 + \sqrt{2}$ cm.

154. Costats de 4 m; àrea mínima 48 m^2. **155.** Quadrat de 2 m de costat. **156.** 10×7 m; 7860 €. **157.** P(1, 1), mínima distància: $\sqrt{5}$ m. **158.** Màxima distància 1, punts A(0, 1), B(1, 0) i C(–1, 0); mínima distància: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, punts $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ i $Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. **159.** $P\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ i $Q\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$; mínima distància: $\frac{\sqrt{19}}{2}$. **160.** Màxima distància 2, punts A(2, 1), B(–2, 1) i O(0, –1); mínima distància $\sqrt{3}$, punts $P\left(\sqrt{2}, 0\right)$ i $Q\left(-\sqrt{2}, 0\right)$.

161. (A) A(0, 2/a) i B(2a, 0). (B) $2\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$. (C) a = 1; distància mínima: $2\sqrt{2}$. **162.** P(1/3, 8/9); àrea 16/27 u.s.

163. $2\sqrt{2}$ m. **164.** Mínima àrea 6; A(0, 6) i B(2, 0); r: y = –3x + 6.

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Càlcul diferencial i integral

educàlia editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Càlcul diferencial i integral

educàlia
editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-08-4

Depòsit legal: V-3244-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 3

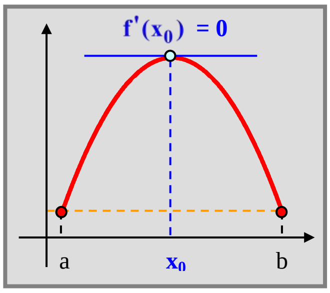
Aplicacions de les derivades

3.1 Teorema de Rolle

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[.

Si **f(a) = f(b)** $\rightarrow$ $\exists$ $\mathbf{x_0} \in$ **]a, b[** tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$

Si f és contínua en [a, b], el **teorema de Weierstrass** assegura que **f assoleix els extrems absoluts** (màxim i mínim) **en [a, b]**.



- Si aquests extrems absoluts s'assoleixen els dos en a i en b:

  $f(a) \le f(x) \le f(b), \ \forall x \in [a, b]$ o $f(b) \le f(x) \le f(a), \ \forall x \in [a, b]$

  Però si $f(a) = f(b)$ $\rightarrow$ f és constant $\rightarrow$ $\mathbf{f'(x) = 0}, \ \forall \mathbf{x \in]a, b[}$

- Si algun dels extrems absoluts (suposem el màxim) s'assoleix en $x_0 \in]a, b[$, tindrem que:

  (1) si $x_1 \in]a, x_0[\ \Rightarrow \ f(x_1) \le f(x_0) \ \Rightarrow \ \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \ \Rightarrow \ f_-'(x_0) \ge 0$

  (2) si $x_2 \in]x_0, b[\ \Rightarrow \ f(x_2) \le f(x_0) \ \Rightarrow \ \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x_2 \to x_0} \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \ \Rightarrow \ f_+'(x_0) \le 0$

Com que f és derivable en x_0, necessàriament $f_-'(c) = f_+'(x_0)$, i no hi ha altra possibilitat que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Exemple 1

Obtenim els punts que verifiquen el teorema de Rolle per a la funció g definida per

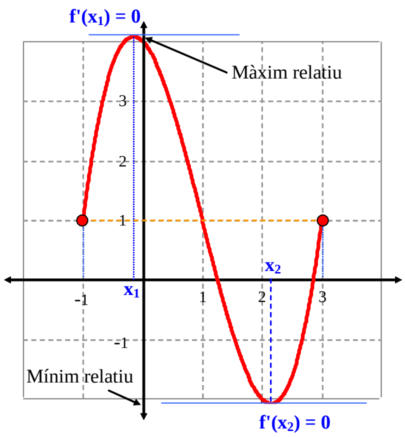
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4, \ \forall x \in [-1, 3].$$

Com que és polinòmica, la funció f és contínua en [–1, 3] i derivable en]–1, 3[, sent la seua derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

También verifica la tercera hipòtesi: f(–1) = f(3) = 1.

El teorema de Rolle afirma que la funció derivada s'anul·la en algun punt de]–1, 3[.

Les seues arrels es troben immediatament:



$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 3x^2 - 6x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

d'on $x_1 = 1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ i $x_2 = 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

Observa que el teorema de Rolle no afirma que el punt x_0 siga únic. En l'anterior exemple hi apareixen dos, però poden haver-ne fins i tot infinits (queda patent en la demostració del teorema).

Si les hipòtesis del teorema no es verifiquen, ni s'afirma ni es nega l'existència d'aqueixos punts.

1 Comprova si la funció $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ definida primerament en l'interval [0.5, 4] i després en [–1, 4], verifica les hipòtesis del teorema de Rolle. Es verifica la tesi en algun dels casos?

2 Considera la funció $f(x) = x^2 + 3x - 2$ definida en [a, 1]. Troba el valor de a per al qual f verifica les hipòtesis del teorema de Rolle i troba el punt que verifica la tesi.

➢ Separació d'arrels

El teorema de Bolzano permetia localitzar arrels de les equacions (o de funcions). Ara, amb el teorema de Rolle, podrem separar-les en intervals disjunts, és a dir, en intervals que continguen només una arrel.

Exemple 2

Demostrem que l'equació $\mathbf{2x = 1 + \sin x}$ només té una solució i està situada entre 0 i 1.

- Vegem que l'equació té almenys una solució. Per a això considerem la funció

$$\mathbf{f(x) = 1 + \sin x - 2x}$$

  que és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, i les seues arrels són les solucions de l'equació donada.

  Com que $\mathbf{f(0)} = 1 > \mathbf{0}$ i $\mathbf{f(1)} = 1 + \sin 1 - 2 < \mathbf{0}$, i f és contínua en [0, 1], el **teorema de Bolzano** assegura que existeix alguna arrel de f entre 0 i 1:

$$\exists\, \mathbf{x_1} \in\,]0, 1[\text{ tal que } f(x_1) = 0$$

- Vegem que no poden haver-hi dues solucions de l'equació.

  Si x_1 i x_2 foren dues solucions tindríem que $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)} = 0$.

  Però com que f és **contínua en** $[\mathbf{x_1, x_2}]$ i **derivable en** $]\mathbf{x_1, x_2}[$ (ho és en $\mathbb{R}$) el **teorema de Rolle** afirma:

$$\exists\, x_0 \in\,]x_1, x_2[\text{ tal que } \mathbf{f'(x_0) = 0}$$

  Però la derivada mai s'anul·la perquè $f'(x) = \cos x - 2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant no poden haver-hi 2 arrels.

Exemple 3

Separem en intervals disjunts les arrels de l'equació $x^3 - 3x + 1 = 0$.

És una equació polinòmica de grau 3, per la qual cosa té com a màxim 3 arrels reals.
Considerem la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$, contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

1. La seua funció derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$, té únicament dues arrels, en els punts $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
2. Constituïm els subintervals $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ i $[1, \infty[$, a partir de les arrels de f'.
3. Interval $[-1, 1]$: com que $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, el teorema de Bolzano assegura que hi ha arrels en ell.

   Interval $]-\infty, -1]$: com que $f(-2) = -1 < 0$ i $f(-1) = 3 > 0$, el teorema de Bolzano assegura que conté arrels.

   Interval $[1, +\infty[$: com que $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$, el teorema de Bolzano assegura que hi ha arrels en ell.
4. Les tres arrels reals pertanyen respectivament als intervals $]-2, -1[$, $]-1, 1[$ i $]1, 2[$.

3 Siga f una funció contínua i derivable. Demostra, amb ajuda dels teoremes de Bolzano i Rolle, les propietats següents. Siguen a i b dues arrels consecutives de l'equació f'(x) = 0:
(A) No pot haver dues solucions diferents en]a, b[de l'equació $f(x) = 0$.
(B) Si f(a) i f(b) són de signe distint, aleshores l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en]a, b[.
(C) Si f(a) i f(b) tenen el mateix signe, aleshores l'equació $f(x) = 0$ no té cap solució en]a, b[.

4 Separa les arrels de les equacions:
(A) $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ (B) $\cos x = x$ (C) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$

3.2 Teorema del valor mitjà de Lagrange

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[. Aleshores:

$$\exists\, \mathbf{x_0} \in \,]\mathbf{a, b}[\text{ tal que } \mathbf{f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a)}$$

Considerem la funció $g(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\cdot x - f(x)(b - a)$, $\forall x \in [a, b]$.

La funció g és contínua en [a, b] i derivable en]a, b[perquè f ho és, i la seua derivada ve donada per

$$g'(x) = \big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)(b - a) \quad \forall x \in \,]a, b[\qquad (1)$$

Es immediat que g(a) = g(b), aleshores, aplicant el **teorema de Rolle**, deduïm

$$\exists\, x_0 \in \,]a, b[\text{ tal que } g'(x_0) = 0$$

Però $\quad g'(x_0) = 0 \iff f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a) = 0 \iff f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$

➢ Interpretacions del teorema del valor mitjà

Considerem una funció f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[.

- La variació mitjana de la funció f en l'interval [a, b] és igual a la variació instantània (derivada) en algun punt x_0 entre a i b:

$$\exists\, \mathbf{x_0} \in \,]\mathbf{a, b}[\quad \textbf{tal que} \quad \frac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{b - a}} = \mathbf{f'(x_0)}$$

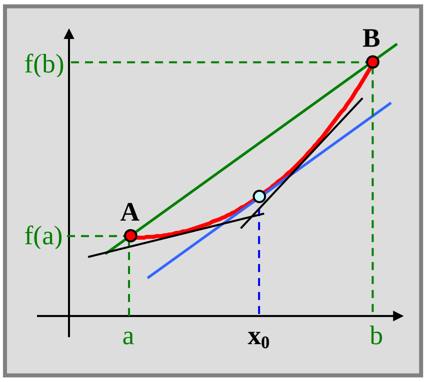
- Entre els punts de la gràfica A(a, f(a)) i B(b, f(b)) hi ha algun punt $P(x_0, f(x_0))$ en què la recta tangent en ell és paral·lela (idèntic pendent) a la recta secant per A i B.

Com que f verifica les hipòtesis del TVM, $\exists\, x_0 \in \,]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a) \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

però $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ és la variació mitjana de f en [a, b] i $f'(x_0)$ és la variació en l'instant x_0.

El pendent de la recta secant que uneix A i B és $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, i $f'(x_0)$ és el pendent de la recta tangent en $(x_0, f(x_0))$.



Exemple 4

Obtenim el valor x_0 que verifica el TVM per a la funció $f(x) = x^2$ en l'interval [0,2].

La funció és contínua en [0,2] i derivable en]0,2[$\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in \,]0,2[$ tal que $f(2) - f(0) = f'(x_0)\,(2 - 0)$
O de forma equivalent

$$4 - 0 = f'(x_0)\cdot 2 \;\rightarrow\; f'(x_0) = 2 \;\rightarrow\; 2x_0 = 2 \;\rightarrow\; \mathbf{x_0 = 1}$$

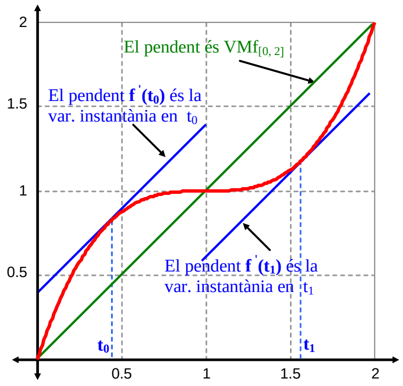
Exemple 5

Igual que el teorema de Rolle, el TVM pot verificar-se per a més d'un punt x_0, fins i tot infinits. Vegem l'exemple d'una funció que el verifica en dos punts.

L'espai recorregut f per un mòbil en funció del temps t ve donat per

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t, \quad \forall t \in [0, 2].$$

Vegem que verifica el TVM en dos punts de l'interval]0, 2[.



La variació mitjana (velocitat mitjana) en [0, 2] és

$$VMf_{[0, 2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1 \text{ m/s}$$

i la velocitat instantània en qualsevol punt t és

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 3, \quad \forall t \in]0, 2[.$$

Com que $VMf_{[0, 2]} = f'(t_0)$, per a algun $t_0 \in]0, 2[$, tenim que

$$1 = 3t^2 - 6t + 3 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 6t + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} \quad \rightarrow \quad t_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \;\text{ i }\; t_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El resultat indica que en els instants t_0 i t_1 la velocitat instantània és igual a la velocitat mitjana de tot el trajecte: "En algun moment del recorregut el mòbil ha de portar la velocitat mitjana".

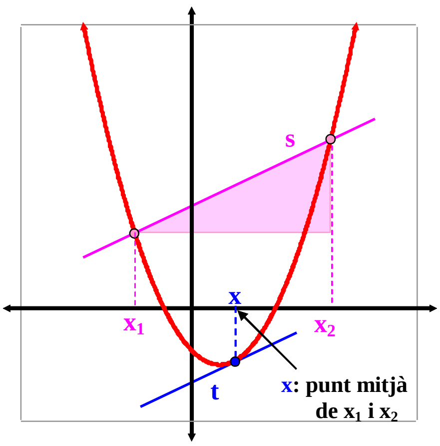
Exemple 6

Calculem el pendent de la recta secant a la paràbola $f(x) = ax^2 + bx + c$ en dos punts x_1 i x_2 d'ella, i comprovem que el punt de la paràbola que té la mateixa pendent és el seu **punt mitjà** $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}$.

- El pendent de la recta secant és la variació mitjana en $[x_1, x_2]$:

$$\mathbf{m_s} = \mathbf{VMf_{[x_1, x_2]}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \mathbf{a(x_1 + x_2) + b}$$



- El pendent de la corba és la seua derivada $\mathbf{f'(x) = 2ax + b}$.

  Vegem en quin valor de x són iguals els dos pendents:

  $f'(x) = m_s \quad \rightarrow \quad 2ax + b = a(x_1 + x_2) + b \quad \rightarrow \quad 2ax = a(x_1 + x_2)$

  d'on $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}$.

5 Es verifiquen les condicions per a aplicar el TVM a les següents funcions en els intervals indicats? Si es així, busca el punt o els punts per als quals es verifica.

(A) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$, en l'interval [0, 4].

(B) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, en l'interval [−1, 3].

3.3 La regla de L'Hôpital

➢ Teorema de Cauchy

Considerem f i g funcions contínues en [a, b] i derivables en]a, b[, aleshores:

$$\exists\ \mathbf{x_0} \in]a, b[\text{ tal que } \mathbf{(f(b)-f(a))\cdot g'(x_0) = (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)}$$

Considerem la funció $H(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x),\ \forall x \in [a, b]$.   (1)

H és contínua en [a, b] i derivable en]a, b[perquè f i g ho són i, com es pot comprovar, H(a) = H(b).

Aleshores el **teorema de Rolle** assegura que $\exists x_0 \in]a, b[$ tal que $H'(x_0) = 0$; però derivant en (1) obtenim

$$0 = H'(x_0) = (f(b) - f(a))\, g'(x_0) - (g(b) - g(a))\, f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0)$$

Exemple 7

Les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2 + 4x$, definides en [0, 2], defineixen l'espai recorregut per dos mòbils, en metres, en funció del temps, en segons. Obtenim el valor x_0 que verifica el teorema de Cauchy.

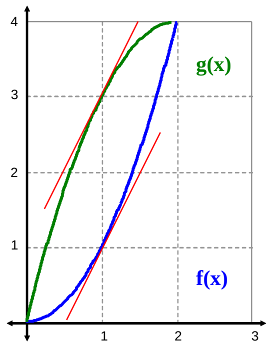
Les funcions f i g són contínues en [0, 2] i derivables en]0, 2[, aleshores

$$\exists x_0 \in]0,2[\text{ tal que } (f(2) - f(0)) \cdot g'(x_0) = (g(2) - g(0)) \cdot f'(x_0)$$

És a dir: $(4 - 0) \cdot (-2x_0 + 4) = (4 - 0) \cdot 2x_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 1}$

El resultat significa que els mòbils tenen la mateixa variació, 4 metres, i variació mitjana (velocitat) en l'interval [0, 2], 2 m/s.

El teorema de Cauchy indica que en l'instant $x_0 = 1$ tenen també la mateixa velocitat instantània $f'(1) = g'(1) = 2$ m/s, encara que són moviments diferents. Gràficament veiem que en $x_0 = 1$ tenen rectes tangents amb igual pendent.



➢ Regla de L'Hôpital

Com una conseqüència del teorema de Cauchy, la regla de L'Hôpital, permet utilitzar el càlcul de derivades per a resoldre les indeterminacions 0/0 que surten en el càlcul de límits.

Considerem f i g funcions contínues en [a, b] i derivables en]a, b[tal que les seues derivades no s'anul·len simultàniament en cap punt de]a, b[.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \frac{0}{0} \text{ i existeix i és finit } \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{g'(x)}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{g'(x)}}$$

Vegem que és cert per al límit per la dreta de x_0. La demostració és anàloga per a límits per l'esquerra.

Si $x \in]a, b[$ i $x > x_0$, com que es verifiquen les condicions del teorema de Cauchy en $[x_0, x]$, tenim

$$\exists t \in]x_0, x[\text{ tal que } \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in]x_0, x[\text{ tal que } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

perquè $f(x_0) = g(x_0) = 0$, i escrivint-ho en forma de quocient. Prenent límits quan x tendeix per la dreta a x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

perquè com que $t \in]x_0, x[$, quan x tendeix a x_0, necessàriament t tendeix a x_0 també.

Exemple 8

Amb la regla de L'Hôpital podem calcular els límits indeterminats del tipus 0/0 sempre que existisca el límit del quocient de les derivades:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

La regla de L'Hôpital es pot aplicar reiteradament sempre que es verifiquen les seus condicions:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

➢ Càlcul de límits indeterminats

- La regla de L'Hôpital és vàlida també per al càlcul de límits en $\pm\infty$, sempre que les funcions siguen contínues i derivables en un interval infinit adequat:

$$\textbf{si}\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \text{ i }\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \textbf{existeix}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Una altra ampliació de la regla de L'Hôpital s'obté en indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$:

  Si per **A** representem tant un nombre real com els símbols $+\infty$ i $-\infty$, tenim que:

$$\textbf{si}\quad \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ \text{ i }\ \lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \textbf{existeix}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- A més, efectuant algunes modificacions (com veurem en els següents exemples), resoldrem límits que presenten indeterminacions dels tipus:

$$\infty\cdot 0 \qquad \infty-\infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

Exemple 9

Indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ **:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2+1}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2e^{1/x}-1}{5e^{1/x}+3}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{5}{x^2}e^{1/x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

6 Calcula els següents límits:

(A) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$ (C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ (E) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2e^{1/x}-1}{5e^{1/x}+3}$

(F) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (G) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+3x}$ (H) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln(2x+1)}{1+\ln(x^2+1)}$ (I) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}+2}$ (J) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}+2}$

Exemple 10

Indeterminacions del tipus 0 · ∞. Expressem el producte com un quocient:

- $$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{-\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 e^{-x}\right)=+\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

- En canvi $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 e^{-x}\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ No té indeterminació!

- $$\lim_{x\to 0^+}(\ln x\cdot \operatorname{arc\,tg} x)=(-\infty)\cdot 0=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\operatorname{arctg}x}=\frac{-\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\dfrac{1}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}{x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x(\operatorname{arctg}x)^2-2\operatorname{arctg}x}{1}=0$$

Indeterminacions del tipus ∞ – ∞.

- Es resolen modificant l'expressió fins a obtenir un quocient amb indeterminació del tipus 0/0 o ∞/∞:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cdot\cos x}{2\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

- Altres casos es resolen modificant l'expressió per a obtenir un producte:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right)=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$$

perquè $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$.

Indeterminacions del tipus 1^∞, ∞^0 o 0^0.

Es resolen amb les propietats dels logaritmes, transformant l'expressió exponencial en productes:

- $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}=0^0 \quad\to\quad$ anomenem $L=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}$ i prenem logaritmes:

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1-\cos x)^{2x}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\ln(1-\cos x)\right)=0\cdot(-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1-\cos x)}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2\sin x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4x\cdot\sin x-2x^2\cdot\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4\cdot\sin x-8x\cdot\sin x+2x^2\cdot\sin x}{\cos x}=0$$

Aleshores: $\ln(L)=0 \;\to\; L=e^0=1 \;\to\; \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}=1$

Exemple 11

Comprovem que la següent funció, amb domini]–1, +∞[, és derivable en 0, i obtenim la derivada en aquest punt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- L'equació de la seua única asímptota horitzontal és (el seu domini no permet cap a –∞):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0 \;\Rightarrow\; \text{r: } y = 0$$

- És contínua en x = 0: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 = f(0).$
- És derivable en x = 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \frac{0}{0} =$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-1}{2} \;\Rightarrow\; \mathbf{f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

7 Calcula els següents límits:

(A) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^x + x^3\right)^{1/x}$ (B) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ (C) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$ (D) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\right)$

(E) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\ln x}$ (F) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{(1-x)}$ (G) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\sin(1/x)}$ (H) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$

(I) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$ (J) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 7x^2 + 6}$ (K) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2}$ (L) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + 3x}{3\ln x + 2x}$

8 Està ben resolt el següent límit? En cas contrari, resol-lo correctament.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

9 Per a les següents funcions obtén el valor de a perquè siguen contínues, i les seues asímptotes horitzontals.

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (B) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10 Donades les següents funcions f(x) i g(x) estudia:

(A) Els valors de m i n perquè la funció f siga contínua.

(B) La continuïtat de g en els punts x = 0 i x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+3} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.4 Creixement i decreixement local

➢ Creixement i decreixement puntual

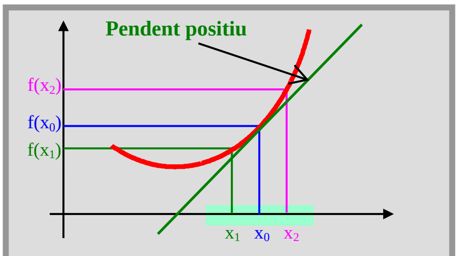
Considerem una funció f definida en un domini D_f, i un punt $x_0 \in D_f$.

- La funció f és ***estrictament creixent en*** $\mathbf{x_0}$ si en un entorn de x_0 es verifica que:

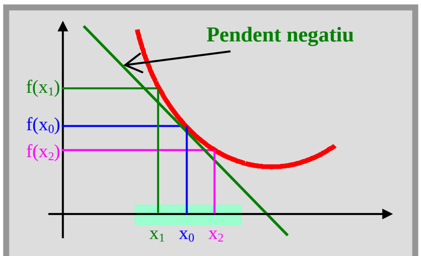
  si $\mathbf{x < x_0} \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) < f(x_0)}$ i si $\mathbf{x > x_0} \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) > f(x_0)}$

- La funció f és ***estrictament decreixent en*** $\mathbf{x_0}$ si en un entorn de x_0 es verifica que:

  si $\mathbf{x < x_0} \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) > f(x_0)}$ i si $\mathbf{x > x_0} \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) < f(x_0)}$



f estrictament creixent en x_0



f estrictament decreixent en x_0

Observa en els dibuixos que el pendent de la recta tangent en x_0 és positiva quan f creix i negativa quan decreix. Sempre és així? Vegem el següent teorema i els exemples 12 i 13.

➢ Teorema 1: Condicions suficients de creixement estricte

Considerem una funció f derivable en x_0.

- Si $\mathbf{f'(x_0) > 0} \;\rightarrow\;$ **f és estrictament creixent en $\mathbf{x_0}$**
- Si $\mathbf{f'(x_0) < 0} \;\rightarrow\;$ **f és estrictament decreixent en $\mathbf{x_0}$**
- Si $\mathbf{f'(x_0) = 0} \;\rightarrow\;$ **No podem assegurar res**

Vegem únicament el primer cas. Els altres dos es dedueixen de manera anàloga.

Si $f'(x_0) > 0 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\rightarrow\; \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ en un entorn de x_0 (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \mathbf{x < x_0} \;\rightarrow\; x - x_0 < 0 \;\xrightarrow{(1)}\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) < f(x_0)} \\ \text{Si } \mathbf{x > x_0} \;\rightarrow\; x - x_0 > 0 \;\xrightarrow{(1)}\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\rightarrow\; \mathbf{f(x) > f(x_0)} \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{f és estrictament creixent en } \mathbf{x_0}$$

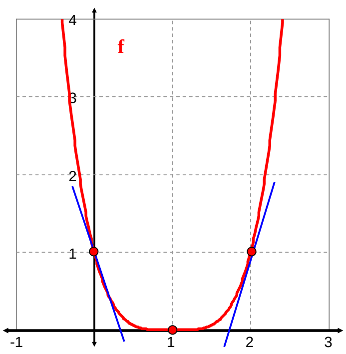
Exemple 12

La funció $f(x) = (x-1)^4$ és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 4(x-1)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $f'(2) = 4 > 0 \;\rightarrow\;$ f és estrictament creixent en x = 2.
- Com que $f'(0) = -4 < 0 \;\rightarrow\;$ f és estrictament decreixent en x = 0.
- Com que $f'(1) = 0$, el teorema 1 no assegura res, encara que en aquest cas la funció ni creix ni decreix en x = 1, perquè:

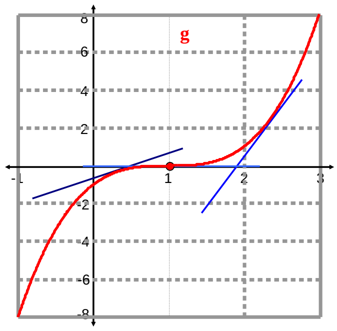
  Si $x < 1 \;\rightarrow\; (x-1)^4 > 0 \;\rightarrow\; f(x) > 0 = f(1)$

  Si $x > 1 \;\rightarrow\; (x-1)^4 > 0 \;\rightarrow\; f(x) > 0 = f(1)$



Exemple 13

La funció $f(x) = (x-1)^3$ és derivable en $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 3(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



- Com que $f'(2) = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad$ f és estrictament creixent en $x = 2$.
- Com que $f'(-1) = -8 < 0 \quad \rightarrow \quad$ f és estrictament decreixent en $x = -1$
- Com que $f'(1) = 0$, el teorema 1 no assegura res, encara que en aquest cas la funció creix en $x = 1$, perquè:

  Si $x < 1 \quad \rightarrow \quad x - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^3 < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) < 0 = f(1)$

  Si $x > 1 \quad \rightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) > 0 = f(1)$

La definició anterior de creixement és una definició puntual. Necessitem una definició més global.

➢ Creixement d'una funció en un interval

Diem que f és ***estrictament creixent*** (***decreixent***) ***en un interval*** **I** si és estrictament creixent (decreixent) en cadascun dels punts de l'interval I.

Exemple 14

Considerem la funció $f(x) = (x-1)^4$ de l'exemple 12, amb derivada $f'(x) = 4(x-1)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Tenim que $f'(1) = 0$, i hem vist que f ni creix ni decreix en $x = 1$. En canvi:

Si $x > 1$, tenim que $f'(x) = 4(x-1)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f és creixent en x, si $x > 1$

Si $x < 1$, tenim que $f'(x) = 4(x-1)^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ f és decreixent en x, si $x < 1$

Per tant, **f és decreixent en l'interval $]-\infty, 1[$ i creixent en l'interval $]1, +\infty[$**.

Pel teorema 1, els únics punts derivables on pot canviar el creixement d'una funció són els de derivada nul·la, però no és necessari que passe: en l'exemple 12 canvia el creixement en $x = 1$ mentre que en l'exemple 13 no. A més, en els punt no derivables també pot canviar el creixement d'una funció. Això condueix a la següent definició.

➢ Punts singulars d'una funció

Anomenem ***punts singulars*** d'una funció f a aquells punts:

- del domini de f que són solució de $\mathbf{f'(x) = 0}$, anomenats ***punts crítics***,
- del domini de f en els quals f no és derivable, ***punts no derivables de* f**,
- extrems dels intervals que constitueixen el domini, encara que no pertanyen al domini.

11 Comprova el creixement o decreixement de les funcions següents en els punts $x = -1, 0, 1$ i 2:

(A) $f(x) = x^2$ (B) $f(x) = x^3$ (C) $f(x) = x^4$ (D) $f(x) = x^5$ (E) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

12 Troba els punts singulars de la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ i comprova que és estrictament decreixent en el domini.

3.5 Extrems relatius d'una funció

Considerem una funció f i un punt $\mathbf{x_0} \in \mathbf{D_f}$, diem que:

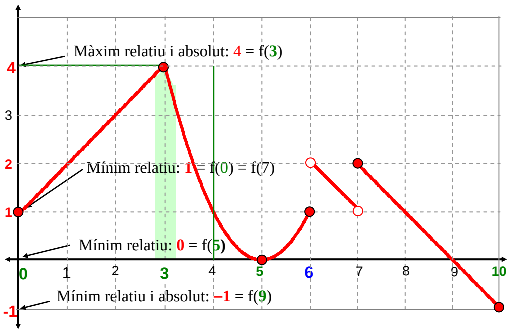
- **f *té un màxim relatiu en*** $\mathbf{x_0}$ si les imatges en algun entorn de x_0 verifiquen $\mathbf{f(x) \le f(x_0)}$.
- **f *té un mínim relatiu en*** $\mathbf{x_0}$ si les imatges en algun entorn de x_0 verifiquen $\mathbf{f(x) \ge f(x_0)}$.

L'extrem relatiu (màxim o mínim) és $\mathbf{f(x_0)}$, que direm és **assolit en** el punt $\mathbf{x_0}$.

Exemple 15

No hem de confondre els conceptes de **màxim** i **mínim relatius** amb els de **màxim** i **mínim absoluts** d'una funció estudiats en el capítol 1. Representem gràficament la següent funció i localitzem els seus extrems relatius i absoluts:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x^2 - 10x + 25 & \text{si } 3 \le x \le 6 \\ -x+8 & \text{si } 6 < x < 7 \\ -x+9 & \text{si } 7 \le x \le 10 \end{cases}$$



(1) Observem que tots els punts on la funció assoleix màxims o mínims relatius són punts singulars.

(A) **Punt crítics:** $\mathbf{f'(x) = 0} \Leftrightarrow \mathbf{x = 5}$. En aquest punt la funció assoleix un mínim relatiu de valor $\mathbf{0} = f(5)$.

(B) **Punts no derivables:**

- **En x = 3** la funció es contínua però no derivable i assoleix un màxim relatiu de valor **4** = f(3).
- En x = 6 la funció no és continua ni derivable. La funció no assoleix cap extrem relatiu.
- **En x = 7** la funció no és contínua ni derivable però assoleix un màxim relatiu de valor **2** = f(7).

(C) **Extrems del domini:**

- **En x = 0** la funció assoleix un mínim relatiu de valor **1** = f(0).
- **En x = 10** la funció assoleix un mínim relatiu de valor **–1** = f(10).

(2) La funció f no és contínua en [0, 10], però assoleix els extrems absoluts entre els punts singulars:

- El **màxim absolut és 4**, assolit en x = 3, i el **mínim absolut és −1**, assolit en x = 9.

➢ Teorema 2: condició necessària d'extrem relatiu

Si f és derivable en x_0, i té un extrem relatiu en x_0, aleshores $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Demostrem el cas en què f té un màxim relatiu en x_0, aleshores existeix un entorn]a, b[de x_0, tal que:

(1) si $x_1 \in]a, x_0[\;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_0) \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; f_-'(x_0) \ge 0$

(2) si $x_2 \in]x_0, b[\;\Rightarrow\; f(x_2) \le f(x_0) \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x_2 \to x_0} \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; f_+'(x_0) \le 0$

Com que f és derivable en x_0, necessàriament $f_-'(x_0) = f_+'(x_0)$, i no hi ha altra possibilitat que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

El teorema 2 mostra que els **únics punts del domini d'una funció derivable, en què es poden assolir extrems relatius són** les solucions de l'equació $\mathbf{f'(x) = 0}$. A més, **en alguns punts no derivables també** es poden assolir extrems relatius, com hem vist en l'apartat (1) de l'exemple 15. El següent teorema imposa unes condicions suficients per a assolir extrems relatius.

➢ Teorema 3: criteri del canvi de signe de la primera derivada

Suposem f contínua en [a, b] i derivable en]a, b[excepte tal volta en $x_0 \in]a, b[$:

(1) Si **$f' < 0$** en $]a, x_0[$ i **$f' > 0$** en $]x_0, b[$ $\rightarrow$ **f té un mínim relatiu en x_0**

(2) Si **$f' > 0$** en $]a, x_0[$ i **$f' < 0$** en $]x_0, b[$ $\rightarrow$ **f té un màxim relatiu en x_0**

(3) En qualsevol altre cas, f no té extrem relatiu en x_0.

Demostrem l'apartat (1), els altres es realitzen anàlogament. Considerem x_0 el punt singular en]a, b[.

Si $x \in]a, b[$, com que f és contínua en $[x, x_0]$ (o en $[x_0, x]$) i derivable en $]x, x_0[$, pel teorema del valor mitjà:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) \quad \text{sent } x_1 \text{ un punt entre x i } x_0$$

Si $x < x_0$ i com que $x_1 \in]x, x_0[$ tenim per hipòtesis que $f'(x_1) < 0 \rightarrow f'(x_1)(x - x_0) > 0 \rightarrow f(x) > f(x_0)$

Si $x > x_0$ i com que $x_1 \in]x, x_0[$ tenim per hipòtesis que $f'(x_1) > 0 \rightarrow f'(x_1)(x - x_0) > 0 \rightarrow f(x) > f(x_0)$

Per tant, $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in]a, b[$ que indica l'existència d'un mínim relatiu de la funció en x_0.

- El teorema 3 s'utilitza per a trobar extrems relatius d'una funció contínua en l'interior d'un interval I.
- Si I = **[a, b]** és tancat **f sempre assoleix en a i en b extrems relatius** de valors f(a) i f(b) però **si es obert no els pot assolir**.

➢ Intervals de creixement d'una funció en un domini D

Com ja hem dit, els punts singulars són els únics punts on pot canviar el creixement d'una funció. Per a estudiar el creixement d'una funció f en un domini D tenim aquest mètode:

- Obtenim els **punts singulars** de f en D i els ordenem de menor a major: $\mathbf{x_1 < x_2 < \ldots < x_n}$
- El domini queda dividit pels punts singulars en els intervals:

  $]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, ..,]x_n, b[$, on a pot ser $-\infty$ i b pot ser $+\infty$.

  S'anomenen ***intervals de creixement*** i en cadascun d'ells la derivada f ' té signe constant (*).
- Estudiant el **signe de f ' en un punt** de cada interval tenim el signe en tot l'interval.

(*) Si f ' no tinguera signe constant, la funció passaria de decréixer a créixer (o viceversa) en algun punt derivable x_c de l'interval. El punt x_c seria un extrem relatiu i aplicant el teorema 2 seria un nou punt crític situat entre els dos punts singulars consecutius, la qual cosa és absurda.

Utilitzant els intervals de creixement i el teorema 3 podem trobar els extrems relatius de la següent forma:

Siga x_i un punt singular de f, i considerem els intervals de creixement que es connecten amb x_i.

- **Si f és contínua en x_i** i en els dos intervals que és connecten amb ell el signe de **f '** canvia de:

  (a) Positiu a negatiu, pel teorema 3, **f té un màxim relatiu en x_i**

  (b) Negatiu a positiu, pel teorema 3, **f té un mínim relatiu en x_i**
- **Si f no és contínua en x_i** no es pot aplicar el teorema 3 i no podem assegurar res. Hem de recórrer a la definició d'extrem relatiu per a classificar-lo.

Exemple 16

(A) Estudiem els intervals de creixement i classifiquem els extrems relatius de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{x^2+1}}{\mathbf{x}}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \sim \{0\}$.

Sabem que f és contínua i derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$, i la funció derivada és $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\sim\{0\}$.

(1) Trobem els **punts singulars**:

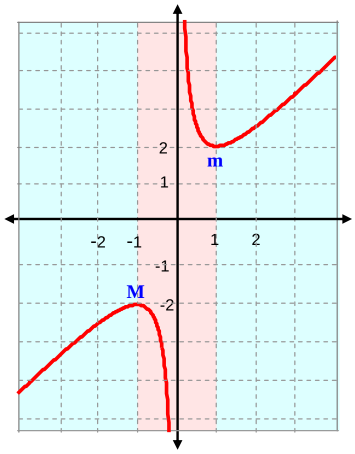
Punts crítics: $f'(x) = 0 \iff \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \iff \mathbf{x = \pm 1}$.

Punts no derivables: **x = 0**.

(2) **Intervals de creixement**: $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ i $]1, +\infty[$.

(3) El **signe de la derivada en un punt d'ells**:

$$f'(-2) > 0,\ f'(-1/2) < 0,\ f'(1/2) < 0 \text{ i } f'(2) > 0$$



Intervals	**$]-\infty, -1[$**	**$]-1, 0[$**	**$]0, 1[$**	**$]1, +\infty[$**
Signe f'	+	–	–	+
f	↑	↓	↓	↑

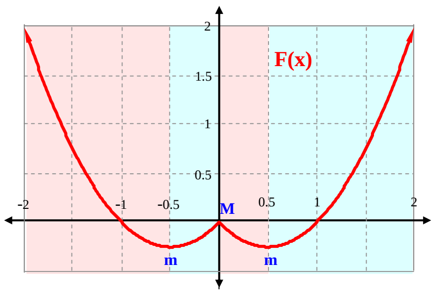
Per tant, **f és creixent en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i decreixent en $]-1, 0[\cup]0, 1[$.**

Pel teorema 3, en **x = –1** f té un **màxim relatiu** de valor f(–1) = **–2**, i en **x = 1** un **mínim relatiu** de valor f(1) = **2**.

En x = 0 no hi ha cap possibilitat d'extrem relatiu, encara que canviara de signe de f', perquè no és del domini.

(B) Obtenim els intervals de creixement i els extrems relatius de $F(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

F és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$ i $F'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.



- Obtenim els **punts singulars de F**.

  Punts crítics: $F'(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x+1 = 0 \rightarrow \mathbf{x = -1/2} \\ 2x-1 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 1/2} \end{cases}$

  Punts no derivables: x = 0 (com ja hem vist).

- **Intervals de creixement**:

  $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ i $]1, +\infty[$

- El **signe de la derivada en un punt d'ells:**

  $F'(-1) < 0$, $F'(-1/4) > 0$, $F'(1/4) < 0$ i $F'(1) > 0$

Intervals	**$]-\infty, -1/2[$**	**$]-1/2, 0[$**	**$]0, 1/2[$**	**$]1/2, +\infty[$**
Signe F'	–	+	–	+
F	↓	↑	↓	↑

Per tant, **F és decreixent en $]-\infty, -1/2[\cup]0, 1/2[$ i creixent en $]-1/2, 0[\cup]1/2, +\infty[$.**

Pel teorema 3, F té en **x = –1/2** i en **x = 1/2** un **mínim relatiu** de valor F(–1/2) = F(1/2) = **–1/4**, i en **x = 0** un **màxim relatiu** de valor F(0) = **0.**

13 Obtén els intervals de creixement i classifica els extrems relatius de les següents funcions:

(A) $3x^4 - 4x^3$ (B) $f(x) = x^2 - 4|x|$ (C) $f(x) = |x^2 - 4x|$ (D) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ (E) $f(x) = e^x + 4e^{-x}$

(F) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (G) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (H) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (L) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 18 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ x^2 - 10x + 25 & \text{si } 5 < x \leq 6 \end{cases}$

(I) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ (J) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (K) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$

➢ Teorema 4. Criteri del signe de la segona derivada

El següent teorema permet classificar els extrems relatius amb l'ús de la segona derivada. El mètode és més ràpid però les condicions són més restrictives que les del teorema 3 ja que és necessària la derivabilitat primera i segona de la funció en el punt i a més, no sempre aconseguim classificar els extrems relatius.

Considerem una funció f dues vegades derivable en x_0, tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ (x_0 és un punt crític):

(1) Si $\mathbf{f''(x_0) > 0}$ → **f té un mínim relatiu en x_0**

(2) Si $\mathbf{f''(x_0) < 0}$ → **f té un màxim relatiu en x_0**

(3) Si $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ → **no podem assegurar res**

Demostrem l'apartat (1), els altres es realitzen anàlogament. Considerem x_0 l'únic punt crític en $]a, b[$: $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) > 0$, aleshores $f''_-(x_0) > 0$ i $f''_+(x_0) > 0$, i amb la definició de derivada lateral:

- Si $f''_-(x_0) > 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, i com que $f'(x_0) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

  Al ser $x - x_0 < 0$, aleshores $f'(x) < 0$ si $x \in]a, x_0[$ → f és decreixent en l'interval $]a, x_0[$
- Si $f''_+(x_0) < 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, i com que $f'(x_0) = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

  Al ser $x - x_0 > 0$, aleshores $f'(x) > 0$ si $x \in]x_0, b[$ → f és creixent en l'interval $]x_0, b[$

Si f és decreixent en $]a, x_0[$ i creixent en $]x_0, b[$, per definició té un mínim relatiu en x_0.

Exemple 17

Classifiquem els extrems relatius de $\mathbf{f(x) = \sin x + \cos x}$, $\forall \mathbf{x} \in [0, 2\pi]$.

La funció f és derivable 2 vegades en $\mathbb{R}$: $f'(x) = \cos x - \sin x$ i $f''(x) = -\sin x - \cos x$.

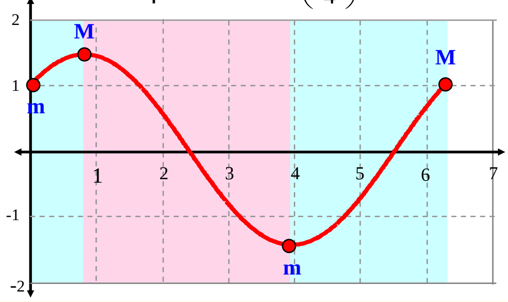
Està definida en un interval tancat per la qual cosa en $x = 0$ i en $x = 2\pi$ tenim extrems relatius.

(1) **Punts crítics**: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{5\pi}{4}$

(2) Apliquem el **criteri de la segona derivada** als punts crítics:

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0$, per tant f té un màxim relatiu en $x = \dfrac{\pi}{4}$, de valor $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{5\pi}{4} - \cos\dfrac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0$, per tant f té un mínim relatiu en $x = \dfrac{5\pi}{4}$, de valor $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.



A més, com què el domini és un interval tancat:

(3) En **x = 0 s'assoleix un mínim relatiu** de valor **1** = f(0) perquè la funció creix fins al màxim relatiu.

(4) En **x=2π s'assoleix un màxim relatiu** de valor **1** = f(2π) perquè des del mínim relatiu ha de créixer fins al màxim relatiu.

14 Obtén els intervals de creixement i classifica els extrems relatius de les següents funcions:

(A) $f(x) = x^3 - 3x$ (B) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (C) $f(x) = x^4 - 2x^3$ (D) $f(x) = \sin 2x$, en $[0, 2\pi]$

(E) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 1$ (F) $f(x) = x^2e^x$ (F) $f(x) = x^2\ln x$ (G) $f(x) = \sin^2 x$, en $[0, 2\pi]$

15 Obtén els valors de a i b perquè la funció cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2$ tinga un extrem relatiu en $x = 1$, de valor 2.

3.6 Càlcul dels extrems absoluts d'una funció

El ***teorema de Weierstrass*** ens assegura que **tota funció contínua el domini de la qual siga un interval tancat i fitat [a, b] assoleix un valor màxim i un valor mínim absoluts**, però en cas de no ser la funció sempre contínua, o el seu domini no ser tancat o fitat, no tenim assegurada la existència o la no existència d'extrems absoluts. La forma de buscar-los la resumim a continuació, i veiem alguns exemples.

1 Obtenim els extrems relatius $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ localitzats entre els punts singulars.

2 Si f és contínua i el domini és un interval tancat [a, b], sempre hi ha extrems absoluts:
(a) El **mínim absolut** de f és el menor dels valors $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.
(b) El **màxim absolut** de f és el major dels valors $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

3 Si f és contínua però el domini no és un interval tancat, els extrems absoluts es troben entre els relatius **només si** els límits de f, cap als extrems de l'interval que constitueixen el domini, **no els invaliden**.

4 Si a més f és discontinua en algun punt x_0, els extrems absoluts es troben entre els relatius **només si** els límits laterals de f en x_0 **no els invaliden**.

Exemple 18

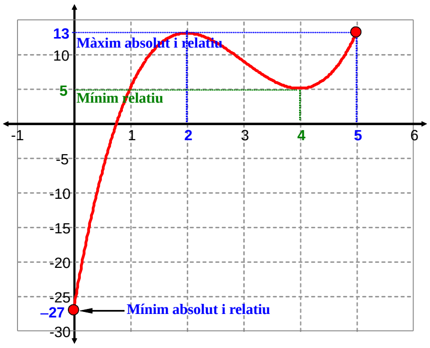
Obtenim els extrems absoluts de la funció $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ en l'interval [0, 5]. Aquesta funció és contínua i l'interval [0, 5] és tancat i fitat. Està garantida l'existència d'extrems absoluts.

- Els punts singulars són:
  (a) Punts no derivables: **x** = **0** i **x** = **5**, en els quals hi ha necessàriament extrems relatius.
  (b) Punts crítics: Com que $f'(x) = 6x^2 - 36x + 48$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 36x + 48 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 2,\ x = 4}$$

- Separació del domini en intervals:]0, 2[,]2, 4[i]4, 5[.
- Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ i $f'(4.5) > 0$:

Intervals	**]0, 2[**	**]2, 4[**	**]4, 5[**
Signe de f'	+	–	+
f	↑	↓	↑



- Per a obtenir els extrems absoluts, calculem el valor de f en els punts singulars x = 0, 2, 4 i 5,:

$f(0) = \mathbf{-27}$ $\quad f(5) = \mathbf{13}$ $\quad f(2) = \mathbf{13}$ $\quad f(4) = \mathbf{5}$

1 El **màxim absolut és 13**, major imatge, que s'assoleix per a x = 2 i per a x = 5.

2 **El mínim absolut és –27**, menor imatge, que s'assoleix per a x = 0.

16 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions:
(A) $f(x) = x^3 - 6x^2$, en [0, 5] i en $\mathbb{R}$. (B) $f(x) = \left|x^3 - 6x^2\right|$, en [0, 5] i en $\mathbb{R}$. (C) $f(x) = \cos x$, en $[0, 2\pi]$.
(D) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 27$ en]0, 5[. (E) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ (F) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Exemple 19

(A) Obtenim els **extrems absoluts** de la funció **$f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$** definida en ℝ.

Encara que f és contínua, com que el seu domini no és un interval tancat i fitat, no tenim garantida l'existència d'extrems absoluts.
Els únics punts singulars són els punts crítics:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0,\ x = 2,\ x = -2}$$

Apliquem el criteri del canvi de signe de la primera derivada per a classificar els extrems relatius:

$f'(-3) = -60 < 0 \ \rightarrow \ f'(x) < 0,\ x\in]-\infty, -2[$
$f'(-1) = 12 > 0 \ \rightarrow \ f'(x) > 0,\ x\in]-2, 0[$
$f'(1) = -12 < 0 \ \rightarrow \ f'(x) < 0,\ x\in]0, 2[$
$f'(3) = 60 > 0 \ \rightarrow \ f'(x) > 0,\ x\in]2, +\infty[$

Intervals	**]–∞, –2[**	**]–2, 0[**	**]0, 2[**	**]2, +∞[**
Signe f '	–	+	–	+
f	↓	↑	↓	↑

Tenim mínims relatius en x = –2 i x = 2, i un màxim relatiu en x = 0.

Per a obtenir els extrems absoluts, si n'hi ha, calculem el valor de f en els extrems relatius x = –2, 0 i 2, i a més el límit quan x tendeix a –∞ i a +∞, ja que f està definida en ℝ =]–∞, +∞[:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^4 - 8x^2 + 9) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^4 - 8x^2 + 9) = +\infty \qquad f(-2) = \mathbf{-7} \qquad f(0) = \mathbf{9} \qquad f(4) = \mathbf{-7}$$

- El **mínim absolut és –7**, menor imatge, que s'assoleix per a **x = –2** i per a **x = 2**.
- **No hi ha màxim absolut** perquè els límits en ±∞ són iguals a +∞, la funció no és fitada superiorment.

(B) Obtenim els **extrems absoluts** de la funció **$g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$** en l'interval [–2, 6].

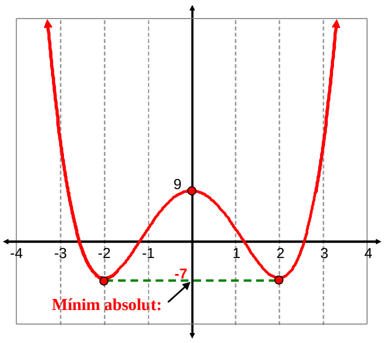
No tenim garantida l'existència d'extrems absoluts al ser g discontínua en x = 2 perquè no existeix g(2).

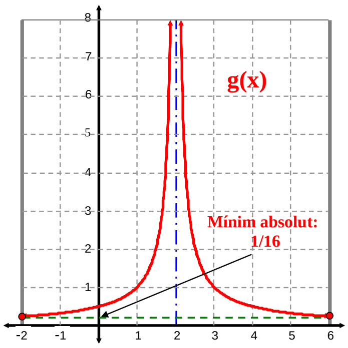
Els únics punts singulars són els extrems de l'interval, x = –2 i x = 6, perquè $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$ no s'anul·la.

Per a obtenir els extrems absoluts, si n'hi ha, calculem el valor de g en x = –2 i 6, i a més el límit quan x tendeix a 2, ja que f no és contínua en aquest punt:

$$g(-2) = \mathbf{1/16} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad g(6) = \mathbf{1/16}$$

- El **mínim absolut és 1/16**, menor imatge, que s'assoleix per a **x = –2** i **x = 6**.
- **No hi ha màxim absolut** perquè el límit en x = 2 és +∞, la funció no està fitada superiorment.





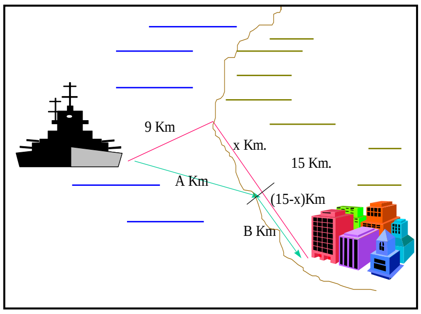
17 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions en els intervals indicats:

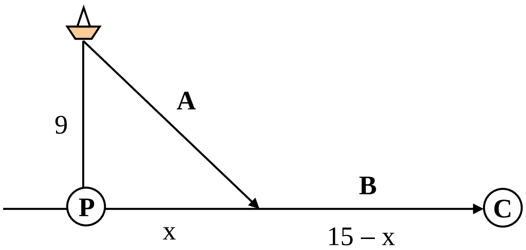
(A) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ en [0, 5] i en]–2, 2[. (B) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ -x+5 & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases}$ en [–1, 5] i en [2, 4[.

3.7 Problemes d'optimització

Exemple 20

Un vaixell, que té la ràdio avariada, es troba ancorat a 9 km del punt P més pròxim a la costa. És precís enviar un missatger a una ciutat C situada a 15 km del punt P de terra més pròxim al vaixell. Si el missatger pot caminar a 5 km/h i remar a 4 km/h, en quin punt de la costa (entre P i C) haurà de desembarcar per a arribar a la ciutat en el menor temps possible?. I per a tardar el major temps possible?





(A) Constitució de la funció que expressa el temps utilitzat per a arribar a la ciutat.

Anomenem **x** a la distància en km des de P fins al punt on desembarca el missatger. Òbviament, $\mathbf{0 \le x \le 15}$.
El valor x = 0 significa que el missatger desembarca en P, i x = 15 significa que desembarca en la ciutat C.
La distància a recórrer (remant i caminant) serà:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \sqrt{9^2 + x^2} + (15 - x)$$

Així el temps utilitzat, en funció de x, ve expressat per

$$\mathbf{f(x)} = \frac{A}{4} + \frac{B}{5} = \mathbf{\frac{1}{4}\sqrt{81 + x^2} + \frac{1}{5}(15 - x)}, \text{ amb } \mathbf{0 \le x \le 15}.$$

(B) Optimització de la funció. Recerca del màxim i mínim absoluts.

$$\text{f és derivable en }]0, 15[\text{ i } f'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}$$

- **Punts singulars**: **x** = **0** i **15** (extrems de l'interval) i **x** = **12** (per anul·lar-se la derivada).

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} = \frac{1}{5} \iff 5x = 4\sqrt{81 + x^2} \iff 25x^2 = 1296 + 16x^2 \iff \mathbf{x = 12}$$

També seria $x_2 = -12$, però no pertany al domini de la funció (no hi ha distàncies negatives).

Separació del domini en intervals:]0, 12[i **]12, 15[**

Com que f passa de ser decreixent a ser creixent en x = 12, té un mínim relatiu.

Com que **x = 0** i **x = 15** són els extrems del domini, i f és contínua, aleshores f assoleix en ells extrems relatius.

Intervals	]0, 12[	]12, 15[
Signe f '	–	+
f	↓	↑

- **Extrems absoluts**. Es troben entre els extrems relatius. Comparem les imatges de 0, 12 i 15:

f(12) = 4.35 (mínim absolut) **f(0) = 5.25 (màxim absolut)** f(15) ≃ 4.37

El major temps (5.25 hores) amb el qual s'aplega a la ciutat és desembarcant en P (x = 0) i el menor temps, 4.35 hores, desembarcant a 12 km de P.

18 Obtén les dimensions del rectangle de menor perímetre de tots els que tenen un àrea de 25m^2.

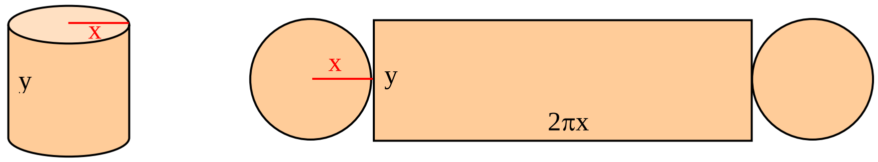
19 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea de tots els que tenen un perímetre de 100 m.

Exemple 21

Una empresa, que fabrica pots cilíndrics d'1 m^3 de volum, vol emprar en la seua construcció la menor quantitat possible de material. Quines dimensions han de tenir els pots?

(A) **Constitució de la funció que expressa la quantitat de material (l'àrea) utilitzat en el pot**.

Anomenem **x** al radi de la circumferència de la base i **y** a l'altura del pot.



El material utilitzat en el pot és la suma de les àrees de dos cercles i un rectangle; ve donat per

$$\mathbf{f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y}$$

que és una funció amb dues variables, x i y.

Com que el volum del pot (àrea de la base per l'altura) ha de ser d'1 m^3, es té la condició

$$\mathbf{\pi x^2 \cdot y = 1} \qquad (1)$$

que ens permet (aïllant y en (1)) expressar la funció M com una funció d'una única variable:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy \\ \text{amb} \quad \pi x^2 y = 1 \;\rightarrow\; \mathbf{y = \dfrac{1}{\pi x^2}} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{f(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}}, \;\; \forall \mathbf{x > 0}$$

(B) **Optimització de la funció. Recerca del mínim absolut.**

Obtenim el mínim absolut de f(x) en l'interval]0, +∞[. La funció és derivable:

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}, \;\text{ per a } x > 0.$$

Punts singulars: l'únic s'obté d'igualar a 0 la derivada:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\pi x = \frac{2}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{1}{2\pi} \;\rightarrow\; \mathbf{x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.5419}$$

Separació del domini en intervals: $\left]\mathbf{0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}}\right[$ i $\left]\mathbf{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, +\infty}\right[$.

Intervals	$\left]0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right[$	$\left]\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, +\infty\right[$
Signe f '	–	+
f	↓	↑

Com que f passa de decréixer a créixer en $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, aleshores f té en aquest punt un mínim relatiu.

La funció decreix en el primer interval i creix en el segon per la qual cosa **el mínim relatiu és absolut**. Les dimensions seran:

$$\mathbf{x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.5419\text{ m}},\; \mathbf{y \simeq 1.0838\text{ m}} \text{ i la quantitat de material } f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) \simeq \mathbf{5.5358\text{ m}^2}.$$

20 Obtén les dimensions d'un triangle isòsceles si el seu perímetre mesura 120 cm i l'àrea ha de ser màxima.

21 Calcula les dimensions i la màxima àrea que pot tenir un rectangle inscrit en una circumferència de radi 4 m.

22 Calcula les dimensions i el major volum que pot tenir un cilindre inscrit en una esfera de radi r = 3 cm.

23 Quines dimensions ha de tenir un brick de llet, d'un litre de capacitat si la seua altura és de 5 cm, per a utilitzar la menor quantitat possible de material? Quina és eixa quantitat mínima de material?

3.8 Curvatura

Una lent de contacte situada entre dos observadors presenta diferent curvatura, ***còncava*** i ***convexa***, per a cadascun d'ells. Per tant la ***curvatura*** d'una gràfica requereix un sistema de referència. Considerem que l'observador està situat en la part superior de l'eix OY.

Recordem que l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció f en x_0 és:

$$t:\ \mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Considerem una funció f qualsevol i un punt $\mathbf{x_0}$ **en què f és derivable**.

- Diem que f és ***còncava en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la gràfica de f està representada per damunt de la recta tangent en x_0, és a dir,

$$\mathbf{f(x) > T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ \mathbf{x \neq x_0}$$

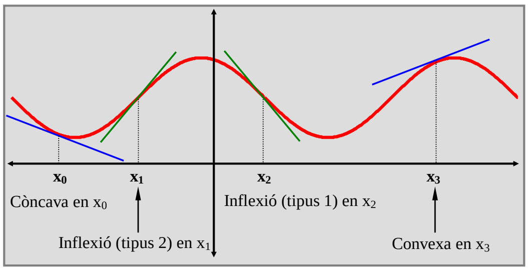
- Diem que f és ***convexa en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la gràfica de f està representada per davall de la recta tangent en x_0, és a dir,

$$\mathbf{f(x) < T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ \mathbf{x \neq x_0}$$

- Diem que f té una ***inflexió en*** $\mathbf{x_0}$ si existeix un entorn de x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en què la recta tangent en x_0 travessa la gràfica de la funció. Pot ocórrer de dues formes:

  (1) $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$

  (2) $\mathbf{f(x) < T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0[$ i $\mathbf{f(x) > T(x)}$, per a $\mathbf{x} \in]x_0, x_0 + \delta[$



➢ Teorema 5: condicions suficients de curvatura

Considerem una funció f dues vegades derivable en un entorn de x_0.

- Si $\mathbf{f''(x_0) > 0} \quad \rightarrow \quad$ **f és còncava en** $\mathbf{x_0}$
- Si $\mathbf{f''(x_0) < 0} \quad \rightarrow \quad$ **f és convexa en** $\mathbf{x_0}$
- Si $\mathbf{f''(x_0) = 0} \quad \rightarrow \quad$ **No podem assegurar res**

Vegem únicament el primer cas. El segon es dedueix de manera anàloga.

$$\text{Si} \quad f''(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad (1)$$

Aleshores: si $\mathbf{x < x_0} \quad \rightarrow \quad f'(x) < f'(x_0)$ i si $\mathbf{x > x_0} \quad \rightarrow \quad f'(x) > f'(x_0)$ (2)

Apliquem el TVM als anteriors intervals: $f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0)$ amb x_1 entre x i x_0.

Si $x < x_0$, com $f'(x_1) < f'(x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) > T(x)$

Si $x > x_0$, com $f'(x_1) > f'(x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_1)\,(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \rightarrow \quad f(x) > T(x)$

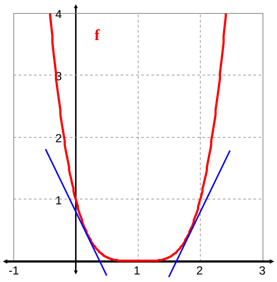
Com que $\mathbf{f(x) > T(x)} \quad \forall \mathbf{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ **i** $\mathbf{x \neq x_0} \quad \rightarrow \quad$ **f és còncava en** $\mathbf{x_0}$**.**

Exemple 22

(A) Considerem la funció $f(x) = (x-1)^4$ que és derivable dues vegades en $\mathbb{R}$.

Les derivades són $f'(x) = 4(x-1)^3$ i $f''(x) = 12(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

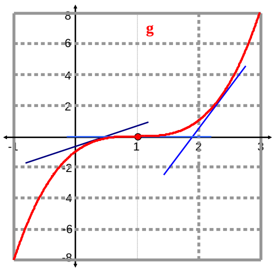
- Com que $f''(0) = 1 > 0 \;\rightarrow\;$ f és còncava en x = 0.
- Com que $f''(2) = 1 > 0 \;\rightarrow\;$ f és còncava en x = 1.
- Com que $f''(1) = 0$, no podem assegurar res.



(B) Considerem la funció $g(x) = (x-1)^3$ que és derivable dues vegades en $\mathbb{R}$.

Les derivades són $g'(x) = 3(x-1)^2$ i $g''(x) = 6(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $g''0) = -1 < 0 \;\rightarrow\;$ f és convexa en x = 0.
- Com que $g''(2) = 1 > 0 \;\rightarrow\;$ f és còncava en x = 2.
- Com que $g''(1) = 0$, no podem assegurar res.



La representació de les dues funcions ens mostra que f és còncava en x = 1, encara que $f''(1) = 0$, i que g té una inflexió en x = 1, sent $g''(1) = 0$. Veiem com en cas de ser 0 la segona derivada, pot ocórrer qualsevol cosa.

➢ Definició de curvatura d'una funció en un interval

Diem que f és ***còncava*** (***convexa***) ***en l'interval* I** si és còncava (convexa) en cadascun dels punts de l'interval I.

Exemple 23

Considerem la funció $g(x) = (x-1)^3$ de l'exemple 22, amb derivada segona $g''(x) = 6(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- Si $x > 1 \;\rightarrow\; x - 1 > 0 \;\rightarrow\; g''(x) = 6(x-1) > 0 \;\Rightarrow\;$ g és còncava en x, si x > 1
- Si $x < 1 \;\rightarrow\; x - 1 < 0 \;\rightarrow\; g''(x) = 6(x-1) < 0 \;\Rightarrow\;$ g és convexa en x, si x < 1

Per tant, **g és convexa en l'interval $]-\infty, 1[$ i còncava en l'interval $]1, +\infty[$** $\;\Rightarrow\;$ **En x = 1 g té una inflexió**.

Pel teorema 5, els únics punts derivables dues vegades on pot canviar la curvatura d'una funció són els de derivada segona nul·la. En l'exemple 22A no ocorre mentre que en l'exemple 22B sí. A més, si no es verifica el teorema 5 també podria ocórrer. Axó dona peu a la següent definició.

➢ Punts singulars de la funció derivada d'una funció

Anomenem ***punts singulars*** de la funció derivada d'una funció f a aquells punts:

- del domini de f que són solució de $\mathbf{f''(x) = 0}$, anomenats ***punts crítics de la derivada***,
- del domini de f en els quals ***f no és derivable dues vegades***.

24 Comprova la curvatura de les funcions següents en els punts x = −1, 0, 1 i 2:

(A) $f(x) = x^2$ (B) $f(x) = x^3 - 3x$ (C) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (D) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ (E) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

➢ Teorema 6: condició necessària de punt d'inflexió

Si una funció f, dues vegades derivable en x_0, té un punt d'inflexió en x_0 $\Rightarrow$ $\mathbf{f''(x_0) = 0}$

El teorema 6, de demostració similar a la del teorema 2, mostra que els **únics punts del domini d'una funció derivable dues vegades on es pot assolir una inflexió són** les solucions de l'equació $\mathbf{f''(x) = 0}$. A més, **els punts no derivables dues vegades també poden assolir inflexions.** El teorema 7, de demostració semblant a la del teorema 3, estableix unes condicions suficients per a assolir un punt d'inflexió.

➢ Teorema 7: criteri del canvi de signe de la segona derivada

Siga f contínua en [a, b] i derivable 2 vegades en]a, b[excepte la segona derivada en $x_0 \in$]a, b[:

- Si f'' > 0 en]a, x_0[i f'' < 0 en]x_0, b[(o al revés) $\rightarrow$ **f té una inflexió en x_0**
- Si f'' no canvia de signe f no té una inflexió en x_0.

➢ La curvatura d'una funció en un domini D

Per a estudiar els intervals de concavitat i convexitat d'una funció f en un domini D:

- Obtenim els **punts singulars de f'** en D, i els ordenem de menor a major: $\mathbf{x_1 < x_2 < \ldots < x_n}$.
- El domini queda dividit pels punts singulars en intervals: **]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, ..,]x_n, b[**, on a pot ser $-\infty$ i b pot ser $+\infty$. S'anomenen ***intervals de concavitat i convexitat*** i **en cada un** la derivada **f'' té signe constant**.
- Estudiant el **signe de f'' en un punt** de cada interval tenim el signe en tot l'interval.

En els punts singulars de f' la funció f pot assolir inflexions. **Amb els intervals de concavitat i convexitat i el teorema 7 obtenim les inflexions**, situades sempre en punts derivables.

Exemple 24

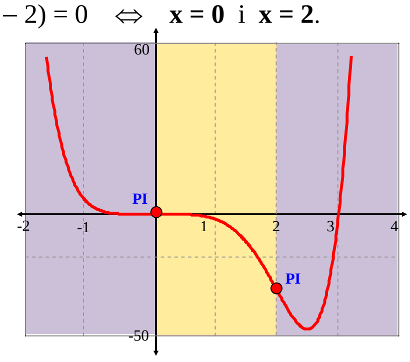
Obtenim els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció $\mathbf{f(x) = x^6 - 3x^5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La funció és derivable dues vegades derivable en $\mathbb{R}$ i les derivades són $f'(x) = 6x^5 - 15x^4$ i $f''(x) = 30x^4 - 60x^3$.

- **Punts singulars de f'**: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^4 - 60x^3 = 0 \Leftrightarrow 30x^3(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ **x = 0** i **x = 2**.
- **Intervals de concavitat i convexitat**: **]$-\infty$, 0[,]0, 2[** i **]2, $+\infty$[**.
- **Signe de la segona derivada en un punt de cada interval**:

$f''(-1) = 90 > 0$, $f''(1) = -30 < 0$ i $f''(3) = 810 > 0$

Intervals	]$-\infty$, 0[	]0, 2[	]2, $+\infty$[
Signe de f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava



La funció és **còncava en]$-\infty$, 0[$\cup$]2, $+\infty$[i convexa en]0, 2[.**

En **x = 0 i en x = 2** canvia de signe la segona derivada, pel teorema 7, **f té una inflexió en x = 0 i en x = 2.**

Exemple 25

Obtenim els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció:

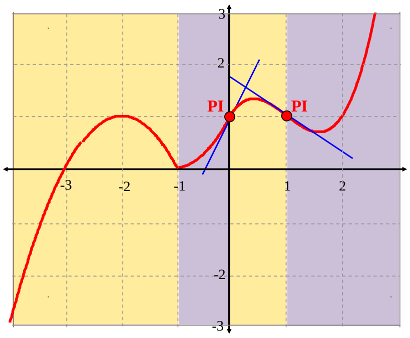
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comprova que f és contínua en ℝ, derivable en ℝ~{ −1}, i dues vegades derivable en ℝ~{0, −1}, sent:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 6x - 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **Punts singulars de f' :**
  - Punts crítics de la primera derivada: $f''(x) = 0 \iff 6x - 6 = 0 \iff \mathbf{x = 1}$
  - Punts no derivables dues vegades: **x = −1,** per no ser f una vegada derivable en ell.
    x = 0, per no ser f derivable per segona vegada en ell.

- **Intervals de concavitat i convexitat**:
  ]−∞, −1[,]−1, 0[,]0, 1[i]1, +∞ [



- **Signe de f'' en un punt de cada interval**:

$f''(-2) = -2 < 0$, $f''(-0.5) = 2 > 0$, $f''(0.5) = -3 < 0$ i $f''(2) = 6 > 0$

Intervals	]−∞, −1[	]−1, 0[	]0, 1[	]1, +∞[
Signe de f''	–	+	–	+
f	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava

Per tant **f és convexa en]−∞, −1[∪]0, 1[i còncava en]−1, 0[∪]1, +∞ [**

- En x = −1 **no hi ha inflexió perquè f no és derivable**, encara que en els intervals que connecten amb ell la segona derivada canvia de signe. Recordem que en un punt d'inflexió, la recta tangent ha de travessar la gràfica de f, i no hi ha recta tangent quan f no és derivable.
- **En x = 0 i en x = 1** la funció sí que és derivable una vegada, i pel teorema 7, com la segona derivada canvia de signe en ells, podem dir que **f té una inflexió en x = 0 i en x = 1**. Els punts són $PI_0(0, 1)$ i $PI_1(1, 1)$.

25. Estudia els intervals de concavitat i convexitat i les inflexions de les següents funcions:

(A) $f(x) = x^2 + 3x$ (B) $f(x) = x^3 - 3x$ (C) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ (D) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(E) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (F) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ (G) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{x}$ (H) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

(I) $f(x) = x^2e^{-x}$ (J) $f(x) = xe^{-x^2/2}$ (K) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (L) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (M) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(N) $f(x) = \sin x$, en $[-\pi, 3\pi]$ (Ñ) $f(x) = x + \sin x$, en $[-\pi, 3\pi]$ (O) $f(x) = \cos^2 x$, en $[0, 2\pi]$

(P) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 18 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ x^2 - 10x + 25 & \text{si } 5 < x \leq 6 \end{cases}$ (Q) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 3 + \cos x & \text{si } \pi/2 < x \leq 3\pi/2 \\ 2 + \sin x & \text{si } 3\pi/2 < x \leq 2\pi \end{cases}$

➢ Teorema 8. Criteri del signe de la tercera derivada

El següent teorema permet classificar els punts d'inflexió amb l'ús de la tercera derivada, de forma anàloga al teorema 4 per a classificar els extrems relatius. Però al igual que en el teorema 4, les condicions són més restrictives, ja que és necessari la tercera derivada, i a més, no sempre obtenim la resposta.

> Considerem una funció f tres vegades derivable en x_0, tal que $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ (punt crític de f'):
> - Si $\mathbf{f'''(x_0) \neq 0}$ → **f té una inflexió en x_0**
> - Si $\mathbf{f'''(x_0) = 0}$ → **No podem assegurar res**

Exemple 26

Obtenim les inflexions de $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ 2-\cos x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

F és derivable dues vegades en tots els punts de]–π, π[excepte en x = 0, on només ho és una vegada.

A més $F'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$, $F''(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$ i $F'''(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -\sin x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

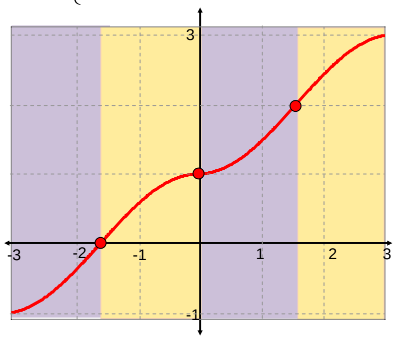
- **Punts crítics de la primera derivada**:

$$\mathbf{F''(x) = 0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\cos x = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{x = -\pi/2} \\ \cos x = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{x = \pi/2} \end{cases}$$

- **Apliquem el criteri de la tercera derivada a aquests punts:**

$F'''(-\pi/2) = \sin(-\pi/2) = -1 \neq 0$ ⇒ **Hi ha inflexió en x = –π/2.**

$F'''(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \neq 0$ ⇒ **Hi ha inflexió en x = π/2.**



A més en x = 0 podria tenir inflexió per ser un punt no derivable per segona vegada i, com que no podem aplicar el criteri de la tercera derivada, tenim que utilitzar el criteri del canvi de signe de la segona derivada:

- **Intervals a considerar**: **]–π, –π/2[**, **]–π/2, 0[**, **]0, π/2[** i **]π/2, π[**.
- **Signe de la segona derivada** en un punt de cada un: F''(–3π/4) > **0**, F''(–π/4) = < **0**, F''(π/4) > **0** i F ''(3π/4) < **0**.

Intervals	**]–π, –π/2[**	**]–π/2, 0[**	**]0, π/2[**	**]π/2, π[**
Signe de F''	F''(–3π/4) > **0**	F''(–π/4) = < **0**	F''(π/4) > **0**	F ''(3π/4) < **0**
F	**Còncava**	**Convexa**	**Còncava**	**Convexa**

En x = 0 canvia el signe de la segona derivada per tant **hi ha inflexió en x = 0**.

26 Troba les inflexions de les funcions:
(A) $f(x) = x^5 - 10x^2$ (B) $f(x) = x^5 - 10x^3$ (C) $f(x) = x^5 - 10x^4$ (D) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

27 Demostra que tota funció polinòmica de grau 2 és sempre còncava o sempre convexa, i no té punts d'inflexió.

28 Demostra que tota funció polinòmica de grau 3 té un únic punt de inflexió.

29 Demostra que si n és parell, la funció $f(x) = x^n$ és còncava en ℝ i no té cap punt d'inflexió.

30 Demostra que si n és imparell, n > 1, la funció $f(x) = x^n$ és convexa en]–∞, 0[i còncava en]0, +∞[, i té una inflexió en x = 0.

Exemple 27

La següent funció reflexa la quantitat de pluja (en litres/m^2) arreplegada en una estació meteorològica durant les 13 hores que va durar una tempesta:

$$f(t) = -\frac{1}{10}\left(t^3 - 18t^2 - 40t\right), \text{ amb } 0 \le t \le 13$$

Després de les 2 primeres hores de tempesta la quantitat de litres arreplegats foren f(2) = 14.4, i després de les 4 primeres f(4) = 38.4. El nombre mitjà de litres arreplegats en els intervals [0, 2] i [2, 4] és la variació mitjana:

$$\mathbf{VM_{[0,\,2]}} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \mathbf{7.2 \text{ litres/hora}} \qquad \mathbf{VM_{[2,\,4]}} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \mathbf{12 \text{ litres/hora}}$$

La intensitat de la pluja en cada instant de temps ve mesurada per la variació instantània, és a dir, la derivada en el moment considerat. Així obtenim per exemple la intensitat de la pluja a les 2 hores:

$$f'(t) = -\frac{1}{10}\left(3t^2 - 36t - 40\right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{f'(2) = 10 \text{ litres/hora}}$$

En quin instant de temps plou amb més intensitat? La intensitat de la pluja serà màxima en l'instant t en el qual s'assoleix el **màxim absolut de f '(t)**; obtenim el punt crític de la derivada f ':

$$f''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{10}(6t-36) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 6}$$

Entre els valors t = 0, 6 i 13 es trobarà el màxim absolut de f ' (existeix perquè f ' és contínua en l'interval tancat)

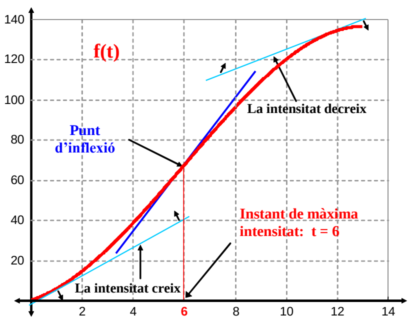
$f'(0) = 4$ $\quad$ $\mathbf{f'(6) = 14.8}$ $\quad$ $f'(13) = 0.1$ $\quad \Rightarrow \quad$ la màxima intensitat s'assoleix en **t = 6**

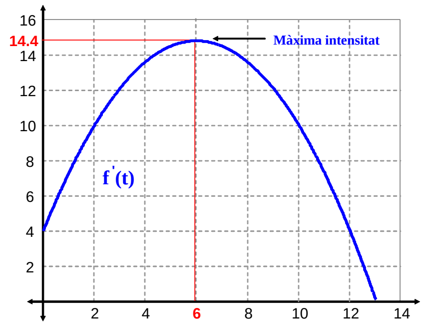
El signe de la segona derivada indica els instants en què la intensitat de la pluja augmenta o disminueix:

Intervals	**[0, 6[**	**]6, 13]**
Signe f ''	+	–
f	**còncava**	**convexa**

En [0, 6] tenim que f '(t) creix mentre que en [6, 13] f '(t) decreix; en t = 6 s'assoleix la màxima intensitat de pluja. Des d'aquest instant, la intensitat de la pluja comença a decréixer; s'anomena punt de ***rendiments decreixents***.

En t = 6 la funció f, quantitat de pluja, té una inflexió, i la intensitat f ' té el seu valor màxim.





31 Obtén els valors de m per als quals la funció f(x) = $x^3 + mx^2 + nx$ té un punt d'inflexió en P(1, 2).

32 Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ té un punt d'inflexió en P(1, 2), i el pendent de la recta tangent en eixe punt és –1.

33 Obtén l'únic punt d'inflexió de la funció f(x) = $e^x - e^{-x}$.

34 Obtén el pendent de la recta tangent a la corba $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ en els seus punts d'inflexió.

35 Un transportista entrega, durant la jornada laboral de 10 hores, una quantitat de kg de carga donada per la funció f(t) = $-t^3 + 18t^2 + 12t$. Quan haurà entregat la major quantitat de carga? En quin instant és més eficient i quin significat té aquest instant? Et pareixen lògics els resultats obtinguts?

3.9 Representació gràfica de funcions

Amb el càlcul de les derivades d'una funció tenim quasi tots els elements necessaris per a descriure la seua gràfica: els màxims i mínims, que separen les regions de creixement i decreixement, i els punts d'inflexió, que separen les regions de distinta curvatura. Però hem d'estudiar el comportament de les funcions en les proximitats dels seus punts de discontinuïtat, i en l'infinit a través dels limites finits i infinits. Obtindrem així les seues asímptotes.

➢ Representació gràfica de funcions polinòmiques

Exemple 28

Representem la funció polinòmica $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Les funcions polinòmiques són contínues en $\mathbb{R}$, per la qual cosa no tenen asímptotes verticals. Tampoc tenen asímptotes horitzontals ni obliqües (excepte les de grau 0 i 1, que són rectes) perquè

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

Les funcions polinòmiques són funcions derivables en $\mathbb{R}$, per la qual cosa l'estudi de les equacions

(1) $f(x) = 0$ **(2) $f'(x) = 0$** **(3) $f''(x) = 0$**

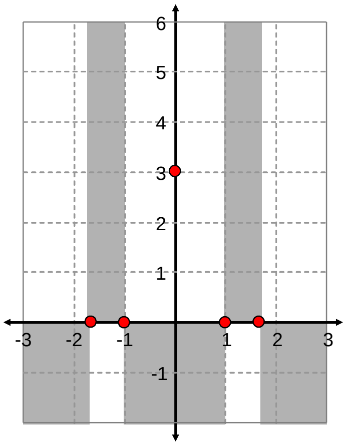
proporciona els talls amb l'eix OX (1), els possibles extrems relatius (2) i les possibles inflexions (3).

(1) **$f(x) = 0$** $\rightarrow$ $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ $\rightarrow$ **$x = \pm 1, \pm\sqrt{3}$**

Intervals	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3}, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, \sqrt{3}[$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
Signe f	+	–	+	–	+

Els talls amb l'eix OX són **($-\sqrt{3}$, 0)**, **(–1, 0)**, **(1, 0)** i **($\sqrt{3}$, 0)**.

A més, el tall amb l'eix OY és (0, f(0)), és a dir, **(0, 3)**.



La gràfica de f passa pels punts de tall marcats, però no ho fa per les regions ombrejades.

(2) **$f'(x) = 0$** $\rightarrow$ $4x^3 - 8x = 0$ $\rightarrow$ **$x = 0, \pm\sqrt{2}$**

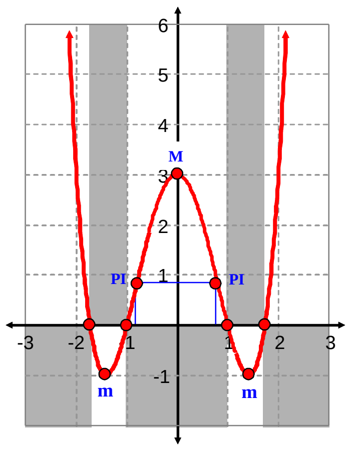
Intervals	$]-\infty, -\sqrt{2}[$	$]-\sqrt{2}, 0[$	$]0, \sqrt{2}[$	$]\sqrt{2}, +\infty[$
Signe f'	–	+	–	+
f	↓	↑	↓	↑

Mínim **m($-\sqrt{2}$, –1)** Màxim **M(0, 3)** Mínim **m($\sqrt{2}$, –1)**

(3) **$f''(x) = 0$** $\rightarrow$ $12x^2 - 8 = 0$ $\rightarrow$ **$x = \pm\sqrt{2/3}$**

Intervals	$]-\infty, -\sqrt{2/3}[$	$]-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}[$	$]\sqrt{2/3}, +\infty[$
Signe f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava

Inflexió **PI$\left(-\sqrt{2/3},\ 7/9\right)$** Inflexió **PI$\left(\sqrt{2/3},\ 7/9\right)$**



➢ Representació gràfica de funcions racionals

Exemple 29

Representem la funció racional $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$.

Les derivades són $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ i $f''(x) = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$.

Als passos indicats en l'exemple anterior, afegim el càlcul d'asímptotes.

- Com que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$ i $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$, les rectes **x = –1**, **x = 1** són **asímptotes verticals**.

  L'estudi del signe de la funció ens assegurarà les direccions de les branques infinites, si bé podríem fer-ho amb els límits laterals.

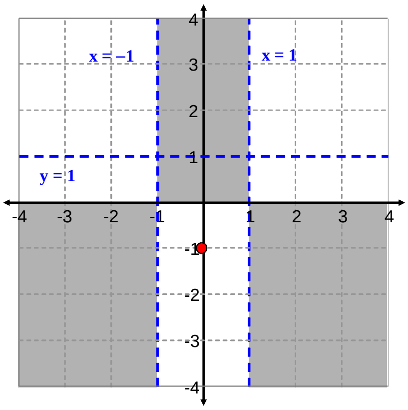
- Com que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$, la recta **y = 1** és **asímptota horitzontal bilateral**.

  Com que hi ha asímptota horitzontal bilateral, no pot haver-hi asímptotes obliqües.

(1) **f(x) = 0** $\to$ $x^2 + 1 = 0$ no té solució; f no talla l'eix OX.

El signe de f pot canviar en els punts de **discontinuïtat {–1, 1}**.

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f	+	–	+



El punt de tall amb l'eix OY és (0, f(0), és a dir, **(0, –1)**.

(2) **f '(x) = 0** $\to$ $-4x = 0$ $\to$ **x = 0**

Afegim els punts de discontinuïtat **{–1, 1}** a l'estudi **del signe de f '**:

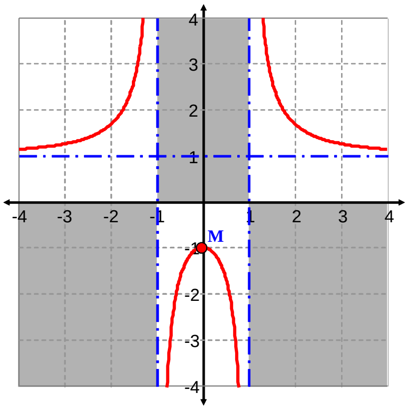
Intervals	]–∞, –1[	]–1, 0[	]0, 1[	]1, +∞[
Signe f '	+	+	–	–
f	↑	↑	↓	↓

Discont. Màxim Discont.
M(0, –1)

(3) **f ''(x) = 0** $\to$ $12x^2 + 4 = 0$ no hi ha punts d'inflexió.

No obstant, la curvatura pot canviar en les discontinuïtats.

Intervals	]–∞, –1[	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f ''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava



36 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = -x^3 + 6x^2$ (B) $f(x) = x^5 - 5x^3$ (C) $f(x) = 4x^2 - x^4$ (D) $f(x) = x^4 - 2x^3$

(E) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (F) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ (G) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ (H) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ (I) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

Exemple 30

Representem la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ les derivades de la qual són:

$$f'(x)=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad\qquad f''(x)=\frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

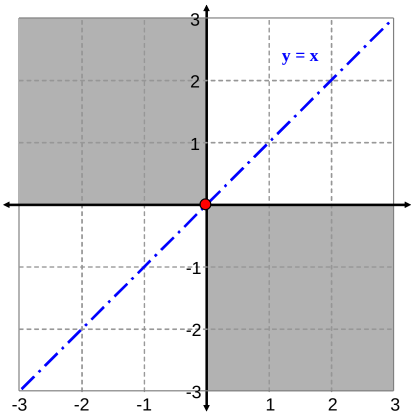
- Com que $D_f=\mathbb{R}$ no hi ha asímptotes verticals.
- Com que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}=-\infty$ no hi ha asímptotes horitzontals.
- Hi ha asímptota obliqua bilateral **y = x**:

$$\mathbf{m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\mathbf{1}\ \text{ i }\ \mathbf{n}=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\mathbf{0}$$

(1) $\mathbf{f(x)=0}$ $\rightarrow$ $x^3=0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x=0}$

Intervals	$]-\infty,0[$	$]0,+\infty[$
Signe f	–	+

Passa per **(0, 0)**, que és el punt de tall amb els dos eixos.



(2) $\mathbf{f'(x)=0}$ $\rightarrow$ $x^4+3x^2=0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x=0}$

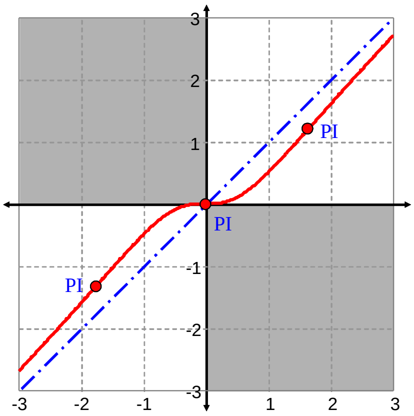
Intervals	$]-\infty,0[$	$]0,+\infty[$
Signe f'	+	+
f	↑	↑

f és sempre **creixent**, **no té ni màxims ni mínims**.

(3) $\mathbf{f''(x)=0}$ $\rightarrow$ $6x-2x^3=0$ $\rightarrow$ $\mathbf{x=0,\pm\sqrt{3}}$

Intervals	$]-\infty,-\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},0[$	$]0,\sqrt{3}[$	$]\sqrt{3},+\infty[$
Signe f''	+	–	+	–
f	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa

Inflexió $\mathbf{PI\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$ **Inflexió** **PI(0, 0)** **Inflexió** $\mathbf{PI\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$



37 Representa gràficament les següents funcions racionals:

(A) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ (B) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ (C) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x}$ (D) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$

(E) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}$ (F) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (G) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (H) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

➢ Representació gràfica d'altres funcions

Exemple 31

Representem la funció $f(x) = x + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Les derivades són $f'(x) = 1 + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i $f''(x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $D_f = \mathbb{R}$, **no hi ha asímptotes verticals**.
- Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sin x) = -\infty$ **no hi ha asímptotes horitzontals**.
- No hi ha asímptotes obliqües, perquè no s'obté n (encara que sí m) (és només una direcció asimptòtica):

$$\mathbf{m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{n} = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \sin x - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \sin x \quad \textbf{que no existeix}$$

(1) $\mathbf{f(x) = 0} \rightarrow x + \sin x = 0 \rightarrow \mathbf{x = 0} \rightarrow$ passa per **(0, 0)**, punt de tall amb els dos eixos.

Intervals	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
Signe f	–	+

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \rightarrow 1 + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow \mathbf{x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$
Observa que $-1 \le \cos x \le 1 \rightarrow 1 + \cos x \ge 0 \rightarrow \mathbf{f'(x) \ge 0}$
Per la qual cosa és sempre **creixent, i en els punts singulars no hi ha extrems relatius**.

Intervals	....	$]-3\pi, -2\pi[$	$]-\pi, 0[$	$]\pi, 2\pi[$	....
Signe f''		+	+	+	
f	↑	↑	↑	↑	↑

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \rightarrow -\sin x = 0 \rightarrow \mathbf{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

Intervals	....	$]-4\pi, -3\pi[$	$]-3\pi, -2\pi[$	$]-2\pi, -\pi[$	$]-\pi, 0[$	$]0, \pi[$	$]\pi, 2\pi[$	$]2\pi, 3\pi[$	$]3\pi, 4\pi[$	....
Signe f''		–	+	–	+	–	+	–	+	
f		Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	Convexa	Còncava	

Tenim punts d'inflexió en $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Però el pendent en aquests punts varia:

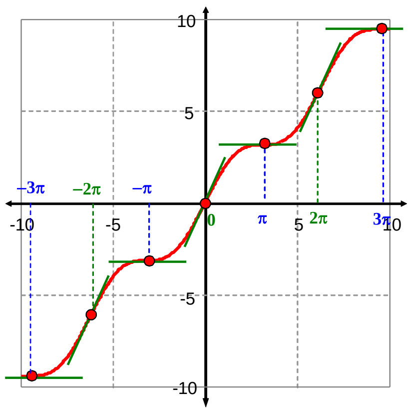
- Si k és imparell, el pendent és 0; per exemple:

  $\mathbf{f''(\pi) = 1 + \cos\pi = 0}$

  (Són els punts singulars de f.)

- Si k és parell, el pendent és 2; per exemple:

  $\mathbf{f''(2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 2}$



Exemple 32

Representem gràficament la “***campana de Gauss***”, donada per la funció $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La funció és derivable en $\mathbb{R}$ dues vegades: $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ i $f''(x) = (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Com que $D_f = \mathbb{R}$, no hi ha asímptotes verticals.
- Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, la recta $y = 0$ **és asímptota horitzontal bilateral**.

(1) $\mathbf{f(x)} = e^{-\frac{x^2}{2}} > \mathbf{0}$, perquè qualsevol funció exponencial és sempre positiva.

El punt de tall amb l’eix OY és **(0, 1)**.

Intervals	]0, +∞[
Signe f	+

(2) $\mathbf{f'(x) = 0} \;\rightarrow\; -x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = 0}$

perquè la part exponencial no pot ser 0.

El màxim relatiu s’assoleix en x = 0 $\Rightarrow$

Intervals	]–∞, 0[	]0, +∞[
Signe f'	+	–
f	↑	↓

M(0,1)

(3) $\mathbf{f''(x) = 0} \;\rightarrow\; (x^2 - 1)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \;\rightarrow$

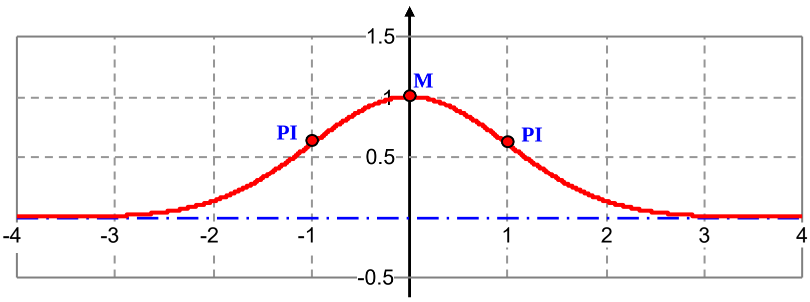
$\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{x = \pm 1}$

(De nou la part exponencial no pot ser 0.)

Les inflexions s’assoleixen en x = ±1 $\Rightarrow$

Intervals	]–∞, –1 [	]–1, 1[	]1, +∞[
Signe f''	+	–	+
f	Còncava	Convexa	Còncava

PI $(-1, e^{-1/2})$ **PI** $(1, e^{-1/2})$



38 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ (B) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (C) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ (D) $f(x) = e^{-|x|}$

(E) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ (F) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ (G) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (H) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

Problemes del capítol 3

1 Estudia el creixement de les següents funcions en els punts $x = -2$, 2 i 4:

$f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $\quad g(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$ $\quad h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\quad t(x) = tg(x + 1)$

2 Obtén els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

(A) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\quad g(x) = x\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\quad h(x) = (x - 4)^3$ $\quad t(x) = \ln(x^3 + 1)$

(B) $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)}$ $\quad g(x) = x\,e^{x-1}$ $\quad h(x) = \ln(x^2 - 1)$ $\quad t(x) = \frac{1}{1-|x|}$

3 La velocitat que porta un motorista en cada instant, durant les 8 hores de recorregut, ve donada per la funció $v(t) = \ln(t + 1)$. Troba els intervals en què va augmentant i disminuint la velocitat. En quins intervals incrementa i disminueix l'acceleració?

4 Obtén els extrems relatius de les funcions:

(A) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $\quad g(x) = -(x - 2)(x + 1)^2$ $\quad h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ $\quad t(x) = x - x^3$

(B) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ $\quad g(x) = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$ $\quad h(x) = x^2 - x^3\sqrt{x}$ $\quad t(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$

(C) $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ $\quad g(x) = \frac{x}{2} - \sin^2 x$ $\quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}$ $\quad t(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

(D) $f(x) = x^4 - 4x^3$ $\quad g(x) = \frac{e^x}{x-1}$ $\quad h(x) = \frac{e^x}{x+1}$ $\quad t(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

(E) $f(x) = |x|e^{-|x|}$ $\quad g(x) = \frac{x^3}{e^x}$ $\quad h(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-4}}$ $\quad t(x) = \sin^2 x$

(F) $f(x) = \sin x + tg\,x$ $\quad g(x) = \sin 2x + 2\sin x$ $\quad h(x) = \sin 2x + 2\cos x$

5 Obtén els extrems relatius de les funcions dels problemes 1 i 2.

6 Obtén els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de les funcions:

(A) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x}\,e^x$ $\quad h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ $\quad t(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$ $\quad p(x) = \frac{10}{1 + e^{-2x+4}}$

(B) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x - 6}$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ $\quad h(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x$ $\quad t(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

7 Estudia el creixement, decreixement, curvatura, màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions $f(x) = x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$, segons que n siga un nombre natural parell o imparell.

8 Obtén els extrems absoluts de les següents funcions en els intervals indicats:

(A) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$. $\quad g(x) = \frac{1}{x^5 + x + 1}$, en $[-1/2, 1]$.

(B) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$, en $[-1, 3[$. $\quad g(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, en $[-3, 3[$.

9 Representa gràficament les funcions:

(A) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ $\quad$ (B) $f(x) = -6x^5 + 11x^3 - 3x$ $\quad$ (C) $f(x) = 6x^6 - 11x^4 + 4x^2$

(D) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ $\quad$ (E) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ $\quad$ (F) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ $\quad$ (G) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

10 Representa gràficament les funcions dels exercicis 1, 2, 4 i 6.

11 Representa gràficament les funcions:

(A) $f(x) = |\ln x|$ (B) $f(x) = \ln|x|$ (C) $f(x) = |\ln|x||$ (D) $f(x) = \ln|\ln|x||$

(E) $f(x) = x^2 - 6|x| + 8$ (F) $f(x) = |x^2 - 6|x| + 8|$ (G) $f(x) = |x^3 - x|$

12 Anomenem funció part entera de x, que representem per E(x), a la funció que associa a cada nombre x el major dels enters menors o iguals que x: $E(x) = \text{màx}\{n \in \mathbb{Z} / n \le x\}$.
Representa gràficament les següents funcions, definides en l'interval [0, 4]:
(A) $f(x) = E(x)$ (B) $f(x) = E(x)^2$ (C) $f(x) = x \cdot E(x)$ (D) $f(x) = E(x^2)$

13 La velocitat d'un mòbil (en km/h) dependent del temps (en hores) ve donada per l'expressió $v(t) = -t^2 + 4t$, en l'interval [0, 4]. Comprova que la funció verifica les hipòtesis del teorema de Rolle i troba el punt que afirma la tesi. Quin significat físic té tal punt? Què ocorre amb les variacions i variacions mitjanes de la funció en els intervals [0, 2] i [2, 4]? I en [0, 4]?

14 Comprova si les següents funcions verifiquen el teorema del valor mitjà. En cas afirmatiu troba el punt que afirma les seues tesis:

$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, en [1, 2] $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x + 1}$, en [–2, 5] $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x < -1 \end{cases}$

15 Considera el segment determinat pels punts A(1, 1) i B(3, 9) en la paràbola $y = x^2$. Troba un punt de la paràbola la recta tangent del qual siga paral·lela a la corda AB.

16 Comprova si les següents funcions verifiquen el teorema de Rolle:
(A) $f(x) = x - x^3$, en [0, 1]. (B) $f(x) = \text{tg}\, x$, en [0, π]. (C) $f(x) = \ln x$, en [1, e].

17 Separa les arrels de les següents equacions:
(A) $x^2 - x + 3 = 0$ (B) $2x^4 - 14x^2 + 14x = 1$ (C) $x^5 + 5x^4 + 2x = -1$
(D) $x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 + x = \dfrac{2}{3}$ (E) $2x^3 - 15x^2 + 36x = -1$ (F) $x^2 - x\sin x - \cos x = 0$

18 Troba els valors de a, b i c perquè la funció següent verifique el teorema de Rolle:
(A) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x + 1 & \text{si } 2 \le x \le c \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx^2 + 4 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

19 Aplica el teorema del valor mitjà a la funció $f(x) = \sin x$ en l'interval [0, a] i dedueix que $\sin x \le x$ per a tot $x \in [0, 2\pi]$.

20 La funció $f(x) = \sqrt{x}$ verifica el teorema del valor mitjà en [0, b], amb b > 0. Existeix un valor de b per al qual el punt que verifica la tesis del teorema és $x_0 = \dfrac{b}{2}$?

21 La funció $f(x) = |x^2 - 5|$ verifica que f(1) = f(3) = 4 però la seua derivada no s'anul·la en cap punt de l'interval]1, 3[. Contradiu el teorema de Rolle?

22 Una funció polinòmica té 3 arrels o zeros, x_1, x_2 i x_3. Demostra que hi ha un punt x_0 on la derivada segona s'anul·la.

23 Donada l'equació $x \sin x + \cos x = x^2$, demostra:
(A) Si x = a és una arrel d'aquesta equació, aleshores x = –a també ho és.
(B) Hi ha una arrel en l'interval]0, π[.
(C) L'equació no té més de dues arrels en la recta real.

24 Siga $P(x)$ un polinomi de grau 4 amb 4 arrels reals distintes. Demostra que la seua derivada té 3 arrels reals distintes, i la seua segona derivada en té 2.

25 Separa les arrels de les següents equacions polinòmiques:
(A) $x^3 = 3x^2 - 1$ (B) $6x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ (C) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3 = 0$

26 Obtén els valors dels paràmetres m i n per als quals la funció $f(x) = x^5 + mx^2 + nx$ té un mínim en $x = 1$ i un punt d'inflexió en $x = -1$.

27 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tinga un punt d'inflexió en P(1, 2) de tangent horitzontal.

28 Obtén la forma general de totes les funcions polinòmiques de grau 3 que passen per (0, 0) i tenen un punt d'inflexió en (1, 1).

29 Obtén els valors de a, b i c per als quals la gràfica de la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tinga un punt d'inflexió en P(–1, –2) i el pendent de la recta tangent en aquest punt siga 4.

30 Obtén els valors de a i de b perquè la funció trigonomètrica $f(x) = a\sin x + b\cos x$ tinga un màxim en el punt $P\left(\pi/6, \sqrt{3}\right)$.

31 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ tinga un punt d'inflexió en $P(\pi/4, 1)$, amb recta tangent de pendent $\sqrt{2}$ en aquest punt.

32 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de la funció $f(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x$ té un punt d'inflexió en $P(\pi/2, 4)$, i la recta tangent en eixe punt té pendent 2.

33 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ té un punt d'inflexió en P(1, 2).

34 Obtén els valors de a i b perquè la funció trigonomètrica $f(x) = (ax + b)e^x$ tinga un punt extrem en P(1, e).

35 Obtén els valors de a, b i c per als quals la gràfica de la funció $f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{3x}$ té un punt d'inflexió en P(0, 1), i la recta tangent en eixe punt té pendent 2.

36 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ tinga un punt d'inflexió en P(0, –2), amb recta tangent de pendent 1 en aquest punt.

37 Obtén els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = axe^x + be^{-x} + c$ tinga un punt d'inflexió en P(0, 1), amb recta tangent de pendent 3 en aquest punt.

38 Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ té un mínim en el punt P(1, 0), i la recta tangent té pendent 1 en $x = 2$.

39 Obtén els valors de a i b per als quals la gràfica de la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ té un mínim en P(0, 2) i un punt d'inflexió en Q(1, 1).

40 Calcula els valors de a, b i c per als quals la següent funció definida a trossos és sempre derivable, i té un màxim en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

41 Obtén l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el punt d'inflexió d'aquesta gràfica.

42 Obtén els punts de la corba $y = \frac{4}{x}$ per als quals les rectes tangents en aquests punts es tallen en P(4, –8).

43 Aplicant la regla de L'Hôpital, calcula els següents límits:

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+\sin x}$ (C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(E) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-\sin x}{\ln x+\cos x}$ (F) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$ (G) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ (H) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(I) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ (J) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x+\sin x}{e^x+\cos x}$ (K) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$ (L) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(M) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ (N) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ (Ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{\sin x}$ (O) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

(P) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}$ (Q) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ (R) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

44 Calcula els següents límits de funcions:

(A) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x+\sin 2\pi x}{\sin 3\pi x}$ (B) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(2+\cos x)}$

45 Obtén l'equació de l'asímptota horitzontal de $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)}$.

46 Classifica les dues discontinuïtats de la funció $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}$, per a $0\le x\le \pi$.

47 Classifica la discontinuïtat de la funció $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & \text{si } x<2\\[2mm] \dfrac{x^3-8}{3x^2-12} & \text{si } x>2\end{cases}$.

48 Donada la funció definida a trossos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x} & \text{si } 0<x<\pi\\ 3\cos x & \text{en altre cas}\end{cases}$.

(A) Obtén el conjunt de punts on és contínua. (B) Classifica les discontinuïtats.

49 La cota de neu assolida (en metres) en un determinat indret, durant les 4 primeres setmanes de l'hivern, es pot expressar amb la funció $f(x) = -(x-1)^3 + 3(x-1)^2$, sent x el temps transcorregut en setmanes.

(A) Calcula la variació mitjana en l'interval [0, 1] i en [1, 2]. Quin és el seu significat?
(B) A quin ritme (velocitat) s'arreplega la neu en l'instant x = 1.5? I en l'instant x = 2? I en x = 2.5?
(C) En quin instant de temps hi ha més neu acumulada? Quina màxima altura assoleix?
(D) En quins instants de temps hi ha menys acumulació de neu? ¿Quina mínima altura assoleix?
(E) En quin instant de temps la velocitat amb què la neu s'acumula és màxima? Quina és eixa màxima velocitat?

50 A partir de 1960, la població en milers de persones d'un poble es va modelitzar amb la funció $P(t)=180-\dfrac{165}{0.03t^2+1}$, on t indica els anys transcorreguts des de 1960.

(A) Segon aquest model, decreixerà la població en algun moment?
(B) Obtén l'instant de temps en què la taxa de creixement és màxima. A quin ritme (velocitat) anual està creixent la població en eixe moment?
(C) Obtén les asímptotes de P(t). Quin és el seu significat?
(D) Representa la funció i la seua funció derivada.

51 Una màquina fabrica un producte amb dues qualitats distintes: una quantitat x de tones de baixa qualitat i una altra quantitat y de tones d'alta qualitat. La relació entre ambdues quantitats és $y = \frac{18-5x}{10-x}$, i sabem que la màquina no produeix més de 9 tones de baixa qualitat. Obtén la quantitat de tones del producte de cada qualitat que s'ha de produir per a obtenir ingressos màxims si el preu per tona de baixa qualitat és 10 000 € i el d'alta qualitat el doble.

52 S'ha comprovat que la relació entre el benefici B obtingut per la venda d'un producte (en milers d'euros) i el temps t (en mesos) que està en el mercat és $B(t) = \frac{100t}{t^2+400}$.

(A) Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció B(t).
(B) Quina informació ens proporcionen els anteriors intervals sobre la evolució dels beneficis al llarg del temps?
(C) Quant de temps ha d'estar el producte en el mercat perquè el benefici siga màxim? Quin és eixe màxim benefici?
(D) Fes una representació gràfica de la funció B(t).

53 La concentració d'ozó contaminant, en micrograms per m^3, en una ciutat durant els anys 90 es pot expressar amb la fórmula $C(x)= 90 +15x - 0.6x^2$, on x és el temps en anys mesurat des de l'1 de gener de 1990.

(A) Obtén el ritme de creixement del període 1990 - 1995, ambdós anys inclosos.
(B) A quin ritme creixeria l'1 de gener de1998?
(C) En quin moment el ritme de creixement serà major?

54 Un article ha estat 8 anys en el mercat. Si el seu preu P(t) (en desenes de €) està relacionat amb el temps t (en anys) que porta en el mercat, amb la funció $P(t) = \begin{cases} 4t^2+4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2 \\ \frac{-5}{2}t+25 & \text{si} \quad 2 < t \le 8 \end{cases}$, calcula:

(A) El preu a l'any d'estar en el mercat.
(B) La variació mitjana del preu entre el tercer i cinquè any.
(C) La variació instantània al primer i al quart any.
(D) Estudia el creixement i decreixement de la funció.
(E) Quin va ser el preu màxim que va assolir el producte en el mercat? En quin instant de temps es va assolir?
(F) Escriu la funció derivada de P(t). Què representa?
(G) En quin moment la variació del preu ha sigut màxima?

55 En un punt del Cantàbric observem el moviment de les marees durant 6 hores, entre les 12 del migdia i les 6 de la vesprada. La funció que indica la seua variació en altitud (en metres) depenent del temps (en hores) ve donada per $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x$. Calcula:

(A) Els intervals de concavitat i convexitat.
(B) El punts d'inflexió de la funció.
(C) Què li passa a la velocitat de variació de la marea en el punt d'inflexió? Quin significat té?
(D) Representa gràficament f (x) i f'(x).

56 Observem un globus que realitza fotografies aèries. L'altitud del globus sobre el nivell del mar (en Dam) en funció del temps transcorregut (en hores) ve donat per la funció $f(t) = t^3 - 1.5t^2 + 1$, amb $t \in [0, 10]$. Obtén:

(A) f(0) i f(5), i expressa el seu significat.
(B) La variació mitjana de l'altitud del globus entre la 3a i 5a hora.
(C) La variació instantània de l'altitud en t = 6.
(D) En quin moment assoleix el globus la major i menor altura? Quins són els seus valors?
(E) En quin moment assoleix la major variació d'altitud? Quina és? I la menor variació?

57 Un motorista dona una volta de reconeixement en un circuit. Realitza el trajecte en 3.5 minuts i la velocitat de la seua moto, durant el trajecte, s'expressa per la funció $v(t) = -\frac{1}{2}t^4 + 4t^3 - 11t^2 + 12t$ on el temps t ve donat en minuts i la velocitat v(t) en km/minut. Es demana:

(A) La variació mitjana en [1,3]. Expressa el significat i les unitats en què es mesura.
(B) La variació instantània en t = 2.5. Expressa el significat i les unitats en què es mesura.
(C) Intervals en què augmenta la velocitat i intervals en què disminueix.
(D) Velocitat màxima que assoleix. En quin instant es produeix?
(E) Velocitat mínima. En quin instant es produeix?
(F) Acceleració màxima i mínima. En quins instants es produeixen?
(G) Amb les dades obtingudes fes una representació gràfica aproximada de v(t).

58 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{2x}-1} & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x\ln x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$:

(A) Calcula els valors de m i n per als quals f és sempre contínua.
(B) Obtén les equacions de les asímptotes horitzontals, si n'hi ha, de l'anterior funció.

59 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+x)+\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a perquè f siga contínua en x = 0.
(B) Obtén l'equació de la seua asímptota horitzontal.

60 Calcula el valor de a perquè les següents funcions siguen contínues en els seus dominis:

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 2 - 2e^x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \text{tg}x}{x - \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{2x+5}-3} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(E) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(F) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\ln(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(G) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

61 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el valor de a perquè f siga contínua en x = 0.
(B) Obtén la derivada de f en x = 0.

62 Obtén el valor de a per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{arctg}\, 2x}{\text{arctg}\, 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ és contínua en x = 0.

63 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$, es demana:

(A) Valor de a per al qual f és contínua en x = 0.
(B) Si a = 3/4, calcula la derivada de f en x = 0.

64 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 1+(x+1)^2 & \text{si } x<1 \\ 3+2(x-2)^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, es demana:

(A) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat, i obtén la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Fes la seua representació gràfica.

65 Donada la funció definida a trossos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2e^x-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2+2}{x+2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén raonadament el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de totes les asímptotes que té.
(C) Comprova si f és derivable en x = 0.

66 Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$, es demana:

(A) Expressa-la com una funció definida a trossos.
(B) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat.
(C) Obtén el major i el menor valor de la funció en l'interval [−2, 3.

67 Comprova que les següents funcions són derivables en x = 0, i calcula f'(0).

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x} & \text{si } x\neq 0 \\ 2 & \text{si } x=0 \end{cases}$

68 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{e^x-3} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de les asímptotes que tinga.

69 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+4x)} & \text{si } x<0 \\ xe^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Obtén el conjunt de punts on f és contínua.
(B) Obtén l'equació de les asímptotes que tinga.

70 Donada la funció $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\ln(1+5x^2)}$:

(A) Obtén el domini de f.
(B) Comprova si la gràfica de f té una asímptota vertical.
(C) Comprova si la gràfica de f té una asímptota horitzontal.

71 Donada la funció $f(x) = \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+x^2+x^4)}$:

(A) Obtén el domini de f.
(B) Obtén les equacions de les seues asímptotes.

72 Donada la funció $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$, es demana:

(A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(B) Major i menor valor de la funció, i punt del domini on s'assoleix.
(C) Intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(D) Representació gràfica aproximada.

73 Donada la funció $f(x) = x^2\left(1-x^2\right)^2$, es demana:

(A) Obtén els punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement.
(C) Obtén el màxim i mínim absolut de f en l'interval $[-1, 1]$.
(D) Amb els apartats anteriors, fes una representació gràfica aproximada.

74 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, es demana:

(A) Obtén els intervals on f és positiva.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(D) Equacions de les asímptotes i representació gràfica.

75 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$, es demana:

(A) Obtén les equacions de les seues asímptotes.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Fes la representació gràfica.

76 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, es demana:

(A) Obtén les seues dues primeres derivades.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement.
(C) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(D) Equació de la seua única asímptota, i representació gràfica.

77 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$, es demana:

(A) Obtén els punts de tall amb els eixos de coordenades.
(B) Obtén els intervals on f és no negativa.
(C) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(D) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(E) Equacions de les asímptotes, i representació gràfica.

78 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$:

(A) Obtén l'equació de les asímptotes que tinguen.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius de f.
(C) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius de g.
(D) Fes una representació gràfica aproximada de les dues funcions.

79 Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, es demana:

(A) Domini i equació de les asímptotes que tinga.
(B) Intervals de creixement i decreixement.
(C) Extrems relatius i absoluts de f, si en té.
(D) Intervals on f és positiva, i on f és negativa.
(E) Amb els apartats anteriors, fes una representació gràfica aproximada.

80 Donada la funció $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$:
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

81 Donada la funció $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén el màxim absolut i el mínim absolut de f en [–2, 2].

82 Donada la funció $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$:
(A) Obtén el seu domini.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

83 Donada la funció $f(x) = \ln(16x^2 - x^4)$, es demana:
(A) Conjunt de punts on f és contínua.
(B) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.

84 Donada la funció $f(x) = \ln(-x^4 + 8x^2 + 9)$, es demana:
(A) Domini de f.
(B) Intervals de creixement i decreixement de f.
(C) Màxims i mínims relatius de f.
(D) Màxim i mínim absolut de f, si n'hi ha.

85 Donada la funció $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims.
(B) Intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(C) Pendent de la recta tangent en els punts d'inflexió.
(D) Representació gràfica aproximada.

86 Donada la funció $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$, es demana:
(A) Comprova que f és sempre no negativa.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén l'equació de la seua asímptota horitzontal.
(D) Representació gràfica.

87 Donada la funció $f(x) = (x^3 + 2x + 2)e^{-x}$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(B) Asímptotes i representació gràfica aproximada.

88 Donada la funció $f(x) = xe^{-x^2/2}$, es demana:
(A) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(B) Obtén els intervals de curvatura, i punts d'inflexió.
(C) Equació de la seua única asímptota, i representació gràfica.

89 Donada la funció $f(x) = e^{x^2} + e^{2-x^2}$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement de f.
(B) Màxims i mínims relatius de f, i punts on s'assoleixen.
(C) Raona si esta funció té màxim o mínim absolut en tot el seu domini.

90 Donada la funció $f(x) = \sin x + \cos x$ definida en l'interval $[0, 2\pi]$, es demana:
(A) Intervals de creixement i decreixement de f.
(B) Màxims i mínims relatius de f, i punts on s'assoleixen.
(C) Valors màxim i mínim absolut en l'interval $[0, 2\pi]$.

91 Donada la funció F(x) = $\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si } x<0 \\ x^2-4x+3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$:

(A) Estudia la seua continuïtat i derivabilitat.
(B) Obtén la seua funció derivada.
(C) Obtén els extrems absoluts de f en l'interval [–3, 3].

92 Donada la funció f(x) = $\begin{cases} x^3-3x^2+1 & \text{si } x<1 \\ -x^2+4x-4 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, es demana:

(A) Estudia la derivabilitat de f, i obtén la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement de f, màxims i mínims relatius.
(C) Obtén els intervals de concavitat i convexitat, i punts d'inflexió.
(D) Fes la representació gràfica.

93 Donada la funció f(x) = $x^2 - |x|$, es demana:

(A) Expressa esta funció com una funció definida a trossos, estudia la seua continuïtat i derivabilitat, i expressa la seua funció derivada.
(B) Obtén els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius.
(C) Fes la seua representació gràfica.

94 Obtén el major i el menor valor de la funció f(x) = sinx cosx en l'interval [0, π], i els valors de x on s'assoleixen aquests valors màxim i mínim.

95 Obtén la condició necessària perquè la funció f(x) = x^3 + mx + n siga sempre creixent.

96 Demostra que tota funció polinòmica de grau 3, f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), té un punt d'inflexió.

97 Donada la funció polinòmica de grau 3, f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), es demana:
(A) Obtén una expressió per a obtenir els punts singulars de f.
(B) Obtén la condició que han de verificar a, b i c perquè f tinga dos extrems relatius.
(C) Obtén la condició que han de verificar a, b i c perquè f no tinga cap extrem relatiu.
(D) Comprova que si f té un únic punt singular, és d'inflexió.

98 Volem construir dues habitacions rectangulars iguals de 27 m^2 cadascuna, que comparteixen una paret comuna. Obtén les dimensions d'una d'aquestes habitacions si volem que el perímetre total de les parets siga mínim.

99 Obtén les dimensions del rectangle de major perímetre que es pot inscriure en una circumferència de radi R.

100 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea, i el valor d'aquesta màxima àrea, entre tots els rectangles que tenen les diagonals de 10 metres de longitud.

101 Obtén les dimensions del rectangle amb 1 m^2 d'àrea que tinga diagonal mínima i el valor d'aquesta diagonal.

102 Obtén la base i l'altura del rectangle de major àrea que podem inscriure en una semicircumferència de 1 metre de radi, que tinga la seua base sobre el diàmetre de la semi-circumferència, i el valor d'aquesta màxima àrea.

103 De tots els triangles isòsceles que tenen els seus costats iguals de 10 cm de longitud, obtén les dimensions (base i altura) del que té la major àrea possible, i el valor d'aquesta màxima àrea.

104 Un full de paper ha de contenir un àrea de 200 cm^2 reservada per a text. Si els marges superior i inferior són de 2 cm i els laterals d'1 cm, quines dimensions ha de tenir el full per a utilitzar la menor quantitat de paper possible?

105 Calcula el radi r de la base i l'altura h d'un cilindre inscrit en un con de revolució de radi de la base R = 3 cm i altura H = 9 cm perquè el seu volum siga màxim.

106 Una piscina en forma de paral·lelepípede rectangular de base quadrada té una àrea de 192 m^2. Troba les longituds de les seues arestes perquè el volum d'aigua continguda siga màxim.

107 Un pentàgon amb un perímetre de 30 cm es construeix adjuntant un triangle equilàter al costat d'un rectangle. Obtén les dimensions del dos polígons per a que l'àrea del pentàgon siga màxima.

108 Considera un octàedre regular d'aresta 1 metre. Troba les dimensions del cilindre inscrit de volum màxim que tinga el seu eix sobre la diagonal de l'octàedre.

109 Troba les dimensions del rectangle d'àrea màxima que té dos dels vèrtexs sobre la paràbola d'equació $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs sobre l'eix OX.

110 Considerem la paràbola d'equació $y = 12 - x^2$. Obtén

(A) Per a qualsevol $a > 0$, l'equació de la recta tangent a la paràbola en $x = a$.

(B) Valor de $a > 0$ per al qual l'àrea del triangle que forma la recta tangent anterior amb els eixos de coordenades siga mínima, i troba valor d'aquesta mínima àrea.

111 Volem cercar una parcel·la rectangular de 2400 m^2 d'àrea. El costat de la parcel·la que limita amb la carretera es farà amb material de qualitat, que resulta a 30 € el metre de longitud, mentre que els altres tres costats es faran amb material d'inferior qualitat, que resulta a 15 € el metre. Obtén les longituds dels costats de la parcel·la perquè les despeses en la tanca siguen mínimes, i el valor d'aquestes mínimes despeses.

112 Volem construir 5 parcel·les rectangulars iguals adossades, que tenen un costat comú, cadascuna amb un àrea de 1200 m^2. Si els murs exteriors de cada parcel·la costen a 90 € el metre, i els murs interiors costen a 30 € el metre, obtén les dimensions de cada parcel·la perquè el cost total de construcció dels murs siga mínim, i troba el valor d'aquest mínim cost.

113 Volem construir 4 parcel·les rectangulars iguals adossades que comparteixen un costat comú, Els murs del perímetre exterior costen a 60 € el metre, i els murs dels costats comuns de les parcel·les costen a 10 € el metre. Obtén les dimensions de cada parcel·la si volem que l'àrea total siga màxima, i el valor d'aquesta màxima àrea, si volem gastar-se un total de 24000 € en la construcció de tots els murs.

114 Tenim una parcel·la en forma de triangle equilàter de 100 metres de costat, i volem inscriure la parcel·la rectangular de major àrea possible, que tinga la base sobre la base del triangle. Obtén les dimensions d'aquesta parcel·la, i el valor de la màxima àrea.

115 Tenim una parcel·la en forma de semicercle de 20 metres de diàmetre, i volem inscriure una parcel·la en forma de rectangle, amb dos vèrtexs sobre la semicircumferència i els altres dos sobre el diàmetre. El material del costat que va sobre el diàmetre costa a 20€/m, i els altres tres costats costen a 10€/m. Obtén les dimensions del rectangle de major cost, i el valor d'aquest màxim cost.

116 El cost total de producció, en euros, de x litres d'un producte ve donat per la funció

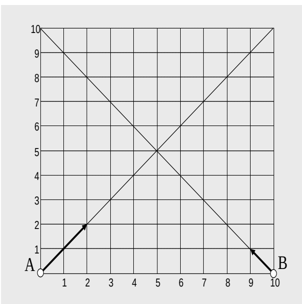
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 800,\ 0 \le x \le 100.$$

(A) Defineix la funció que determina el cost mitjà per litre produït.

(B) Obtén el nombre de litres que cal produir perquè el cost mitjà de producció siga mínim, i troba el valor d'aquest mínim cost.

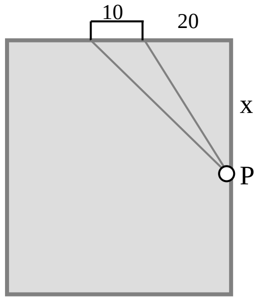
117 Volem construir 4 zones enjardinades semicirculars adossades a cada costat d'un rectangle de 400 m^2 d'àrea. Obtén les dimensions del rectangle perquè l'àrea total de les zones enjardinades siga mínima, i troba el valor d'aquesta mínima àrea.

118 Dos mòbils A i B es desplacen seguint les trajectòries de la figura. Si la velocitat amb que es desplaça A és doble que la de B, obtén la menor distància a que es trobaran els dos mòbils.



119 Un edifici de 20 m d'alçada té damunt d'ell una antena rectilínia de 5 m d'altura. Ens situem a una distància x de la base de l'edifici, i anomenem α a l'angle amb què es veu l'antena des d'eixa distància.
(A) Expressa α en funció de x.
(B) Obtén el valor de x per al qual l'antena es veu amb el major angle possible, i troba el valor d'aquest angle.

120 En un camp de futbol situem el baló en un punt P situat sobre la banda dreta, a una distància x del banderí de córner (mira la figura). La longitud de la porteria és de 10 m, i la distància del córner a la porteria, de 20 m. Anomenem α a l'angle amb què es veu la porteria des del punt P.
(A) Expressa α en funció de x.
(B) Obtén el valor de x per al qual la porteria es veu amb el major angle possible, i troba el valor d'aquest angle.



121 En una plaça horitzontal hi ha un edifici de 15 metres d'alçada que té 5 plantes de la mateixa alçada. Calcula la distància de l'edifici a la qual ens hem de situar per a veure l'última planta amb el major angle possible, i el valor d'aquest màxim angle.

122 La següent funció ens proporciona la velocitat, en km/h, d'un mòbil durant les seues 6 hores de recorregut:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x, \text{ per a } 0 \le x \le 6 \text{ (x en hores).}$$

(A) Obtén els intervals de temps on el mòbil incrementa la seua velocitat, i on la disminueix.
(B) Obtén la major velocitat que assoleix el mòbil, i els instants de temps on l'assoleix.

123 Un ciclista realitza una prova durant 5 hores. La funció que indica la distància recorreguda (en km) depenent del temps (en hores) ve donada per $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$. Calcula:
(A) El màxim absolut de la funció. Et pareix lògic el resultat?
(B) Els punts d'inflexió de la funció.
(C) Els intervals de concavitat i convexitat.
(D) Quin és el màxim de la funció velocitat?
(E) Quina relació existeix entre els instants en què s'assoleix la inflexió i el màxim de la velocitat? Sempre passarà el mateix?

124 Sabem que la velocitat d'un mòbil als 10 minuts de començar un trajecte era de 250 km/h, i als 30 minuts era de 450 km/h, la qual va ser la màxima velocitat assolida al llarg del trajecte.
(A) Obtén els valors de a, b i c per als quals la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa la velocitat en funció del temps transcorregut.
(B) Quina va ser la duració total del trajecte?

125 Una màquina no pot produir més de 100 kg de sacarina, en un determinat període de temps. La funció de costs totals (euros) és $C(x) = 0.2x^2 + 30x + 1000$, on x representa els kg produïts. Un bon client de l'empresa paga un preu, en funció de la quantitat comprada, que ve donat per la funció $p(x) = 100 - 0.2x$. Calcula quina quantitat x de kg de sacarina convé fabricar i vendre al client per a maximitzar el benefici.

126 El cost total de fabricació en € de x unitats d'un article ve donat per la funció $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.
(A) Obtén la funció g(x) que representa el ***cost de fabricació unitari***, i el cost unitari quan es fabriquen 25 unitats, i quan s'en fabriquen 100.
(B) Obtén el nombre d'unitats que cal fabricar perquè el cost unitari siga mínim, i el valor d'aquest mínim cost.

127 Donada la funció $f(x) = \operatorname{arctg} x$, es demana:
(A) Punts on la gràfica d'aquesta funció té pendent 1/2.
(B) Quin és el valor del major pendent que té aquesta corba?

128 Donada la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, es demana:
(A) Punts de la gràfica de f on la recta tangent és paral·lela a la recta r: $4x - 5y = 0$.
(B) Punt de la gràfica de f on la recta tangent té pendent màxima, i valor d'aquesta màxima pendent.

129 Volem construir una tenda de campanya en forma de piràmide de base quadrada, que tinga un volum de 36 m^3, col·locant un pal vertical en el centre de la base, i unint l'extrem superior del pal amb els 4 vèrtexs de la base per mitjà de 4 filferros de la mateixa longitud. Calcula la longitud del pal i la longitud del costat de la base, perquè les despeses en filferro siguen mínimes.

130 Troba, entre totes les rectes que passen pel punt P(1, 2), aquella que forma amb les parts positives dels eixos de coordenades un triangle d'àrea mínima.

131 Obtén dos nombres positius la suma dels quals siga 20 i el seu producte siga màxim.

132 Una horta té actualment 25 arbres, que produeixen 600 fruits cadascun. Es calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits.
(A) Calcula la producció actual de l'horta.
(B) Calcula la producció total si es plantaren x arbres més.
(C) Calcula el nombre total d'arbres que ha de tenir l'horta perquè la producció siga màxima.

133 Una agència de viatges ofereix a un grup de 50 persones un viatge a 1000€ per persona. A més, per cada viatger addicional que es puga aconseguir, el preu per persona disminuirà en 10€.
(A) Expressa els ingressos totals de l'agència en funció del nombre addicional x de viatgers.
(B) Obtén el nombre total de viatgers que proporciona els majors ingressos possibles a l'agència, el valor d'aquests màxims ingressos, i el preu que pagaria cada persona.

134 Dos pals d'1 i 2 metres d'altura, respectivament, estan separats per una distància de 6 metres. Volem unir els dos pals amb un cable que vaja des de l'extrem superior d'un pal a un punt del sòl, i després fins a l'extrem superior de l'altre pal (tots tres en el mateix pla). Obtén la menor longitud que ha de tenir el cable.

135 Tenim 2 punts A i B separats per una distància de 2 metres, i entre ells, a igual distància, un pal de 5 metres d'alçada. En el pal volem elegir un punt P, i unir aquest punt amb 3 cordes que vagen als punts A, B i a l'extrem superior del pal. Calcula l'alçada a què es trobarà aquest punt P, perquè la longitud total de les cordes utilitzades siga mínima, i el valor d'aquesta mínima longitud.

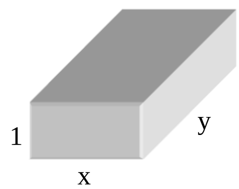
136 Un fabricant vol produir caixes amb tapa, amb una capacitat de 9 litres, de forma que el cost de material utilitzat en la seva elaboració siga mínim. Obtén les dimensions de les caixes si el fabricant vol que la base siga rectangular, amb un costat de doble longitud que l'altre. (1 litre de capacitat equival a 1000 cm^3 de volum).

137 Obtén les dimensions d'una caixa de base rectangular que siga doble llarga que ampla, de forma que la suma de les longituds de totes les seues arestes siga de 36 m, i el volum siga màxim. Obtén també el valor de aquest volum.

138 Volem construir una caixa amb una capacitat de 250 litres, sense tapa en la part superior, i de forma que la base de la caixa siga un rectangle amb doble base que altura. El material de la base de la caixa costa 3€/dm^2 i el de les parets laterals 2€/dm^2. Obtén les dimensions de la caixa de mínim cost, i el valor d'aquest mínim cost.

139 Volem construir una tenda de campanya en forma de caixa de base rectangular, amb una altura de 2 m i un volum de 32 m^3, amb unes despeses mínimes. Les parets, sòl i sostre han de ser de lona, a 10 € el m^2, i les varetes que uneixen totes les cares han de ser d'alumini, a 20 € el metre. Obtén les dimensions de la tenda i el seu mínim preu.

140 Volem construir un contenidor en forma de paral·lelepípede rectangular de 9 m^3 de volum, amb una altura d'un metre. Suposem que el cost de construcció per m^2 és de 50 euros per a la base, 70 euros per a la tapa i 40 euros per a les parets laterals. Si anomenem x i y a les dimensions de la base:
(A) Expressa el cost de construcció del contenidor en funció de x.
(B) Obtén les dimensions del contenidor més econòmic.



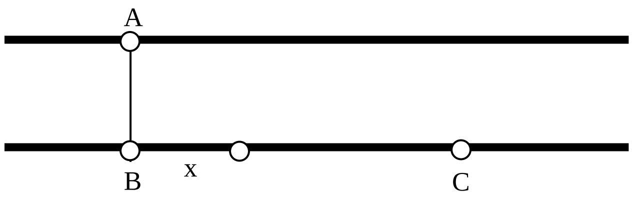
141 Volem construir un dipòsit de base quadrada, sense tapa, i disposem de 1500€ per al material. El preu de la base del dipòsit és de 5€/m^2, i el de les 4 parets laterals, de 10€/m^2. Obtén les dimensions del dipòsit de major volum possible, i el valor d'aquest màxim volum.

142 Volem construir un pot cilíndric amb una capacitat de 0.5 m^3, sense tapa en la part superior. El material de la base costa 1€/dm^2 i el de la paret lateral 2 €/dm^2. Obtén les dimensions (radi de la base i altura) del pot de mínim cost, i el valor aproximat d'aquest mínim cost.

143 Obtén les dimensions del rectangle amb perímetre 2p i diagonal mínima.

144 Un vaixell A es troba a 1000 km a l'est d'un altre vaixell B, i navega cap a l'oest a una velocitat de 20 km/h. Mentrestant, el vaixell B navega cap al nord a 10 km/h.
(A) Fes un croquis representant la situació, elegeix un sistema de coordenades còmode, i planteja una funció que represente la distància que en cada instant hi ha entre els dos vaixells.
(B) Quan es trobaran a una distància de 500 km?
(C) Troba l'instant de temps en què els dos vaixells es trobaran més prop, i el valor d'aquesta distància mínima.

145 La figura representa un canal d'aigua que té 10 km d'amplària. Un biatleta es troba en A i vol anar a C. Pot creuar el canal nedant a una velocitat mitjana de 2 km/h, i pot córrer a 6 km/h. La distància entre els punts B i C és de 24 km.



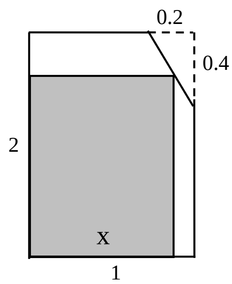
Calcula a quina distància x del punt B hauria d'aplegar nedant el biatleta per tardar el menor temps total possible en aplegar a C, i el valor d'aquest temps mínim.

146 Obtén les dimensions del triangle isòsceles de major àrea que es pot inscriure en una circumferència de radi R.

147 Volem construir una piscina rectangular de 800 m^2 de superfície, i el terreny que l'envolta cobrir-lo de gespa amb una extensió de 10 m d'amplària als costats curts de la piscina, i de 5 m d'amplària als costats llargs. Obtén las dimensions de la piscina per a les quals les despeses en gespa siguen mínimes, i el valor d'aquestes despeses, si el m^2 de gespa val 10 euros.

148 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en un triangle rectangle amb catets de longituds a i b.

149 L'espill d'1 metre per 2 metres de la figura se'ns trenca per un cantó. Amb el tros gran d'espill que ens queda podem tallar molts espills rectangulars distints, que tinguen un dels seus cantons sobre el costat trencat.
(A) Expressa en funció de x l'àrea del nou espill tallat. Entre quins valors varia x?
(B) Obtén les dimensions de l'espill de major àrea que podem tallar.
(C) Obtén també les dimensions de l'espill de menor àrea.



150 Dividim un filferro de 10 metres de longitud en dues parts, i anomenem x a la longitud d'una de les parts:
(A) Si amb cada part construïm un quadrat, expressa l'àrea total d'aquests en funció de x, i el valor de x per al qual la suma de les àrees és mínima.
(B) Si amb una part construïm un quadrat i amb l'altra un cercle, expressa l'àrea total en funció de x, i el valor de x per al qual la suma de les àrees és mínima.

151 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en l'el·lipse d'equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

152 Obtén les dimensions del rectangle de major àrea que podem inscriure en un semicercle de radi R.

153 Troba les dimensions d'un triangle rectangle de perímetre mínim que tinga inscrita una circumferència de radi 1. Observa que els radis determinats pels punts de tangència divideixen el triangle en tres quadrilàters (un d'ells quadrat).

154 Volem construir una parcel·la en forma de triangle isòsceles amb un perímetre de 12 metres, i adossar a cada costat del triangle un quadrat amb els costats de la mateixa longitud que el costat del triangle al qual s'adossa. Obtén les longituds dels costats del triangle per als quals la suma de les àrees dels quadrats adossats és mínima, i el valor d'aquesta mínima suma d'àrees.

155 Volem construir una finestra en forma d'estrella de 4 puntes, adossant a cada costat d'un rectangle de 4 m^2 d'àrea un triangle equilàter. Obtén les dimensions del rectangle de forma que l'àrea total de la finestra siga mínima.

156 Volem construir un aparcament cobert en forma de paral·lelepípede amb una altura fixa de 2 m, i base rectangular, que tinga una àrea de 70 m^2. El material per a la base costa a 20€/m^2, per al sostre a 50€/m^2, i per a les parets a 30€/m^2. L'aparcament per davant (aresta base x) no tindrà paret. Les arestes del paral·lelepípede seran de ferro, a 20€/m. Obtén les dimensions de l'aparcament rectangular de mínim cost, i el valor d'aquest mínim cost.

157 Obtén el punt P(x, y) de la paràbola $y = x^2$ que es troba a menor distància del punt A(3, 0), i el valor d'aquesta mínima distància.

158 Considerem l'arc de paràbola $y = 1 - x^2$, amb $-1 \le x \le 1$. Obtén els punts d'aquest arc que es troben a menor i a major distància de l'origen de coordenades, i el valor d'aquestes distàncies.

159 Obtén els punts de la paràbola $y = 4 - x^2$ que es troben a menor distància de A(0, −1), i el valor d'aquesta mínima distància.

160 Obtén els punts P(x, y) de l'arc de paràbola $y = \dfrac{x^2 - 2}{2}$ amb $-2 \le x \le 2$, que es troben a menor i a major distància del punt M(0, 1), i el valor d'aquesta mínima i màxima distància.

161 Considera la branca de la hipèrbola d'equació $xy = 1$, i siga $a > 0$.
(A) Obtén els punts de tall A i B de la recta tangent a la hipèrbola en $x = a$ amb els eixos de coordenades.
(B) Obtén la distància entre els punts de tall A i B, en funció de a.
(C) Obtén el valor de a per al qual la distància entre els punts de tall A i B és mínima, i el valor d'aquesta mínima distància.

162 Obtén el punt P(x, y), amb x entre 0 i 1, de la paràbola d'equació $y = 1 - x^2$, per al qual l'àrea del triangle rectangle inscrit que té per hipotenusa el segment d'extrems P(x, y) i Q(−1, 0) és màxima, i el valor d'aquesta màxima àrea.

163 Considerem el segment de la recta d'equació $x + y = 4$, situada en el primer quadrant, i un punt P(x, y) d'aquest segment. Construïm el segment AB, on A i B són les projeccions de P sobre els eixos de coordenades. Obtén la menor longitud que pot tindre el segment AB.

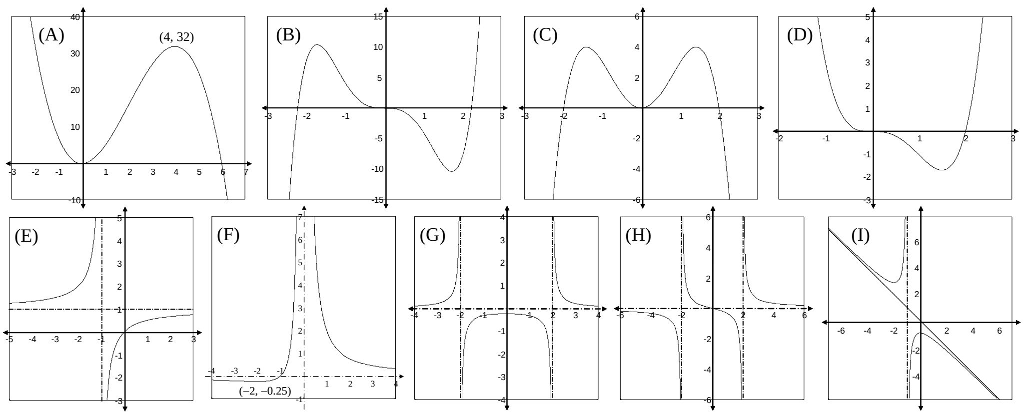
164 Siga r una recta que passe pel punt P(1, 3) amb pendent negativa. Construïm un triangle rectangle que té com a vèrtexs l'origen de coordenades O i els punts de tall A i B de la recta r amb els eixos de coordenades. Obtén la mínima àrea que pot tindre el triangle OAB, les coordenades dels punts A i B, i l'equació de la recta r per als quals hem assolit l'àrea mínima.

Solucions de les activitats del capítol 3

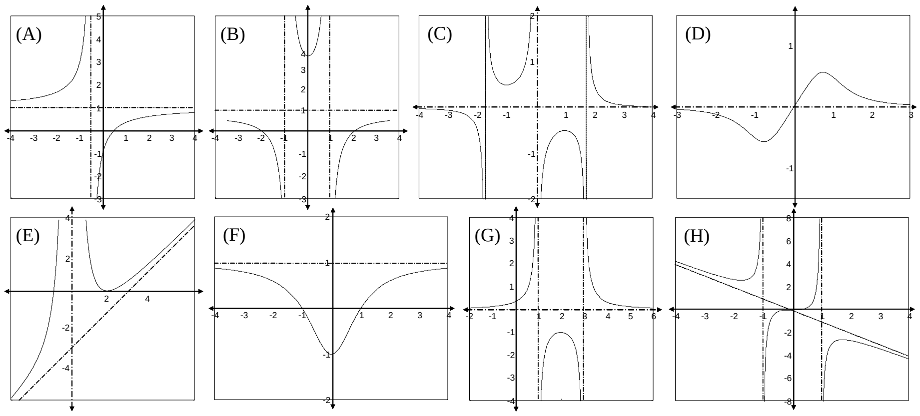
1. f no verifica les hipòtesis en [0.5, 4]: f(0.5) = 1/16 $\neq$ f(4) = 4, ni la tesi: $f'(x) = 0.5x^2 \neq 0$ en]0.5, 4[; f no verifica la hipòtesi en [–1, 4]: f(–1) = 1/4 $\neq$ f(4) = 4, però sí verifica la tesi: $0 \in]-1, 4[$ i $f'(0) = 0$. **2.** a = –4; f'(–3/2) = 0.
4. (A)]–1, 0[,]0, 4[i]4, 7[. (B) Una solució en]0, π/2[. (C)]–2, –1[,]–1, 2[,]2, 4[. **5.** (A) Sí; $x = 2(\sqrt{3}-1)$.
(B) Sí; x = 0, x = 2. **6.** (A) 2/3. (B) –1. (C) 0. (D) +∞. (E) –1/3. (F) 2/3. (G) 1/3. (H) 1/2. (I) 0. (J) 1/2.
7. (A) e. (B) –1/2. (C) 0. (D) 0. (E) 1. (F) 1. (G) 1. (H) 1/e. (I) 0. (J) 3/11. (K) 0. (L) 3/2. **8.** En el primer límit és correcte aplicar L'Hôpital (indeterminació 0/0), no en el segon que dona 0/2 = 0 i no s'aplica L'Hôpital.
9. (A) a = 0; AH: y = 2 (bilateral). (B) a = 2; AH: y = 0 (bilateral). **10.** (A) m = n = 1/2. (B) g és contínua en x = 1, discontínua en x = 0. **11.** (A) Creix en x = 1 i 2, decreix en x = –1, res podem afirmar de moment en x = 0.
(B) Sempre creix encara que en x = 0 no podem afirmar-ho de moment. (C) Creix en x = 1 i 2, decreix en x = –1, ni creix ni decreix en x = 0 encara que no ho podem afirmar de moment. (D) Sempre creix encara que en x = 0 no podem afirmar-ho de moment. (E) Decreix en x = –1, 0 i 1, ni creix ni decreix en x = 2 encara que no ho podem afirmar de moment. **12.** Únic punt singular és x = 1 (f no derivable en ell); com que $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ (si $x \neq 1$), aleshores f és decreixent en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. **13.** (A) Decreix en]–∞, 1[i creix en]1, +∞[; mínim relatiu en x = 1.
(B) Decreix en $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$ i creix en $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$; mínim relatiu en x = ±2, màxim relatiu en x = 0.
(C) Decreix en $]-\infty, 0[\cup]2, 4[$ i creix en $]0, 2[\cup]4, +\infty[$; mínim relatiu en x = 0 i 4, màxim relatiu en x = 2.
(D) Decreix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ i creix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en x = ±1, màxim relatiu en x = 0.
(E) Decreix en]–∞, ln2[i creix en]ln2, +∞[; mínim relatiu en x = ln2. (F) Creix en]–∞, 1[i decreix en]1, +∞[; màxim relatiu en x = 1. (G) Creix en]0, e[i decreix en]e, +∞[; màxim relatiu en x = e. (H) Decreix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i creix en]–1, 1[; mínim relatiu en x = –1, màxim relatiu en x = 1. (I) Creix en $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ i decreix en $]0, 1[\cup]1, 2[$; màxim relatiu en x = 0, mínim relatiu en x = 2. (J) Creix en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup]-1, 1[\cup \left]1, \sqrt{3}\right[$; màxim relatiu en $x = -\sqrt{3}$, mínim relatiu en $x = \sqrt{3}$. (K) Creix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ i decreix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; màxim relatiu en x = ±1, mínim relatiu en x = 0. (L) Creix en $]0, 2[\cup]4, 5[\cup]5, 6[$ i decreix en]2, 4[; mínim relatiu en x = 4, màxim relatiu en x = 5 i 6. **14.** (A) Creix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i decreix en]–1, 1[; màxim relatiu en (–1, 2), mínim relatiu en (1, –2). (B) Decreix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ i creix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en (–1, 0) i (1, 0), màxim relatiu en (0, 1). (C) Decreix en]–∞, 3/2[i creix en]3/2, +∞[; mínim relatiu en (3/2, –27/16). (D) Creix en $[0, \pi/4[\cup]3\pi/4, 5\pi/4[\cup]7\pi/4, 2\pi]$ i decreix en $]\pi/4, 3\pi/4[\cup]5\pi/4, 7\pi/4[$; mínim relatiu en (0, 0), (3π/4, –1) i (7π/4, –1), màxim relatiu en (π/4, 1), (5π/4, 1) i (2π, 0). (E) Decreix en]–∞, –2[i creix en]–2, +∞[; mínim relatiu en (–2, –25). (F) Creix en $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ i decreix en]–2, 0[; màxim relatiu en $(-2, 4e^{-2})$, mínim relatiu en (0, 0). (G) Decreix en $]0, e^{-1/2}[$ i creix en $]e^{-1/2}, +\infty[$; mínim relatiu en $(e^{-1/2}, -1/(2e))$. (H) Creix en $[0, \pi/2[\cup]\pi, 3\pi/2[$ i decreix en $]\pi/2, \pi[\cup$ $\cup]3\pi/2, 2\pi[$; mínim relatiu en (0, 0), (π, 0) i (2π, 0), màxim relatiu en (π/2, 1) i (3π/2, 1). **15.** a = –4, b = 6.
16. (A) En [0, 5]: M = f(0) = 0, m = f(4) = –32; en ℝ no hi ha ni màxim ni mínim absolut. (B) En [0, 5]: m = f(0) = 0, M = f(4) = 32; en ℝ: m = f(0) = f(6) = 0, no hi ha màxim absolut. (C) m = f(π) = –1, M = f(0) = f(2π) = 1.
(D) M = f(2) = 13, no hi ha mínim absolut. (E) m = f(0) = f(8) = 0, M = f(4) = 4. (F) $m = f\left(-\sqrt{2}\right) = -2$, $M = f\left(\sqrt{2}\right) = 2$. **17.** (A) En [0, 5]: m = f(2) = –7, M = f(5) = 434; en]–2, 2[: M = f(0) = 9 i no hi ha mínim absolut.
(B) En [–1, 5]: m = f(5) = 0, M = f(3) = 5; en [2, 4[: M = f(3) = 5 i no hi ha mínim absolut. **18.** Base = altura = 5 m.
19. Base = altura = 25 m. **20.** Triangle equilàter de costat 40 cm.

21. Base = altura = $\sqrt{2}$ m; àrea = 2 m^2. **22.** Radi de la base = $\sqrt{6}$ cm, altura = $2\sqrt{3}$ cm, volum = $12\pi\sqrt{3}$ cm^3. **23.** Cara quadrada de costat $10\sqrt{2}$ cm; superfície: $400+200\sqrt{2}$ cm^2. **24.** (A) Còncava en tots. (B) Còncava en x = 1 y en x = 2, convexa en x = –1, PI en x = 0. (C) Còncava en x = 2, convex en x = 0 y en x = –1, PI en x = 1. (D) Convexa en tots. (E) Convexa en x = 1, còncava en –1. **25.** (A) Còncava en ℝ. (B) Convexa en]+∞, 0[i còncava en]0, +∞[; PI en x = 0. (C) Còncava en]–∞, –1[∪]1, +∞[i convexa en]–1, 1[; PI en x = ±1. (D) Còncava en]–∞, 0[i convexa en]0, +∞[. (E) Còncava en $\left]-\infty,-1/\sqrt{3}\right[\ \cup\ \left]1/\sqrt{3},+\infty\right[$ i convexa en $\left]-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right[$; PI en x = $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (F) Còncava en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\ \cup\ \left]0,\sqrt{3}\right[$ i convexa en $\left]-\sqrt{3},0\right[\ \cup\ \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; PI en x = 0, $\pm\sqrt{3}$. (G) Còncava en]–∞, 0[i convexa en]0, +∞[. (H) Convexa en]–∞, –1[∪]0, 1[i còncava en]–1, 0[∪]1, +∞[; PI(0, 0). (I) Convexa en $\left]2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right[$, còncava en els altres; PI en x = $2\pm\sqrt{2}$. (J) Convexa en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\ \cup\ \left]0,\sqrt{3}\right[$ i còncava en $\left]-\sqrt{3},0\right[\ \cup\ \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; PI en x = 0, $\pm\sqrt{3}$. (K) Convexa en]–∞, 2[i còncava en]2, +∞[, PI en x = 2. (L) Convexa en]–∞, 0[i còncava en]0, +∞[. (M) Convexa en]–∞, $e^{3/2}$[i còncava en]$e^{3/2}$, +∞[: PI en x = $e^{3/2}$. (N) Còncava en [–π, 0[∪]π, 2π[i convexa en]0, π[∪]2π, 3π[; PI en x = 0, π i 2π. (Ñ) Igual que l'anterior. (O) Convexa en [0, π/4[∪]3π/4, 5π/4[∪]7π/4, 2π] i còncava en]π/4, 3π/4[∪]5π/4, 7π/4[; PI en x = π/4, 3π/4, 5π/4 i 7π/4. (P) Convexa en]0, 2[i còncava en]2, 5[∪]5, 6[. (Q) Convexa en]0, π/2[i còncava en]π/2, 3π/2[∪]3π/2, 2π[. **26.** (A) PI(1, –9). (B) PI(0, 0), PI$\left(\sqrt{3},-21\sqrt{3}\right)$, PI$\left(-\sqrt{3},21\sqrt{3}\right)$. (C) PI(6, –5184). (D) PI(2, –14). **31.** m = –3, n = 4. **32.** A = –3, b = 2, c = 2. **33.** PI(0, 0). **34.** $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **35.** A les 10 hores. A les 6 hores és més eficient, el ritme de càrrega (derivada) és màxim. Sí, a partir de t = 6 entrega amb menor ritme.

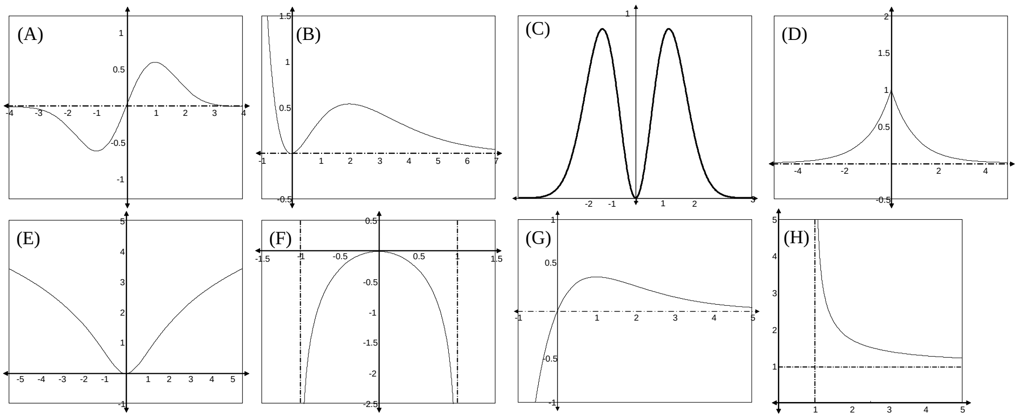
36.



37.



38.



Solucions dels problemes del capítol 3

1. f creix en −2, decreix en 2 i 4; g i h decreix en −2, 2 i 4; t creix en −2, 2 i 4. **2.** (A) f creix en]1, +∞[i decreix en]−∞, 1[; g creix en]0, +∞[; h creix en ℝ; t creix en]−1,+∞[. (B) f decreix en]−1, 0[∪]0, e − 1[i creix en]e −1, +∞[; g decreix en]−∞, −1[i creix en]−1, +∞[; h decreix en]−∞, −1[i creix en]1, +∞[; t decreix en]−∞, 0[~{−1} i creix en]0, +∞[~{1}. **3.** La velocitat augmenta en [0, 8] i l'acceleració disminueix en [0, 8].

4.

(A)	f	g	h	t	(B)	f	g	h	t
Mín.	(1,0)	(−1,0)	(1,1/3)	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$		No	(a, $\sqrt{2}$)	(0,0)	No
Màx.	(−1,4)	(1,4)	(−1,3)	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		(−3,−27/4)	No	$\left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}, h\left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2/3}\right)\right)$	$\left(1,\frac{1}{3}\right)$

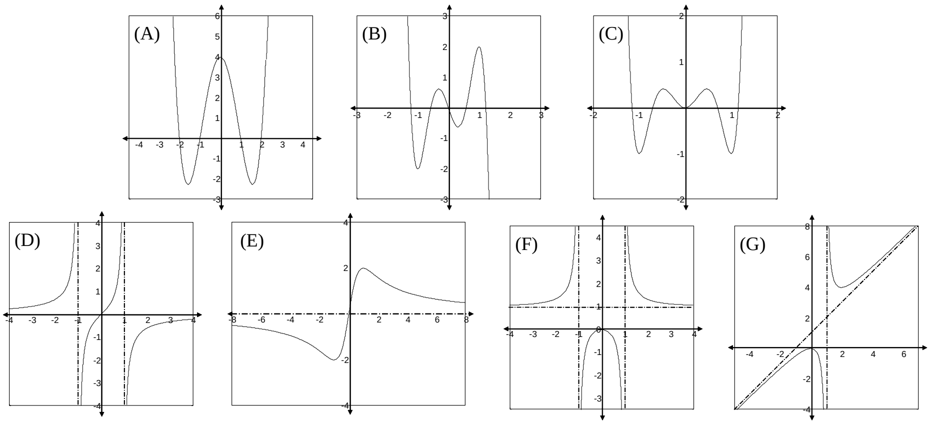
(C)	f	g	h	t	(D)	f	g	h	t
Mín.	$\left(-e,\frac{-1}{e}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{12}+k\pi, g\right)$	No	No		(3, −27)	$(2,e^2)$	(0,1)	(± $\sqrt{3/2}$,−1/4)
Màx.	$\left(e,\frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{\pi}{12}+k\pi, g\right)$	(0,1)	No		No	No	No	(0,2)

(E)	f	g	h	t	(F)	f	g	h
Mín.	No	No	(−4,0)	(kπ,0)		No	$\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi, g\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, h\right)$
Màx.	$\left(1,\frac{1}{e}\right);\left(-1,\frac{1}{e}\right)$	$(3,27e^{-3})$	No	(π/2+kπ,1)		No	$\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, g\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, h\right)$

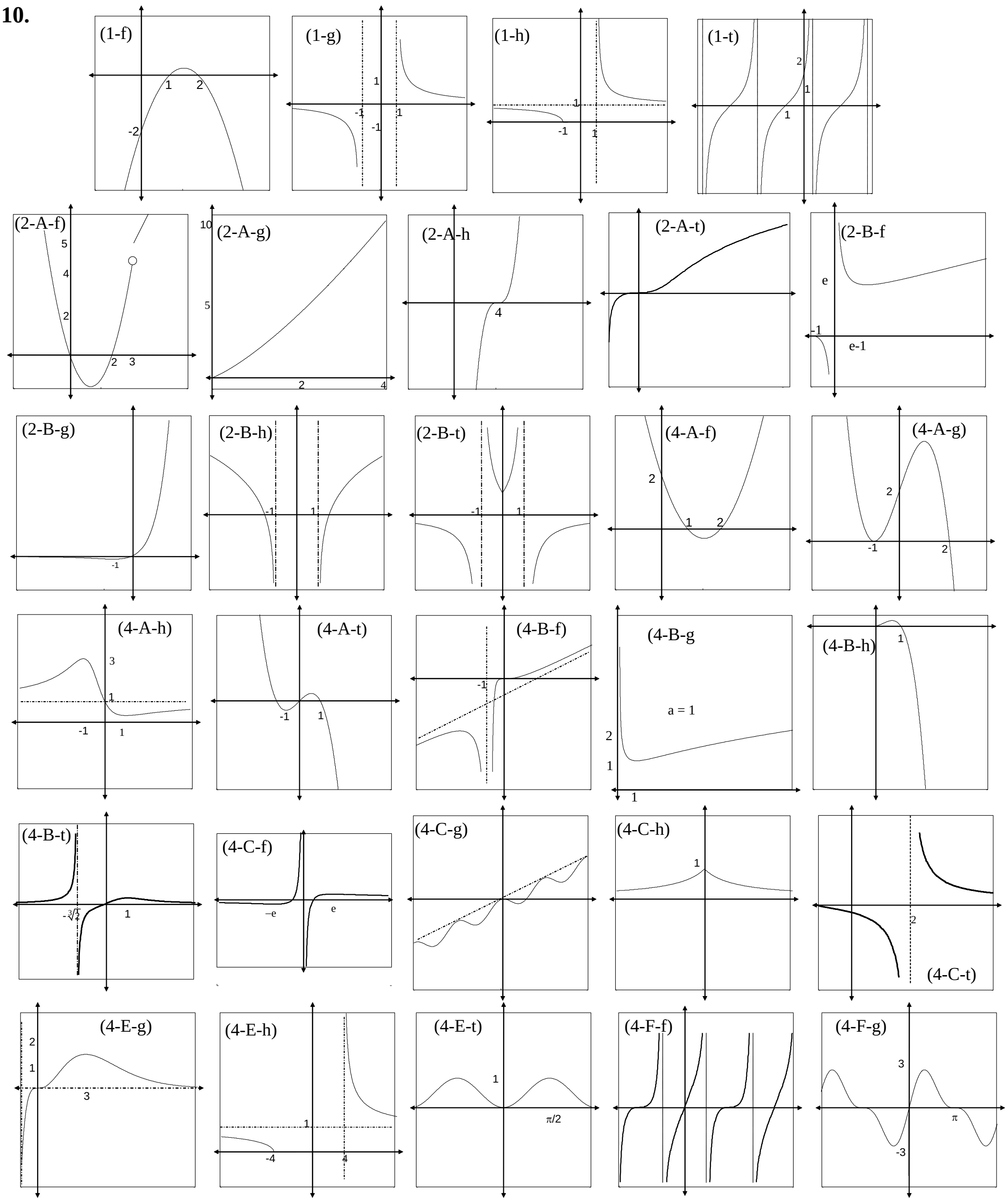
5. (A) f té màxim relatiu en $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$; h té mínim relatiu en (−1,0); g i t no en tenen. (B) f té mínim relatiu en $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$; g té mínim relatiu en (0,0); p té mínim relatiu en (e − 1, e); q té mínim relatiu en $(-1, -e^{-2})$; s té mínim relatiu en (0,1); h, t i r no en tenen. **6.** (A) f convexa en]−∞, 0[, còncava en]0, 1[∪]1, +∞[, PI en 0; g convexa en $\left]-\infty,-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]0,\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right[$, còncava en els altres, PI en x = $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}$; h còncava en $\left]-\infty,-2-\sqrt{3}\right[\cup$ $\cup \left]-2+\sqrt{3},1\right[$, convexa en els altres, PI en x = 1, −2 ± $\sqrt{3}$; t còncava en]−∞, −2[, convexa en els altres, sense PI; p còncava en]−∞, 2[, convexa en els altres, PI en 2. (B) f convexa en]−∞, 3[, còncava en els altres, sense PI; g còncava en]−∞, −1[, convexa en els altres, PI en −1; h còncava en ℝ; t convexa en]−∞, 2[∪]3, +∞[.

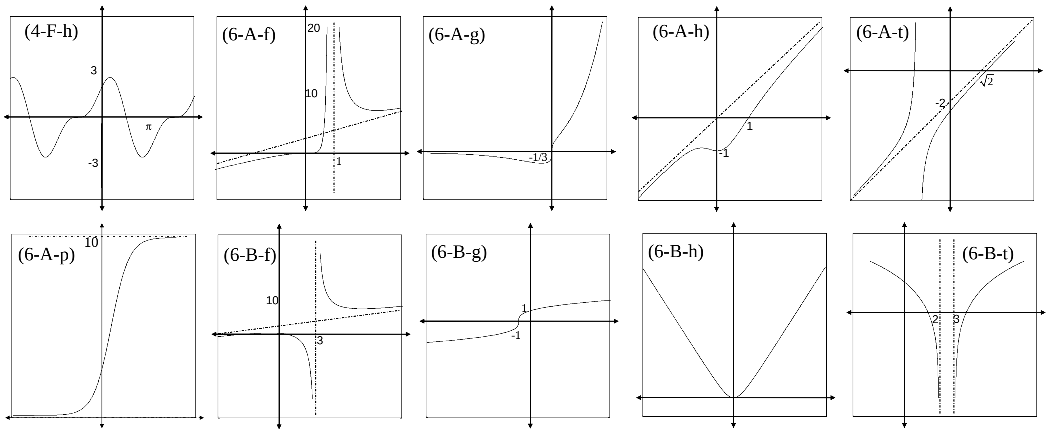
7. Si n = 1, recta creixent i no té extrems ni inflexions; si n ≠ 1 és imparell, f creix en $\mathbb{R}$, convexa en]–∞, 0[i còncava en]0, +∞[, PI en x = 0; si n parell, f còncava en $\mathbb{R}$, decreix en]–∞, 0[, creix en]0, +∞[, mínim relatiu en x = 0. **8.** (A) f té $M\left(-\frac{4}{3}, \frac{203}{27}\right)$ i m(2, –11); g té $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{32}{15}\right)$ i $m\left(1, \frac{1}{3}\right)$. (B) f té m(–1, –28) i no té M; g té M(0, 9) i m(–3, –72).

9.

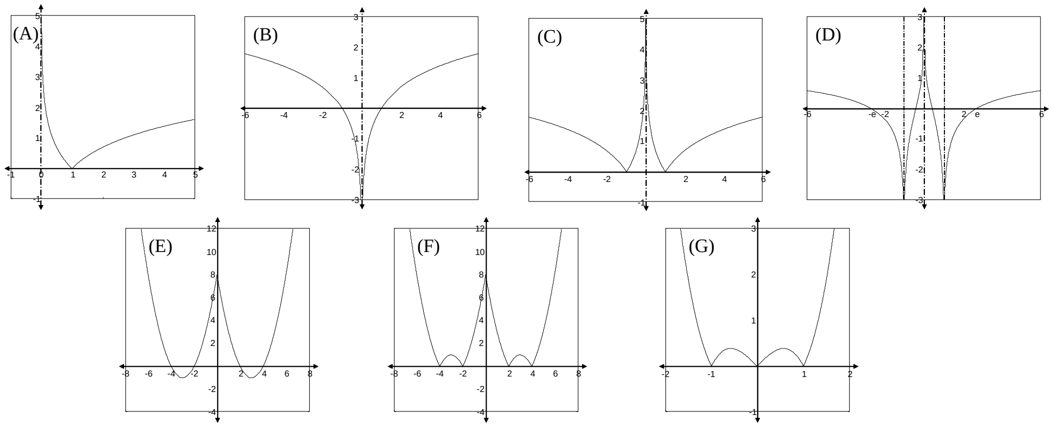


10.

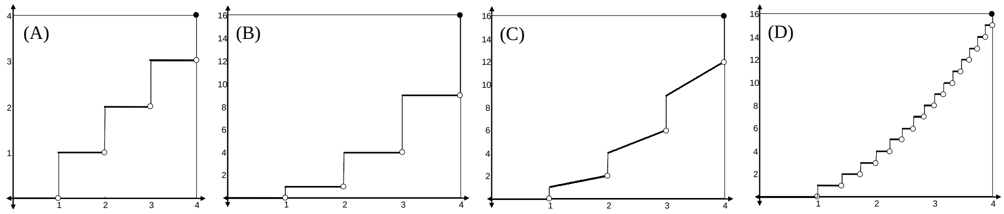




11.

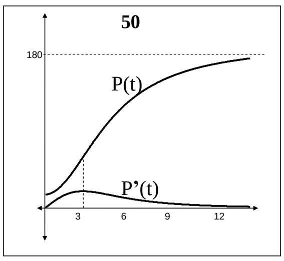


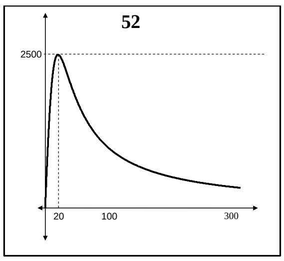
12.

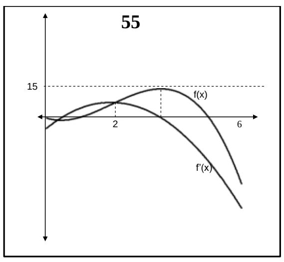


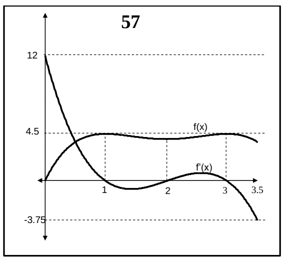
13. En t = 2, l'acceleració es nul·la, v'(2) = 0; $VMv_{[0,\,2]} = 2$, $VMv_{[2,\,4]} = -2$ i $VMv_{[0,\,4]} = 0$; en [0, 2] el moviment és accelerat, en [2, 4] és desaccelerat i en [0, 4] l'acceleració mitjana és 0. **14.** Només f verifica les hipòtesis, per a x = 3/2, perquè g i h són discontinues en x = –1. **15.** P(2, 4). **16.** (A) Sí, x = $\sqrt{3}/3$. (B) No, discontínua en x = $\pi/2$. (C) No perquè ln1 ≠ lne. **17.** (A) No té solucions. (B) Una solució en]–4, –3[i una altra en]0, 1[. (C) Una solució en]–5,–4[. (D) Una solució en]0, 1[. (E) Una solució en]–1, 0[. (F) Una solució en]–1, 0[i una altra en]1, 2[.
18. (A) a = –3, b = 5, c = 4. (B) a = –16/5, b = 36/5, c = 1/5. **19.** Per a $a \in [0, 2\pi]$, $\exists x_0 \in]0, a[$ tal que $\dfrac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = \cos x_0 \le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin a}{a} \le 1 \;\Rightarrow\;$ sina ≤ a, $\forall a \in [0, 2\pi]$. **20.** No. **21.** No, perquè f no és derivable en $\sqrt{5} \in]1, 3[$.
23. (A) Siga $f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$. Com que f(–a) = f(a), si a és arrel, f(a) = 0 → f(–a) = 0 → –a també és arrel. (B) f és contínua en [0, π] i f(0) > 0 i f(π) < 0 → (Bolzano) $\exists x_0 \in]0, \pi[$ tal que $f(x_0) = 0$. (C) Com que f és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, si f té tres arrels, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, aleshores per Rolle, f ' tindria dues arrels, però f '(x) = 0 només té una arrel: x = 0. **24.** Si f és una funció polinòmica, aleshores és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, i li podem aplicar el Teorema de Rolle. Si f té 4 arrels distintes, les ordenem, i per Rolle, entre cada dues arrels consecutives hi ha una arrel de f'. Per tant, f' té 3 arrels distintes (no en té més, perquè f' és polinòmica de grau 3). Repetint aquest raonament per a f', que també és contínua i derivable en $\mathbb{R}$, obtenim que f'' té dues arrels distintes. **25.** (A)]–1, 0[,]0, 2[,]2, 3[. (B)]0, 1[,]1, 2[. (C)]–3, –2[,]–2, 0[,]0, 1[,]1, 2[. **26.** m = 10, n = –25. **27.** a = –3, b = 3, c = 1.
28. $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + (1+2a)x$, $a \neq 0$. **29.** a = c = 1/2, b = –3.

30. $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$. **31.** a = c = 1, b = –1. **32.** a = 9/2, b = –1, c = 1/2. **33.** a = 3, b = –1. **34.** a = –1, b = 2. **35.** a = –2, b = 5, c = –2. **36.** a = c = –2, b = 3. **37.** a = 1, b = –2, c = 3. **38.** a = 1, b = –2, c = 2. **39.** a = –2, b = 0, c = 0, d = 2. **40.** a = –1, b = 4, c = 0. **41.** y + 2 = –3(x – 1). **42.** P(1, 4) i Q(–2, –2). **43.** (A) 3/4. (B) 1/2. (C) 2. (D) 1/3. (E) 1. (F) 1. (G) 1. (H) 4. (I) 1. (J) 1. (K) +∞. (L) 0. (M) 0. (N) 1. (Ñ) 1. (O) –1/3. (P) 1. (Q) 1/e. (R) 1. **44.** (A) –1/3. (B) 2. **45.** y = 2 (bilateral). **46.** Discontinuïtat evitable en x = 0 i de 2n espècie en x = π/2. **47.** Discontinuïtat evitable en x = 2. **48.** (A) $\mathbb{R} \sim \{\pi/2, \pi\}$. (B) Evitable en x = π/2, de salt 6 en x = π.
49. (A) –2 m/setmana i 2 m/setmana. En la primera setmana disminueix la neu acumulada i en la segona augmenta (en ambdós casos a raó de 2 m per setmana). (B) 2.25, 3 i 2.25 m/setmana respectivament. (C) En x = 3, assoleix 4 metres. (D) En x = 1 i en x = 4, que no hi ha neu. (E) En x = 2, amb 3 metres/setmana. **50.** (A) No, la funció creix sempre. (B) La taxa és màxima als $\dfrac{10}{3}$ anys i la població creix a $\dfrac{33}{4}$ = 8.25 milers d'habitants/any.
(C) AH: y = 180; la població creix aproximant-se a 180000 habitants. **51.** Produir 2 tones de baixa qualitat i 1 d'alta qualitat, amb un ingrés màxim de 40 000 €. **52.** (A) Creix en [0, 20[i decreix en $]20,+\infty[$. (B) El benefici de tindre el producte al mercat augmenta els primers 20 anys, després disminueix. (C) 20 mesos, 2500€.
53. (A) 11.4 mcg/(m^3 · any). (B) C'(8) = 5.4 mcg/(m^3 · any). (C) Com que C''(x) = –1.2, la variació del ritme és constant. **54.** (A) 80 €. (B) −25 €/any (ha perdut de mitjana 25 € de valor cada any). (C) 8 €/any i −25 €/any.
(D) Creix en [0, 2[i decreix en]2, 8]. (E) 20 €, en l'instant t = 2. (F) $P'(t) = \begin{cases} 8t & \text{sí } 0 \le t < 2 \\ \dfrac{-5}{2} & \text{sí } 2 < t \le 8 \end{cases}$. La velocitat a què canvia el preu del producte. (G) No té màxim; fins a t = 2 la segona derivada és positiva i la variació del preu augmenta, però com f no és derivable en t = 2, f' no assoleix el màxim. Després de t = 2 la segona derivada és constant i la primera és negativa. **55.** (A) f còncava en]0, 2[i convexa en]2, 6[(B) PI en x = 2. (C) En x = 2, la velocitat de variació de la marea passa de créixer a decréixer i és per tant màxima: a les 2 hores és quan més ràpidament canvia la marea. **56.** (A) f(0) = 1 Dam, f(5) = 88.5 Dam, l'altitud a què es troba el globus en eixe instant. (B) VMf[3, 5] = 37 Dam/h. (C) 90 Dam/h. (D) Menor altura: 0.5 Dam, als 60 minuts; major altura: 850 Dam, a les 10 hores. (E) La major a les 10 hores, 270 Dam/h; la menor als 30 minuts, –0.75 Dam/h.
57. (A) 0 km/min^2, no varia l'acceleració mitjana en eixe tram. (B) 0.75 km/min. (C) Augmenta en $]0,1[\cup]2,3[$ i disminueix en $]1,2[\cup]3,3.5[$. (D) 4.5 km/min, en x = 1 i en x = 3. (E) 0 km/min, en x = 0. (F) Acceleració màxima: 12 km/min^2 en x = 0; mínima –3.75 km/min^2 en x = 3.5.









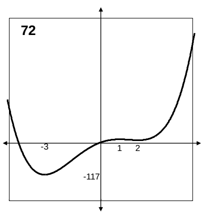
58. (A) m = n = 1/2. (B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, no en té; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, AH: y = 0. **59.** (A) a = 1. (B) AH: y = 2/3.
60. (A) a = –1/3. (B) a = –2. (C) a = 2. (D) a = 1/2. (E) a = 2. (F) a = 3. (G) a = 1/2. **61.** (A) a = 1. (B) $f'(x) = -1/2$. **62.** a = 3/2. **63.** (A) a = 3/4. (B) $f'(x) = 0$. **64.** (A) (A) f contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{1\}$, $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 1 \\ 4(x-2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$. (B) Decreix en $]-\infty,-1[\cup]1,2[$ i creix en $]-1,1[\cup]2,+\infty[$; màxim relatiu en x = 1, valor 5; mínim relatiu en x = –1, valor: 1; mínim relatiu en x = 2, valor 3.

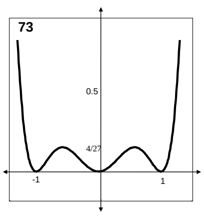
65. (A) $\mathbb{R} \sim \{\ln 1/2\}$. (B) AV: $x = \ln 1/2$; AH: $y = 0$ (esquerra); AO: $y = x - 2$ (dreta). (C) No és derivable en $x = 0$.

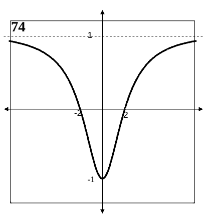
66. (A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. (B) f contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{0\}$. (C) Màxim valor 1 = f(0); mínim valor 1/4 = f(3). **67.** (A) $f'(0) = 1/2$. (B) $f'(0) = 0$. **68.** (A) $\mathbb{R} \sim \{-1, 0, \ln 3\}$. (B) AO: $y = x$ (esquerra); AH: $y = 0$ (dreta); AV: $x = \ln 3$. **69.** (A) $]-1/4, +\infty[\sim\{0\}$. (B) AH: $y = 0$ (dreta). **70.** (A) $\mathbb{R} \sim \{0\}$. (B) No, en $x = 0$ hi ha una discontinuïtat evitable. (C) Sí, $y = 1$ és AH bilateral. **71.** (A) $\mathbb{R}$. (B) AH: $y = 1/2$ (bilateral); AV: $x = 0$.

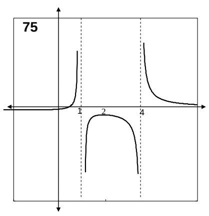
72. (A) Creix en $]-3, 1[\cup]2, +\infty[$ i decreix en $]-\infty, -3[\cup]1, 2[$; màxim relatiu en $x = 1$, valor 9; mínim relatiu en $x = -3$, valor -117 i en $x = 2$, valor 8. (B) Com que no esta definida en interval tancat no estan garantits els extrems absoluts; no hi ha màxim absolut però sí mínim absolut: -117, assolit en $x = -3$. (C) Còncava en $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\dfrac{7}{3}}, +\infty\right[$ i convexa en $\left]-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right[$. PI. en $x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. **73.** (A) O(0, 0), A(1, 0) i B(−1, 0). (B) f creix en $\left]-1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup]1, +\infty[$ i decreix en els altres intervals. (C) Màxim absolut $4/27 = f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; mínim absolut $0 = f(\pm 1)$. **74.** (A) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. (B) f decreix en $]-\infty, 0[$ i creix en $]0, +\infty[$; mínim relatiu i absolut en $x = 0$, valor -1. (C) f convexa en $\left]-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ i còncava en $\left]-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[$; PI en $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (D) AH: $y = 1$, bilateral. **75.** (A) AH: $y = 0$, bilateral; AV: $x = 1$ y $x = 4$. (B) f creix en $]-2, 1[\cup]1, 2[$ i decreix en $]-\infty, -2[\cup]2, 4[\cup]4, +\infty[$. (C) Màxim relatiu en $x = 2$, valor -1; mínim relatiu en $x = -2$, valor $-1/9$.

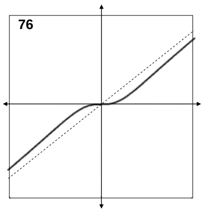
76. (A) $f'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{6x - 2x^3}{(x^2+1)^3}$. (B) Creix en $\mathbb{R}$. (C) Convexa en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i còncava en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$. (D) AO: $y = x$ (bilateral). **77.** (A) A(1, 0) i B(−2, 0). (B) $[-2, +\infty[\sim\{0\}$. (C) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]0, 1[$; mínim relatiu en $x = 1$, valor 0. (D) Còncava en $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$ i convexa en $]2, +\infty[$; PI. en $x = 2$. AV: $x = 0$; AO: $y = x$ (bilateral). **78.** (A) AH: $y = 0$ (bilateral per les dues). (B) f creix en $]-1, 1[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en $x = -1$, valor $-1/2$, màxim relatiu en $x = 1$, valor 1/2. (C) g creix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ i decreix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; mínim relatiu en $x = 0$, valor 0, màxims relatius en $x = \pm 1$, valor 1/4. **79.** (A) $D_f = \mathbb{R}$; AH: $y = 0$ (bilateral). (B) f creix. en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$. Màxim relatiu i absolut en $x = \pm\sqrt{3}$, valor 1/8; mínim relatiu i absolut en $x = 0$, valor -1. (D) f positiva en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i negativa en $]-1, 1[$.

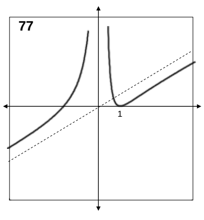


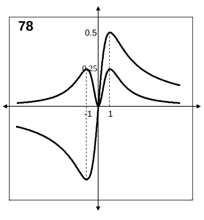


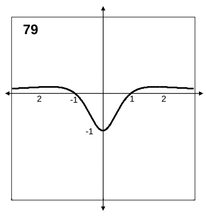




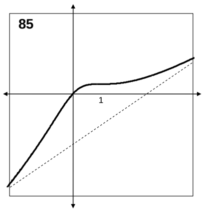


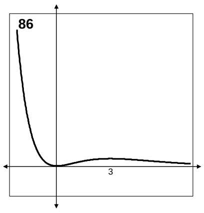


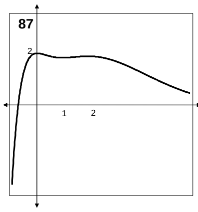


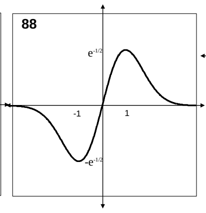


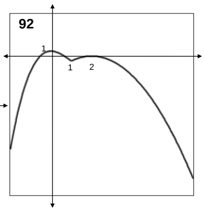
80. (A) $[-2, +\infty[$. (B) Creix en $[-2, -1[\cup]1, +\infty[$, decreix en $]-1, 1[$; màxim relatiu en x = –1, valor 2; mínim relatiu en x = 1 i x = –2, valor 0. **81.** (A) $[-2, 2]$. (B) f creix en $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$. Màxim relatiu en $x = \pm\sqrt{2}$, valor 2; mínim relatiu en x = 0 i ±2, valor 0. (C) Mínim absolut 0, màxim absolut 2. **82.** (A) $]-2, +\infty[\sim\{1\}$. (B) Creix en $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]-1, 1[$; màxim relatiu en x = –1, valor ln4. **83.** (A) $]-4, 4[\sim\{0\}$. (B) Creix en $\left]-4, -\sqrt{8}\right[\cup \left]0, \sqrt{8}\right[$ i decreix en $\left]-\sqrt{8}, 0\right[\cup \left]\sqrt{8}, 4\right[$. Màxim relatiu en $x = \pm\sqrt{8}$, valor 6ln2. **84.** (A) $]-3, 3[$. (B) Creix en $]-3, -2[\cup]0, 2[$ i decreix en $]-2, 0[\cup]2, 3[$. (C) Màxim relatiu en x = ±2, valor 2ln5;mínim relatiu en x = 0, valor 2ln3. (D) Màxim absolut 2ln5, no hi ha mínim absolut. **85.** (A) Creix en $\mathbb{R}$; no té extrems relatius. (B) Còncava en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ i convexa en $]-1, 1[$; PI en x = ±1. (C) m = 0, en x = 1; m = 2, en x = –1. **86.** (B) Decreix en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ i creix en $]1, 3[$. (C) Màxim relatiu en x = 3, valor $4e^{-3}$; mínim relatiu en x = 1, valor 0. (C) y = 0 (dreta). **87.** (A) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, 2[$ i decreix en $]0, 1[\cup]2, +\infty[$; màxim relatiu en x = 0, valor 2 i en x = 2, valor $14e^{-2}$; mínim relatiu en x = 1, valor $5e^{-1}$. (B) AH: y = 0 (dreta). **88.** (A) Creix en $]-1, 1[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; màxim relatiu en x = 1, valor $e^{-1/2}$; mínim relatiu en x = –1, valor $-e^{-1/2}$. (B) Còncava en $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ i convexa en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$; PI. en x = 0 i $\pm\sqrt{3}$. (B) AH: y = 0 (bilateral). **89.** (A) Creix en $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ i decreix en $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$. (B) Màxim relatiu en x = 0, valor $1 + e^2$; mínim relatiu en x = ±1, valor 2e. (C) Mínim absolut 2e; no hi ha màxim absolut. **90.** (A) Creix en $]0, \pi/4[\cup]5\pi/4, 2\pi[$ i decreix en $]\pi/4, 5\pi/4[$. (B) Màxim relatiu en x = π/4, valor $\sqrt{2}$; màxim relatiu en x = 2π, valor 1; mínim relatiu en x = 5π/4, valor $-\sqrt{2}$, mínim relatiu en x = 0, valor 1. (C) Màxim absolut $\sqrt{2}$ i mínim absolut $-\sqrt{2}$. **91.** (A) f és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$. (C) Màxim absolut: 3, quan x = 0; mínim absolut: –1, quan x = ±2. **92.** (A) Es contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R}\sim\{1\}$. (B) Creix en $]-\infty, 0[\cup]1, 2[$ i decreix en $]0, 1[\cup]2, +\infty[$; màxim relatiu en x = 0, valor 1, màxim relatiu en x = 2, valor 0, mín. relatiu en x = 1, valor –1. (C) Convexa en $\mathbb{R}\sim\{1\}$. **93.** (A) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, contínua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}\sim\{0\}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. (B) Creix en $]-1/2, 0[\cup]1/2, +\infty[$, decreix en $]-\infty, -1/2[\cup]0, 1/2[$; màxim relatiu en x = 0, valor 0, mínim relatiu en x = ±1/2, valor –1/4.

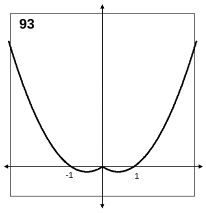












94. Màxim absolut 1/2, en x = π/4; mínim absolut –1/2, en x = 3π/4. **95.** m ≥ 0. **96.** f ''(x) = 0 si i només si 6ax + 2b = 0, que té solució necessàriament. **97.** (A) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. (B) $b^2 - 3ac > 0$. (C) $b^2 - 3ac < 0$. (D) Si $b^2 - 3ac = 0$, l'únic punt singular és $x = -\dfrac{b}{3a}$, però esta és solució de f ''(x) = 0, i com que f '''(x) = 6a ≠ 0, f té una inflexió en eixe punt. **98.** 4.5 i 6 m. **99.** Quadrat de costat $\sqrt{2}R$. **100.** Base i altura de $5\sqrt{2}$ m; àrea màxima 50 m². **101.** Costats de 1 m, diagonal mínima $\sqrt{2}$ m. **102.** Base: $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ m, altura: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ m; àrea màxima: 1 m².

103. Base: $2\sqrt{50}$ cm, altura: $\sqrt{50}$ cm; àrea màxima 50 cm². **104.** 12 i 24 cm. **105.** r = 2 cm, h = 3 cm.

106. 8, 8 i 4 m. **107.** Costat triangle: $\dfrac{30}{6-\sqrt{3}}$ cm, altura rectangle: $\dfrac{15(3-\sqrt{3})}{6-\sqrt{3}}$ cm. **108.** $r = \dfrac{1}{3}$ m, $h = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ m.

109. Base = 4, altura = 8. **110.** (A) t: $2ax + y = a^2 + 12$. (B) a = 2; mínima àrea = 32. **111.** x = 40 m, y = 60 m, 3600 €. **112.** 20×60 m; cost = 36000 €. **113.** 25×80 m; màxima àrea: 8000 m^2. **114.** Base: 50m, altura: $25\sqrt{3}$ m; àrea màxima: $1250\sqrt{3}$ m^2. **115.** Base: $6\sqrt{10}$ m, altura: $\sqrt{10}$ m; cost màxim: $200\sqrt{10}$ €. **116.** 40 litres; cost: 45 €/litre. **117.** Quadrat de 20 m de costat; mínima àrea: 200 π m^2. **118.** $\sqrt{10}$. **119.** $\alpha = \text{arctg}\frac{25}{x} - \text{arctg}\frac{20}{x}$. (B) $x = 10\sqrt{5}$ m, $\alpha \simeq 6.38º$. **120.** $\alpha = \text{arctg}\frac{30}{x} - \text{arctg}\frac{20}{x}$. (B) $x = 10\sqrt{6}$ m, $\alpha \simeq 11.54º$. **121.** $6\sqrt{5}$ m; 6.38º.

122. (A) Creix en]0, 3[i en]5, 6[; decreix en]3, 5[. (B) Màxima velocitat 54 km/h, a las 3 h i a las 6 h.

123. (A) f(5) = 100 km (lògic perquè la funció acumula km recorreguts). (B) PI en x = 2. (C) f és còncava en]0, 2[i convexa en]2, 5[. (D) f'(2) = 27 km/h. (E) Màxima velocitat en el PI de f. No sempre és així, perquè la coincidència és en un màxim relatiu, no necessàriament absolut i també podria coincidir el PI amb un mínim. **124.** (A) a = –0.5, b = 30, c = 0. (B) 60 minuts. **125.** 87.5 kg. **126.** (A) $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x}$; g(25) = 1.4 €/unitat, g(100) = 1 €/unitat. (B) 400 unitats, 0.95 €/unitat. **127.** (A) P(1, π/4) i Q(–1, –π/4). (B) $f'(0) = 1$.

128. (A) P(2, ln5) i $Q\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{4}\right)$. (B) P(1, ln2), màxim pendent: 1. **129.** 3 i 6. **130.** y = –2x +4. **131.** 10 i 10.

132. (A) 15000 fruits. (B) $P(x) = 15000 + 225x - 15x^2$. (C) 7 o 8 arbres més.

133. (A) I(x) = (50 + x)(1000 – 10x). (B) 75 viatgers a 750 €/persona; Ingrés màxim: 56250 €.

134. $3\sqrt{5}$ m. **135.** Altura: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ m; longitud mínima: $5 + \sqrt{3}$ m. **136.** Base: 15×30 cm; altura: 20 cm. **137.** 2, 4 i 3 m; 24 m^2. **138.** Base: 10×5 cm, altura 5 cm; cost mínim: 450 €. **139.** x = y = 4 m; 1440 €.

140. (A) $C(x) = 1080 + 80x + \frac{720}{x}$. (B) x = y = 3 m. **141.** Base 10x10 m, altura 2.5 m; volum 250 m^3.

142. Radi $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$; 6.83 dm, altura: $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$; 3.41 dm; cost mínim $300\sqrt[3]{\pi}$; 439.38 €. **143.** x = y = p/2.

144 (A) $D(t) = \sqrt{(1000 - 20t)^2 + 100t^2}$. (B) t = 30 i 50 h. (C) t = 40 h, D = $200\sqrt{5}$ km. **145.** $\sqrt{12.5}$ km; temps mínim 8.714 h. **146.** Triangle equilàter de base $\sqrt{3}R$ i altura 3R/2. **147.** 40×20 m i despeses de 18000 €.

148. x = a/2, y = b/2. **149.** (A) A(x) = x(3.6 – 2x); 0.8 ≤ x ≤ 1. (B) x = 0.9, y = 1.8. (C) x = 0.8, y = 2 o x = 1, y = 1.6. **150.** (A) $A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$; x = 5 m, A(5) = 25/8 m^2. (B) $A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$; $x_0 = \frac{10\pi}{\pi+4}$, $A(x_0) = \frac{25}{\pi+4}$ m^2. **151.** $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$. **152.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$ i $R\sqrt{2}$. **153.** Catets iguals de longitud $2 + \sqrt{2}$ cm.

154. Costats de 4 m; àrea mínima 48 m^2. **155.** Quadrat de 2 m de costat. **156.** 10×7 m; 7860 €. **157.** P(1, 1), mínima distància: $\sqrt{5}$ m. **158.** Màxima distància 1, punts A(0, 1), B(1, 0) i C(–1, 0); mínima distància: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, punts $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ i $Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. **159.** $P\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ i $Q\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$; mínima distància: $\frac{\sqrt{19}}{2}$. **160.** Màxima distància 2, punts A(2, 1), B(–2, 1) i O(0, –1); mínima distància $\sqrt{3}$, punts $P\left(\sqrt{2}, 0\right)$ i $Q\left(-\sqrt{2}, 0\right)$.

161. (A) A(0, 2/a) i B(2a, 0). (B) $2\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$. (C) a = 1; distància mínima: $2\sqrt{2}$. **162.** P(1/3, 8/9); àrea 16/27 u.s.

163. $2\sqrt{2}$ m. **164.** Mínima àrea 6; A(0, 6) i B(2, 0); r: y = –3x + 6.

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Càlcul de probabilitat

educàlia
editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES II

Càlcul de probabilitat

educàlia
editorial

Primera edició, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-08-4
Depòsit legal: V-3244-2018
Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 5

Variables aleatòries contínues

5.1 Probabilitats uniformes per a variables contínues

Recordem que una **variable aleatòria contínua** va ser definida com aquella per a la qual el rang o conjunt de possibles valors és un interval de nombres reals. Són exemples de variables contínues les associades a longituds, pesos, temps, etc.

L'assignació de probabilitats a variables contínues és diferent que en variables discretes. Per a començar, no és possible l'ús de la regla de Laplace perquè el nombre de resultats possibles no és finit.

Només tindran probabilitat els successos relacionats amb intervals, assignada a través de la seua longitud. Les variables contínues relacionen estretament el Càlcul de probabilitats amb el ***Càlcul integral*** perquè expressen les probabilitats com a ***àrees***.

El següent exemple generalitza la regla de Laplace i estableix el primer pas per al càlcul de probabilitats de variables contínues.

Exemple 1

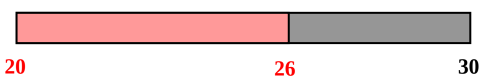
El temps que tarda una persona a anar des de sa casa al treball és aleatori i oscil·la entre 20 i 30 minuts. Calculem la probabilitat que:

(A) Tarde com a màxim 26 minuts. (B) Tarde almenys 27 minuts. (C) Tarde entre 24 i 27 minuts.

Definim la següent variable contínua:

$$X: \text{“temps que tarda la persona a anar al treball”} \quad \rightarrow \quad R_X = [20, 30]$$

(A) La probabilitat desitjada és la que X prenga un valor qualsevol de l'interval [20, 26]. Com que no hi ha raó per a suposar cap instant més probable que un altre, la probabilitat que haja transcorregut com a màxim 26 minuts és el quocient entre la longitud de l'interval [20, 26] que conté els resultats favorables i la de l'interval [20, 30] que conté els resultats possibles:



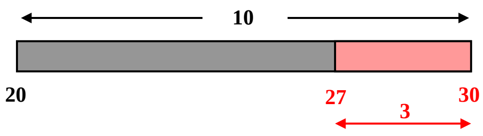
$$P(X \le 26) = P(X \in [20, 26]) = \frac{\text{long}([20,26])}{\text{long}([20,30])} = \frac{26 - 20}{30 - 20} = \frac{6}{10}$$

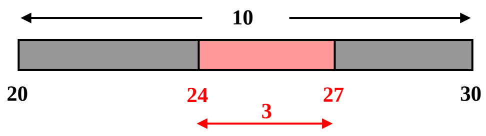
De la mateixa manera responem als altres apartats:

(B) $P(X \ge 27) = P(X \in [27, 30]) = \dfrac{\text{long}([27,30])}{\text{long}([20,30])} = \dfrac{30 - 27}{30 - 20} = \dfrac{3}{10}$

(C) $P(24 \le X \le 27) = P(X \in [24, 27]) = \dfrac{\text{long}([24,27])}{\text{long}([20,30])} = \dfrac{27 - 24}{30 - 20} = \dfrac{3}{10}$

Veiem que les probabilitats que assignem a intervals que tenen la mateixa longitud són les mateixes. En aquesta forma d'assignar probabilitats, **la probabilitat d'un interval resulta proporcional a la seua longitud**.





1 Una persona espera una telefonada entre l'1 i les 2. Calcula la probabilitat que la trucada es produisca abans de les 1:10 hores o després de les 1:50 hores.

➢ Probabilitats uniformes en un interval

Considerem una variable contínua X amb rang l'interval [A, B].

Diem que X té una distribució de probabilitat ***uniforme en l'interval* [A, B]** si la probabilitat de qualsevol subinterval de [A, B] és **proporcional a la seua longitud**:

$$\text{Si}\quad [a, b] \subset [A, B] \quad \to \quad \mathbf{P(a \le X \le b)} = \frac{\mathbf{long([a,b])}}{\mathbf{long([A,B])}} = \frac{\mathbf{b - a}}{\mathbf{B - A}}$$

- L'expressió obtinguda significa que la probabilitat que la variable X prenga valors en un determinat subinterval $[a, b] \subset [A, B]$ és el quocient entre la longitud del subinterval [a, b], que representa els resultats favorables, i la de l'interval [A, B], que representa els resultats possibles.
- Qualsevol variable definida com X: "nombre real elegit a l'atzar en un interval I" segueix una distribució uniforme en l'interval I, i calcularem probabilitats amb l'anterior expressió.
- Un resultat important, cert per a totes les variables contínues com veurem, és que com els intervals [a, b],]a, b], [a, b[i]a, b[tenen tots la mateixa longitud b − a, aleshores tenen tots ells idèntica probabilitat:

$$P(X \in [a, b]) = P(X \in]a, b]) = P(X \in [a, b[) = P(X \in]a, b[)$$

- Com a conseqüència d'això, la probabilitat que X prenga un valor concret és igual a zero. En les variables contínues, només els intervals tenen probabilitat no nul·la:

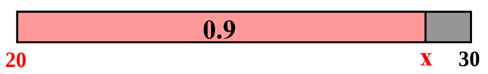
$$\mathbf{P(X = x) = 0}, \text{ per a qualsevol } x \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

Tornant a l'exemple 1, a quina hora ha d'eixir de sa casa la persona per a no arribar tard al treball, amb una probabilitat de 0.9, si la seua jornada laboral comença a les 8 hores del matí?

Anomenem **x** al temps màxim que pot tardar per a arribar a les 8, és a dir, si tarda x o menys de x, no arriba tard. Volem conèixer el valor de x perquè la probabilitat de no arribar tard siga de 0.9:

$$P(X \le x) = 0.9$$



Però:

$$P(X \le x) = P(20 \le X \le x) = P(X \in [20, x]) = \frac{\text{long}([20,x])}{\text{long}([20,30])} = \frac{x - 20}{30 - 20} = \frac{x - 20}{10}$$

Aleshores: $P(X \le x) = 0.9 \iff \frac{x - 20}{10} = 0.9 \iff x - 20 = 9 \iff \mathbf{x = 29}$

El màxim temps que pot tardar per a arribar a les 8 amb probabilitat 0.9 és de 29 minuts, per tant, ha d'eixir com a màxim a les 7:31 hores de sa casa.

2 Una cinta de vídeo de 3 hores de duració es va projectar durant cert temps. Calcula la probabilitat:

(A) Que es projectara com a màxim una hora i mitja des del seu començament.

(B) Que es projectara almenys dues hores.

(C) Una persona posa aquesta cinta a gravar un programa de 2 hores de duració. Quina probabilitat té de gravar el programa complet?

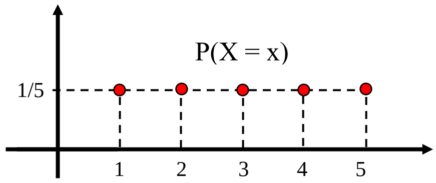
(D) Suposem que la cinta de vídeo té un defecte que li impedeix gravar correctament entre els minuts 70 i 80. Si volem gravar un programa de 30 minuts de duració i no la rebobinem, quina probabilitat existeix de gravar correctament el programa en la seua totalitat?

5.2 Funció de densitat de probabilitat

Exemple 3

Considerem la variable **X: "nombre enter elegit a l'atzar de l'interval [1, 5]"**. Aquesta variable és discreta, el seu rang és {1, 2, 3, 4, 5} i assigna les mateixes probabilitats a tots els valors del rang. La funció de quantia és

$$P(X = x) = \begin{cases} \mathbf{\frac{1}{5}} & \textbf{si} \quad \mathbf{x = 1, 2, 3, 4, 5} \\ \mathbf{0} & \textbf{en altre cas} \end{cases}$$



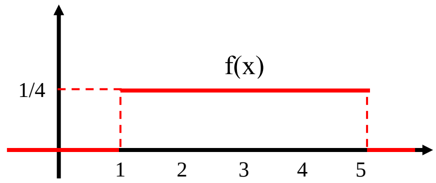
La seua representació gràfica constant representa les probabilitats iguals dels valors del rang.

Considerem la variable **X: "nombre real elegit a l'atzar de l'interval [1, 5]"**. Aquesta variable és contínua, el seu rang és l'interval [1, 5], i segons l'apartat anterior, segueix una distribució **uniforme en l'interval [1, 5]**.

$$\text{Si} \quad [a, b] \subset [1, 5] \quad \text{tenim que} \quad \mathbf{P(X\in[a, b])} = \frac{\text{long}\left([\,a\,,\,b\,]\right)}{\text{long}\left([1,\,5]\right)} = \mathbf{\frac{b-a}{4}}$$

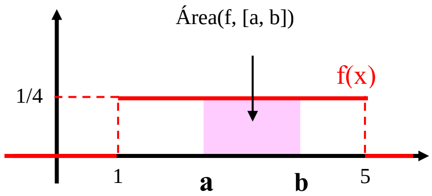
La funció f(x), constant en l'interval [1, 5], amb una línia horitzontal com a representació gràfica per a eixe interval, expressa gràficament la característica fonamental d'aquesta variable contínua:

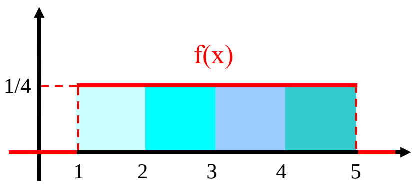
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{\frac{1}{4}} & \textbf{si} \quad \mathbf{1 \le x \le 5} \\ \mathbf{0} & \textbf{en altre cas} \end{cases}$$



Podem calcular la probabilitat P(X∈[a, b]) como **l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f(x) amb l'eix OX,** entre **x = a** i **x = b:**

$$\mathbf{P(X\in[a, b])} = \mathbf{àrea(f, [a, b])} = \text{base} \times \text{altura} = (b - a)\cdot\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{b - a}{4}}$$





Aquesta funció s'anomena funció de densitat de probabilitat de la variable X uniforme en l'interval [1, 5], i permet calcular probabilitats per a qualsevol interval, assignant les **mateixes probabilitats per a intervals de la mateixa longitud i probabilitats proporcionals a les longituds dels intervals.**

3 Calcula el valor de K perquè la funció constant en l'interval [10, 30], $f(x) = \begin{cases} K & \text{si} \quad 10 \le x \le 30 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ represente la variable X: "nombre elegit a l'atzar de l'interval [10, 30]", i calcula les probabilitats:

(A) $P(X \le 15)$ (B) $P(15 \le X \le 20)$ (C) $P(X \ge 20)$ (D) $P(20 \le X \le 21)$ (E) $P(20 \le X \le 20.5)$
(F) $P(X = 20)$ (G) $P(15 < X < 20)$ (H) D'elegir un nombre menor que 15 o major que 25.

➢ Definició de funció de densitat de probabilitat

Els experiments aleatoris en què no és assumible associar les mateixes probabilitats a tots els intervals de la mateixa longitud (la majoria) precisen d'un model que generalitze el cas estudiat de la distribució uniforme. Sorgeix el concepte de ***funció de densitat de probabilitat***, que introdueix funcions que s'utilitzen com a **models** per a representar la distribució de probabilitats d'una variable contínua X.

Considerem una funció f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i un interval qualsevol $I \subset \mathbb{R}$ (pot ser fins i tot $\mathbb{R}$).

Diem que f és una ***funció de densitat de probabilitat en l'interval* I** si verifica:

(A) f és no negativa: $f(x) \geq 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

(B) $f(x) = 0$ si $x \notin I$.

(C) f és contínua en $\mathbb{R}$, excepte com a màxim en un nombre finit de punts de l'interval I.

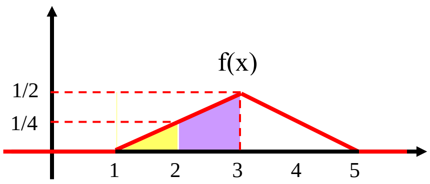
(D) L'àrea de la regió limitada per la corba i l'eix OX entre els extrems de I és igual a 1:

$$\textbf{Àrea(f, I)} = \int_I f(x)\,dx = 1$$

Exemple 4

Comprovem que la següent funció, no constant però simètrica en l'interval [1, 5], és una funció de densitat de probabilitat en l'interval [1, 5]:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{5-x}{4} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$



Como veiem, f és no negativa, perquè $f(x) \geq 0$, i val 0 fora de l'interval [1, 5], és contínua en $\mathbb{R}$ i l'àrea del recinte que forma la gràfica amb l'eix OX és igual a 1, perquè és la suma de les àrees de dos triangles iguals:

$$\text{Àrea}(f, [1,5]) = 2 \cdot \text{Àrea}(f, [1,3]) = 2\int_1^3 \frac{x-1}{4}\,dx = \frac{2}{4}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{9}{2}-3\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = 1$$

La funció f no associa les mateixes probabilitats a intervals de la mateixa longitud. Calculem probabilitats de dos intervals de longitud 1:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \text{àrea}(f, [1,2]) = \int_1^2 \frac{x-1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{2}-2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{1}{8}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = \text{àrea}(f, [2,3]) = \int_2^3 \frac{x-1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_2^3 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{9}{2}-3\right) - \left(\frac{4}{2}-2\right)\right] = \frac{3}{8}$$

4 Per a la funció de densitat de l'exemple anterior, calcula les probabilitats $P(X > 4)$ i $P(2 \leq X \leq 4)$.

5 Representa gràficament les següents funcions, i comprova que són funcions de densitat de probabilitat:

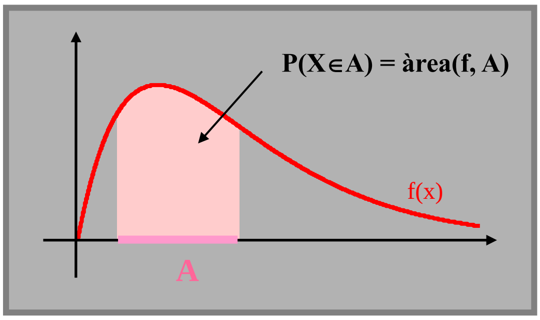
(A) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$

➢ Variables contínues i funcions de densitat

Només ens van a interessar les variables contínues si podem associar-les una funció de densitat per a la qual les seues probabilitats es representen per àrees a través d'aquesta funció. En molts textos d'Estadística aquestes variables són anomenades ***absolutament contínues***, però nosaltres ens limitarem a anomenar-les variables contínues. A continuació les definim.

Diem que una variable aleatòria X és ***contínua*** si hi ha una funció de densitat f definida en el rang de X, tal que per a qualsevol subconjunt $A \subset R_X$ tenim que la probabilitat que X prenga els valors de A és igual a l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f i l'eix OX, en els límits del subconjunt A:

$$\mathbf{P(X \in A) = \text{àrea}(f, A) = \int_A f(x)\,dx}$$



➢ Conseqüències de l'anterior definició

Si una variable X és contínua i f és la seua funció de densitat associada:

(A) Les probabilitats dels intervals [a, b], [a, b[,]a, b] i]a, b[són les mateixes:

$$\mathbf{P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = \text{àrea}(f, [a, b])}$$

(B) La probabilitat que X prenga un valor determinat x és sempre zero:

$$\mathbf{P(X = x) = 0}, \text{ per a qualsevol } \mathbf{x \in R_X}$$

(A) És una propietat del càlcul integral.

(B) És conseqüència de l'anterior apartat, perquè com $[a , x] = [a , x[\cup \{x\}$, aleshores:

$$P(a \le X \le x) = P(a \le X < x) + P(X = x)$$

i com que $P(a \le X \le x) = P(a \le X < x)$ necessàriament $P(X = x) = 0$.

6 Representa gràficament les següents funcions, comprova que són de densitat de probabilitat, i calcula en cada cas les probabilitats $P(X \le 0.5)$ i $P(0.5 \le X \le 1.5)$:

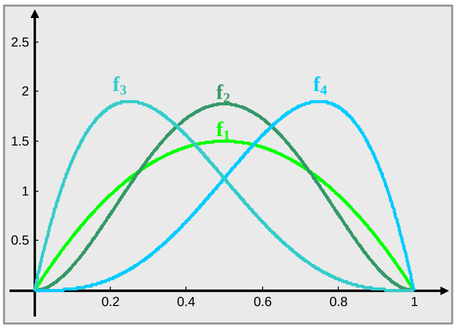
(A) $f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ (B) $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$

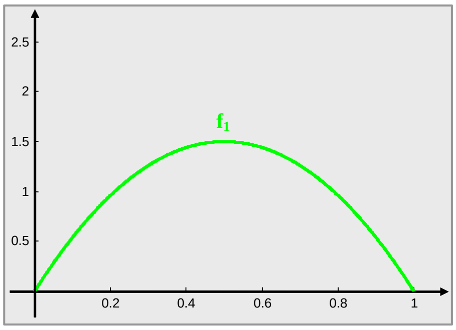
7 Suposem que el consum diari de llum (en kW/h) d'un aparell elèctric és una variable aleatòria X que es pot modelitzar amb la funció de densitat g de l'activitat 6. Quina seria la probabilitat de consumir almenys 0.5 kW/h en un dia?

Exemple 5

A continuació tenim alguns exemples de funcions definides per mitjà de polinomis en l'interval [0, 1], i definides fora d'aquest interval amb el valor 0, que compleixen les condicions necessàries per a ser funcions de densitat de probabilitat en aquest interval:

$f_1(x) = 6x(1 - x)$ $\quad$ $f_2(x) = 30x^2(1 - x)^2$ $\quad$ $f_3(x) = 20x(1 - x)^3$ $\quad$ $f_4(x) = 20x^3(1 - x)$





- Comprovem que $f_1(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ és una funció de densitat de probabilitat en [0, 1]:

  (A) f_1 és no negativa: $f_1(x) \ge 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
  (B) $f_1(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$.
  (C) f_1 és contínua en $\mathbb{R}$.
  (D) L'àrea del recinte que forma amb l'eix OX és igual a 1:

$$\int_R f_1(x)\,dx = \int_0^1 6x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 1$$

- Suposem que la distribució de probabilitat de la variable contínua X: "temps d'espera (en hores) fins a ser atès en una cua" es pot modelitzar amb l'anterior funció de densitat. Calculem la probabilitat que un client haja d'esperar més de 3/4 d'hora per a ser atès:

$$P(X > 3/4) = P(X \in]3/4, 1]) = \int_{]3/4,1]} f_2(x)\,dx = \int_{0.75}^1 6x(1-x)\,dx = 6\int_{0.75}^1 (x-x^2)\,dx =$$

$$= 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0.75}^1 = 6\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-6\left(\frac{0.75^2}{2}-\frac{0.75^3}{3}\right) = 1 - 0.84375 = 0.15625$$

- Calculem la probabilitat que un client haja d'esperar com a màxim 1/4 d'hora per a ser atès:

$$P(X \le 1/4) = \int_0^{0.25} 6x(1-x)\,dx = 6\int_{0.75}^1 (x-x^2)\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.25} = 6\left(\frac{0.25^2}{2}-\frac{0.25^3}{3}\right)-6\cdot 0 = 0.15625$$

Les dues probabilitats $P(X > 3/4)$ i $P(X \le 1/4)$ són iguals, per la simetria de la funció $f_1(x) = 6x(1 - x)$.

8 Comprova que la funció $f_4(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & \text{si } \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ és una f. d. p. en l'interval [0, 1].

Si X és una variable contínua amb l'anterior f. d. p., calcula $P(X \ge 0.75)$, $P(X \le 0.25)$ i $P(0.25 \le X \le 0.75)$.

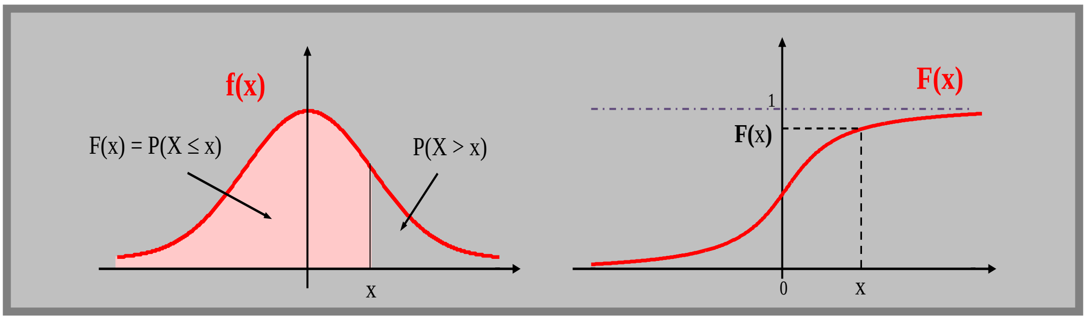
9 Obtén el valor de K per al qual la següent funció és de densitat de probabilitat $f(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{x^3} & \text{si } \; x \ge 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$.

5.3 Funció de distribució de probabilitat

El següent concepte és semblant al de freqüències acumulades en Estadística descriptiva. Es pot definir tant per a variables aleatòries discretes com per a variables aleatòries contínues, i té les mateixes propietats, però les seues aplicacions per a este curs les anem a reduir a les variables contínues, com veurem en pròxims apartats. És una funció "***acumuladora de probabilitat***".

Considerem X variable aleatòria contínua amb rang R i funció de densitat f.
Anomenem ***funció de distribució de probabilitat*** de X, que expressem per **F**, a la funció que per a quasevol $x \in \mathbb{R}$ ens proporciona la probabilitat que X prenga valors de l'interval $]-\infty, x]$:

$$\mathbf{F(x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$



➢ Propietats de la funció de distribució

Si una variable X és contínua, f és la seua funció de densitat, i F la seua funció de distribució:

(A) F és contínua i creixent en $\mathbb{R}$.

(B) $\mathbf{\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0}$ **i** $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$

(C) $\mathbf{P(X > x) = 1 - F(x)}$

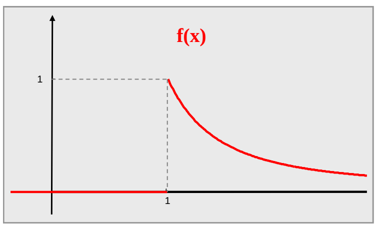
(D) $\mathbf{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$

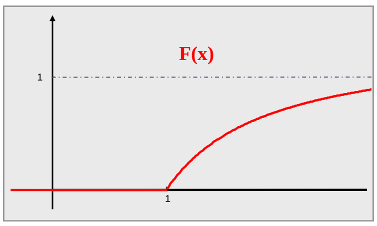
(D) La derivada de la funció de distribució és la funció de densitat: $\mathbf{F'(x) = f(x)}$.

Exemple 6

Obtenim la funció de distribució d'una variable aleatòria amb f.d.p:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$





Si $x < 1$: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

Si $x \geq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{x} \frac{1}{x^2}\,dx = 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^x = \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1 - \frac{1}{x}$

Per tant $\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 1} \\ \mathbf{1 - \dfrac{1}{x}} & \mathbf{si\ x \geq 1} \end{cases}$.

Exemple 7

Obtenim la funció de distribució de la variable aleatòria amb funció de densitat de l'exemple 5, i comprovem totes les propietats de la funció de distribució.

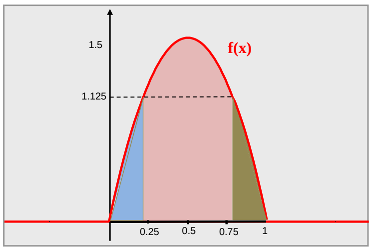
$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

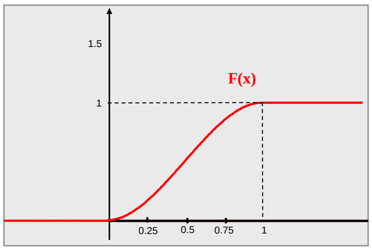
Com que $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ per a tot $x \in$, aleshores:

- Si $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$.
- Si $0 \le x \le 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} 6(x-x^2)\,dx = 0 + 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^x = 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = 3x^2 - 2x^3$.
- Si $x > 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6(x-x^2)\,dx + \int_{1}^{x} 0\,dx = 0 + 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 0 = 1$

En resum, la funció de distribució és:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{3x^2 - 2x^3} & \mathbf{si\ 0 \le x \le 1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{si\ x > 1} \end{cases}.$$





- En la gràfica de F veiem clarament que és creixent i contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} \sim \{0\}$.
- Calculem algunes probabilitats amb la funció de distribució:

  (A) $\mathbf{P(X \le 0.25) = F(0.25)} = 3 \cdot 0.25^2 - 2 \cdot 0.25^3 = 0.15625$

  (B) $\mathbf{P(X > 0.75) = 1 - F(0.75)} = 1 - (3 \cdot 0.75^2 - 2 \cdot 0.75^3) = 1 - 0.84375 = 0.15625$

  (C) $\mathbf{P(0.25 \le X \le 0.75) = F(0.75) - F(0.25)} = 0.84375 - 0.15625 = 0.6875$

- Comprovem que la derivada de la funció de distribució és la funció de densitat:

  Si $0 < x < 1$: $F(x) = 3x^2 - 2x^3 \ \rightarrow \ F'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x) = f(x)$

  Si $x < 0$: $F(x) = 0 \ \rightarrow \ F'(x) = 0 = f(x)$

  Si $x > 1$: $F(x) = 1 \ \rightarrow \ F'(x) = 0 = f(x)$

- La propietat (B) dels límits en l'infinit es verifica fàcilment:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

10 Obtén la funció de densitat i la funció de distribució de la variable aleatòria uniforme en l'interval [2, 7], representa-les gràficament i calcula: (A) $P(X < 3)$. (B) $P(X \ge 4)$. (C) $P(3 \le X \le 6)$.

11 La funció de distribució d'una variable aleatòria és $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } \ x \ge 0 \end{cases}$.

(A) Obtén la seua funció de densitat de probabilitat.
(B) Comprova que els límits de F en $-\infty$ i en $+\infty$ valen respectivament 0 i 1.
(C) Calcula les probabilitats $P(X < 1)$, $P(X \ge 2)$ i $P(1 \le X \le 2)$.

5.4 Esperança i variància d'una variable contínua

Els conceptes d'***esperança*** *i* ***variància*** d'una variable discreta, estudiats en el capítol anterior, són també desenvolupats per a les variables contínues i, encara que el seu significat estadístic és el mateix, la seua definició és molt distinta, perquè mentre en el cas discret aquests conceptes es calculen efectuant sumes, en el cas continu calculem àrees.

Considerem una variable contínua X, amb rang **R** i funció de densitat de probabilitat **f(x)**.

- Anomenem ***esperança*** de la variable X, representada per **E(X)**, a:

$$\mathbf{E(X) = \int_R x \cdot f(x)\, dx}$$

- Anomenem ***variància*** de la variable aleatòria X, representada per **Var(X)**, a:

$$\mathbf{Var(X) = \int_R \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)\, dx}$$

- Anomenem ***desviació típica*** de X, **σ(X)**, a l'arrel quadrada positiva de la variància:

$$\mathbf{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

- L'esperança és també anomenada ***valor esperat*** o ***valor mitjà*** i és, com el seu nom indica, una mesura del valor central de la distribució de probabilitat.
- La variància (o la desviació típica) és una mesura de dispersió: major valor de la variància significa major dispersió dels valors de la variable. Igual que en el cas discret, tenim una fórmula més pràctica per a calcular la variància, basada aquesta vegada en la propietat de linealitat de la integral definida:

➢ Definició operativa de variància

$$\mathbf{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

sent

$$\mathbf{E(X) = \int_R x \cdot f(x)\, dx \quad i \quad E(X^2) = \int_R x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

$$\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E}\left(X - E(X)\right)^2 = \int_R \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)\, dx$$

Com que $\left(x - E(X)\right)^2 = x^2 - 2xE(X) + E(X)^2$ es té:

$$\mathrm{Var(X)} = \int_R \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)\, dx = \int_R \left(x^2 - 2xE(X) + E(X)^2\right) \cdot f(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\int_R x^2 \cdot f(x)\, dx}_{\mathbf{E\left(X^2\right)}} - 2E(X) \underbrace{\int_R x \cdot f(x)\, dx}_{\mathbf{E(X)}} + E(X)^2 \underbrace{\int_R x \cdot f(x)\, dx}_{\mathbf{1}} = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2$$

Per tant

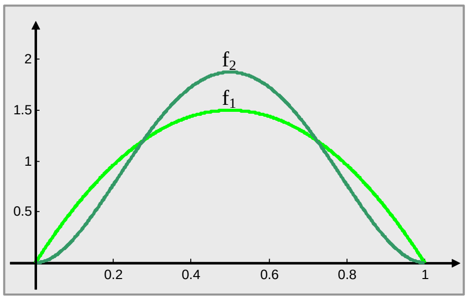
$$\mathbf{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}.$$

Exemple 8

Considerem les variables contínues X_1 i X_2 amb funcions de densitat següents:

$$f_1(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$



Comprovem que les dues variables tenen la mateixa esperança, però que la variància de X_2 és menor; significa que la distribució de probabilitats de X_2 està **més concentrada** que la de X_1; observa les seues gràfiques.

$$E(X_1) = \int_R x \cdot f_1(x)\,dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X_2) = \int_R x \cdot f_2(x)\,dx = \int_0^1 30x^3(1-x)^2\,dx = 30\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 30\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Aleshores $E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{2}$.

Calculem les variàncies, amb la fórmula $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$$E(X_1^2) = \int_R x^2 \cdot f_1(x)\,dx = \int_0^1 6x^3(1-x)\,dx = 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{20}$$

$$E(X_2^2) = \int_R x^2 \cdot f_2(x)\,dx = \int_0^1 6x^4(1-x)^2\,dx = \frac{2}{7}$$

$$\left.\begin{aligned} Var(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{6}{20} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} \\ Var(X_2) &= E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{28} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Var(X_1) > Var(X_2)$$

12 La longitud en cm d'una certa peça fabricada és una variable aleatòria X amb funció de densitat:

$$f(x) = K(x-1)(3-x) \text{ si } 1 \le x \le 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas}$$

(A) Calcula el valor de K per al qual f és una funció de densitat de probabilitat, i representa-la.
(B) Una peça és ven si la seua longitud està entre 1.5 i 2.5 cm. Quina és la probabilitat que una peça siga vendible?
(C) Calcula l'esperança i la variància de X.

13 En el pes d'un conjunt de sacs de farina de 100 kg es comet un error aleatori X (en kg) amb funció de densitat:

$$f(x) = K(1-x^2) \text{ si } -1 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas}$$

(A) Calcula el valor de K per al qual f és una funció de densitat de probabilitat.
(B) Calcula la probabilitat que un sac de farina pese més de 99.5 kg.
(C) Calcula l'esperança i la variància de X.

5.5 La distribució normal

És, amb diferència, la distribució de probabilitat més utilitzada en Estadística, per les seues moltes propietats matemàtiques i estadístiques, com veurem a continuació.

➢ La família de distribucions normals

Es tracta d'una àmplia col·lecció de funcions de densitat les gràfiques de les quals tenen forma acampanada i són simètriques respecte del seu valor mitjà:

Diem que una variable contínua X segueix una distribució ***normal amb mitjana*** μ i ***variància*** σ^2, que representem per $\mathbf{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$, si la seua funció de densitat és:

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}, \quad \text{per a tot } \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Es pot demostrar que els paràmetres μ i σ^2 són precisament la seua mitjana i la seua variància:

$$\text{Si} \quad \mathbf{X \sim N(\mu, \sigma^2)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E(X) = \mu} \ \text{ i } \ \mathbf{Var(X) = \sigma^2}$$

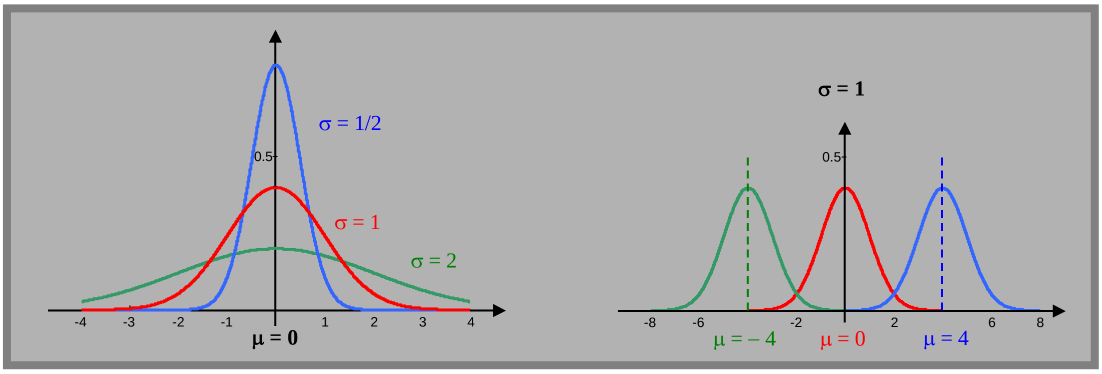
➢ Representació gràfica de les funcions de densitat $N(\mu, \sigma^2)$

Per a cada valor dels paràmetres μ i σ^2 tenim una funció de densitat distinta. Les següents propietats de les gràfiques es poden comprovar per mitjà de les tècniques de la representació gràfica:

- Totes les gràfiques tenen forma acampanada i són **simètriques respecte de l'eix x =** μ, assolint el seu **valor màxim en x =** μ.
- La recta r: **y = 0** és ***asímptota horitzontal*** bilateral de totes les gràfiques.

Exemple 9

- La primera figura conté les gràfiques de tres funcions de densitat normals amb la mateixa mitjana $\mu = 0$ i diferents valors de la desviació típica σ. Un major valor de σ significa que la gràfica és més aplanada (major dispersió).
- La segona figura conté les gràfiques de tres funcions de densitat normals, amb la mateixa desviació típica $\sigma = 1$ i diferents valors per a la mitjana μ. Els diferents valors de μ produeixen únicament una translació de la gràfica al llarg de l'eix OX.



➢ La variable normal estàndard

La variable **Z** de distribució normal, amb **mitjana** μ **= 0** i **variància** σ^2 **= 1**, es denomina variable ***normal estàndard*** o ***tipificada***. És representada per $\mathbf{Z \sim N(0, 1)}$ sent la seua funció de densitat:

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}}, \text{ per a tot } \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

La gràfica de la funció de densitat normal estàndard és la de color roig de l'exemple anterior. S'anomena així perquè com veurem, les altres funcions de densitat normals es poden referir a ella.

Vegem a continuació algunes situacions que poden ser modelades amb la família de variables normals.

Exemple 10

- Moltes variables contínues utilitzades en experiments estadístics com les associades a pesos, longituds, mesures d'errors, etc., tenen distribucions de freqüències les gràfiques de les quals són molt semblants a les de les distribucions normals, amb la qual cosa aquestes poden ser utilitzades com a model de probabilitats per a aquelles variables.

  Per exemple, si pesàrem (en grams) una mostra de 10 000 xiquets de bolquers i agrupàrem els resultats obtinguts en intervals de 100 grams de longitud, l'histograma de freqüències dels intervals adoptaria un aspecte acampanat i aproximadament simètric respecte del valor mitjà, com el que veiem en la figura primera.

- Hi ha moltes distribucions de probabilitat de variables que no són normals, ni tan sols contínues, i que tenen, en certes condicions, un gran semblant amb les normals. Això permet calcular probabilitats amb aquestes variables de forma aproximada amb la distribució normal.

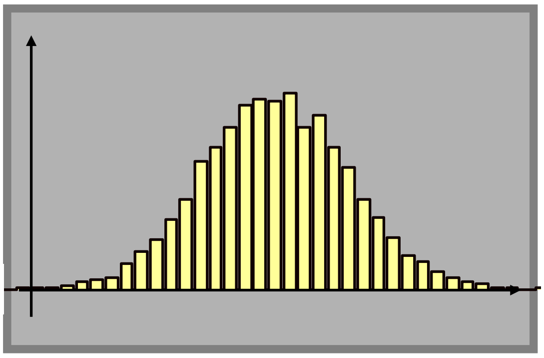
  Per exemple, si considerem la funció de quantia de la variable aleatòria:

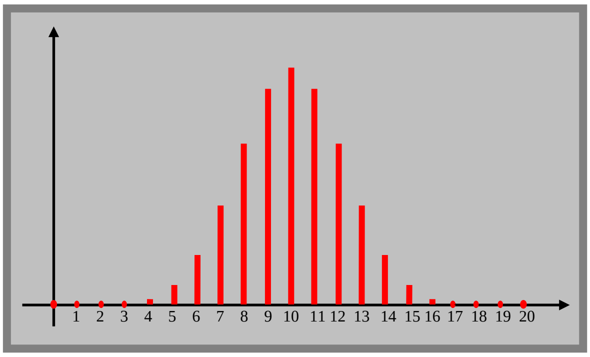
  X: “nombre de cares obtingut al llançar 20 vegades una moneda”

  és una variable **binomial**, amb n = 20 experiències i probabilitat d'èxit p = 0.5:

$$P(X = x) = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x} = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}, \text{ per a } x = 0, 1, 2, ..., 20$$

  La gràfica de la seua funció de quantia la tenim en la segona figura, i també té forma acampanada.





14 Cada alumne de classe, amb la calculadora, elegeix 20 nombres a l'atzar entre 0 i 1, i calcula la seua mitjana. Es repeteix aquest procés 5 vegades. A continuació s'agrupen els resultats de tots els alumnes en una taula de freqüències amb 10 intervals. Comprova que l'histograma presenta una forma acampanada.

5.6 Probabilitats de la variable normal estàndard

Com que la variable normal estàndard és contínua, la probabilitat que la variable prenga un valor de l'interval [a, b] és igual a l'àrea del recinte limitat per la seua funció de densitat f(x) i l'eix d'abscisses, entre els valors x = a i x = b, i s'obté amb el Càlcul integral:

$$\mathbf{P(a \le Z \le b) = \text{àrea}(f, [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx}$$

sent $\mathbf{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-x^2/2}$, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

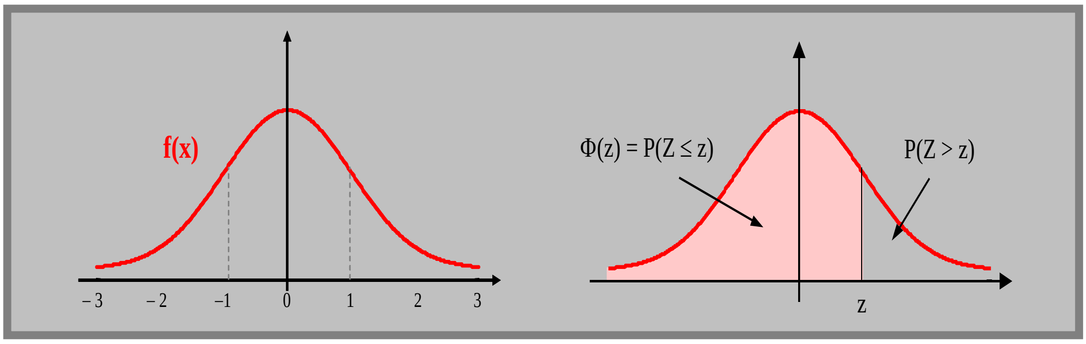
Disposem de taules que proporcionen àrees de la funció de densitat normal estàndard en intervals de la forma]–∞, x], per la qual cosa és possible calcular probabilitats de qualsevol tipus d'intervals sense utilitzar la integració. La ***funció de distribució*** ens proporciona aquests valors.

➢ La funció de distribució de la variable normal estàndard

Considerem $Z \sim N(0, 1)$, amb la seua funció de densitat f definida anteriorment.

La ***funció de distribució*** de la variable Z es la funció $\mathbf{\Phi}$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que per a cada valor $z \in \mathbb{R}$, proporciona la probabilitat que la variable normal estàndard Z prenga valors de l'interval]–∞, z]:

$$\mathbf{\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx}$$



Aquests valors, **des de z = 0 fins a z = 4**, vénen donats de forma aproximada en la taula del final del tema.

Per exemple, en la primera fila de la taula tenim que:

$\Phi(0) = P(Z \le 0) = 0.5000$ $\quad\Phi(0.01) = P(Z \le 0.01) = 0.5040$ $\quad\Phi(0.09) = 0.5359$

En una altra de les files trobem les probabilitats:

$\Phi(1.64) = P(Z \le 1.64) = 0.9495$ $\quad\Phi(1.65) = P(Z \le 1.65) = 0.9505$

En l'última fila tenim probabilitats molt pròximes a un:

$\Phi(4.0) = 0.999\,968\,33$ $\quad\Phi(4.9) = 0.999\,978\,43$

En general es considera que

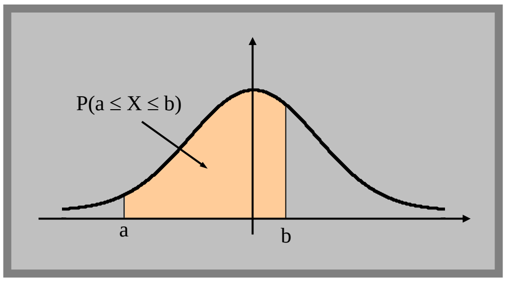
$$\mathbf{\Phi(z) = P(Z \le z) \simeq 1, \ \ si \ \ z \ge 4}$$

Els valors de Φ(z), des de z = –4 fins a z = 0 es calculen amb ajuda de la propietat P3 de la pàgina següent.
També es considera que:

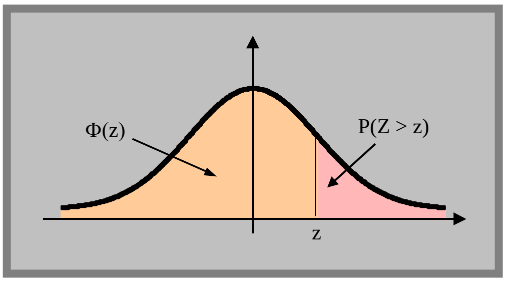
$$\mathbf{\Phi(z) = P(Z \le z) \simeq 0, \ \ si \ \ z \le -4}$$

➢ Propietats de la funció de distribució $\Phi(z)$

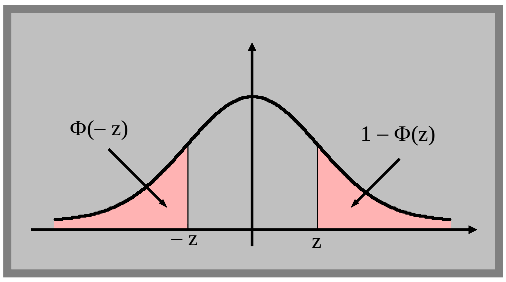
(P1) $\mathbf{P(a \le Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)}$



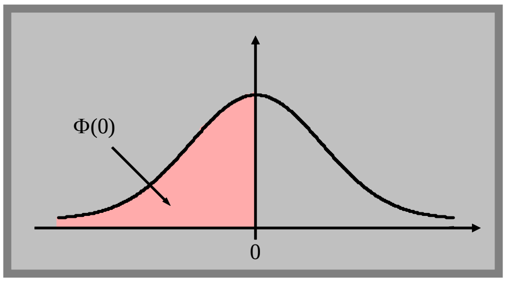
(P2) $\mathbf{P(Z > z) = 1 - \Phi(z), \ \forall z \in \mathbb{R}}$



(P3) $\mathbf{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \ si \ z > 0}$



(P4) $\mathbf{\Phi(0) = 1/2}$



Exemple 11

Amb ajuda de la taula de la funció de distribució de la variable normal estàndard i de les propietats anteriors, calculem les següents probabilitats per a una variable $Z \sim N(0, 1)$:

(A) Segons la propietat P1:

$$\mathbf{P(1.5 \le Z \le 3) = \Phi(3) - \Phi(1.5)} = 0.99865 - 0.93319 = 0.06546$$

(B) Segons la propietat P2:

$$\mathbf{P(Z > 1.56) = 1 - P(Z \le 1.56) = 1 - \Phi(1.56)} = 1 - 0.94062 = 0.05938$$

(C) Per la propietat P3:

$$\mathbf{P(Z < -0.5)} = \mathbf{\Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5)} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

(D) Per les propietats P1 i P3:

$$\mathbf{P(|\,Z\,| \le 2) = P(-2 \le Z \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)} = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] =$$

$$= 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545$$

15 Suposem que els errors comesos en el mesurament del pes (en grams) d'un producte segueixen una distribució normal estàndard, és a dir, amb mitjana 0 i variància 1. Calculem:

(A) La probabilitat que l'error siga menor que 3.25 grams.
(B) La probabilitat que l'error siga menor que –1.75 grams.
(C) La probabilitat que l'error siga major que 2 grams.
(D) La probabilitat que l'error estiga comprés entre –2.15 i 2.15 grams.

5.7 Probabilitats de la variable normal general

Les probabilitats d'una variable N(μ, σ^2) es calculen amb les taules de la variable normal estàndard per mitjà d'un procés de ***canvi de variable*** o transformació de la variable N(μ, σ^2) en la variable N(0, 1), que anomenem ***tipificació d'una variable normal***.

➢ La funció de distribució de la variable normal general

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la ***funció de distribució*** de X es la funció **F**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que per a cada valor $x \in \mathbb{R}$ proporciona la probabilitat que la variable X prenga valors de l'interval $]-\infty, x]$:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}$$

En el cas particular que $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ obtenim la funció de distribució Φ de la variable normal estàndard. Per això les propietats de la variable N(0, 1) són un cas particular de les següents:

➢ Propietats de la funció de distribució F(x)

Si $\mathbf{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ i $\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$ és la seua funció de distribució, aleshores:

(P1) $\mathbf{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$

(P2) $\mathbf{P(X > x) = 1 - F(x)}$

(P3) $\mathbf{F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)}$, $\forall \mathbf{x > 0}$

(P4) $\mathbf{F(\mu) = P(X \leq \mu) = 1/2}$

(P5) **Tipificació d'una variable normal:**

$$\mathbf{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}, \text{ per a tot } \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Exemple 12

La propietat P5 permet calcular probabilitats per a qualsevol variable N(μ, σ^2) utilitzant les taules de la variable normal estàndard. Així:

L'àrea del primer recinte acolorit correspon a:

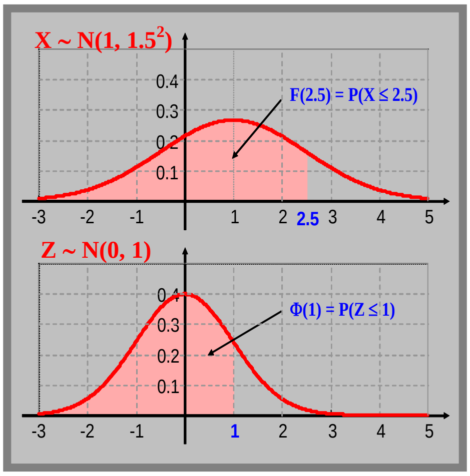
$$F(2.5) = P(X \leq 2.5) \text{ sent } X \sim N(1, 1.5^2)$$

L'àrea del segon recinte acolorit correspon a:

$$\Phi(1) = P(Z \leq 1) \text{ sent } Z \sim N(0, 1)$$

Per la propietat P5, aquestes àrees són iguals perquè, per a $\mu = 1$ i $\sigma = 1.5$, es calculen:

$$\mathbf{F(2.5) = \Phi\left(\frac{2.5-1}{1.5}\right) = \Phi(1)}$$



Exemple 13

Suposem que la puntuació dels enquestats en un test psicològic es pot modelitzar amb una variable aleatòria normal, amb mitjana $\mu = 85$ i desviació típica $\sigma = 15$.

(A) Quina proporció d'enquestats obté més de 100 punts en el test?

(B) Si per a un tipus de treball es decideix rebutjar als que obtenen menys de 60 o més de 130 punts, quina proporció d'enquestats es rebutja?

Anomenem **X: "puntuació d'una persona en el test"** $\rightarrow$ $\mathbf{X \sim N(85, 225)}$

(A) Calculem la probabilitat P(X > 100) tipificant la variable normal:

$$P(X > 100) = 1 - P(X \le 100) = 1 - F(100) = 1 - \Phi\left(\frac{100-85}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Al voltant del 16% dels enquestats obtenen més de 100 punts en el test.

(B) Calculem les probabilitats:

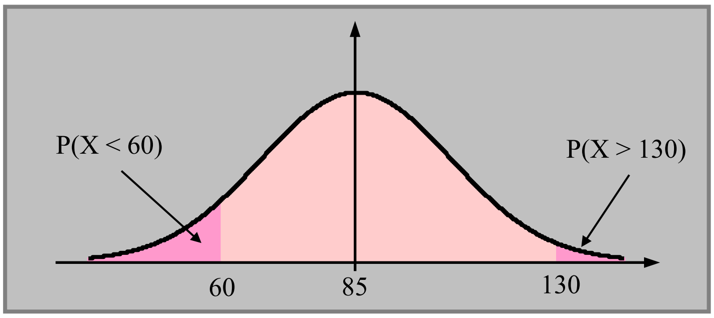
$$P(X < 60) = F(60) = \Phi\left(\frac{60-85}{15}\right) = \Phi(-1.66) = 1 - \Phi(1.66) = 1 - 0.95154 = 0.04846$$

$$P(X > 130) = 1 - F(130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-85}{15}\right) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135$$

La probabilitat de rebutjar un individu és la suma de les dues probabilitats calculades:

$$P(\{X < 60\} \cup \{X > 130\}) = P(X < 60) + P(X > 130) = 0.04846 + 0{,}00135 = 0.04981$$

Al voltant del 5% d'individus són rebutjats.



16 Suposem que l'altura dels individus en edat militar d'un determinat país segueix una distribució normal amb mitjana $\mu = 170$ cm i desviació típica $\sigma = 10$ cm.

(A) Quina proporció d'individus en edat militar mesuren menys de 180 cm?

(B) I quina proporció mesura més de 200 cm?

(C) Quina proporció d'individus mesura menys de 150 cm o més de 210 cm?

(D) I quina proporció mesura més de 175 cm però menys de 190 cm?

(E) Si elegim dues persones a l'atzar, quina és la probabilitat que les dues mesuren menys de 180 cm?

17 En l'exemple 13 hem calculat que la probabilitat que un individu siga rebutjat en el test és de 0.04981. Açò pot ser degut a que la seua puntuació és baixa (menys de 60 punts), o alta (més de 130).

(A) Calcula la probabilitat que un individu rebutjat ho haja sigut per tenir una puntuació baixa.

(B) Calcula la probabilitat que un individu rebutjat ho haja sigut per tenir una puntuació alta.
(Tin en compte que les dues probabilitats són condicionades, i han de sumar un.)

18 El diàmetre dels cargols que fabrica una màquina segueix una distribució normal, amb mitjana de 3 mm. i desviació típica de 0.1 mm. Un cargol es considera defectuós si el seu diàmetre difereix almenys 0.2 mm. de la mitjana. Calcula la probabilitat que un cargol siga defectuós.

5.8 Percentils de la distribució normal

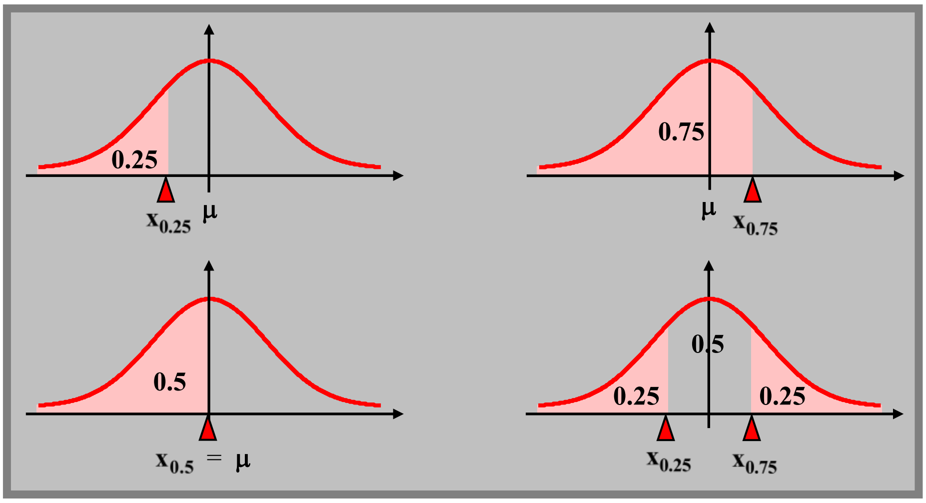
Considerem $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, i $\alpha \in [0, 1]$.

Anomenem ***percentil d'ordre* α *de* X**, representat per $\mathbf{x_\alpha}$, al valor de X per al qual la funció de distribució val α:

$$\mathbf{F(x_\alpha) = P(X \le x_\alpha) = \alpha}$$

- El percentil d'ordre 0.5 s'anomena ***mediana***: $\mathbf{M = x_{0.5}}$.
- El percentil d'ordre 0.75 s'anomena ***quartil superior***: $\mathbf{q_{3/4} = x_{0.75}}$.
- El percentil d'ordre 0.25 s'anomena ***quartil inferior***: $\mathbf{q_{1/4} = x_{0.25}}$.
- La distància entre els quartils s'anomena ***recorregut interquartílic***: $\mathbf{iqr = x_{0.75} - x_{0.25}}$.
- Quan $\mathbf{Z \sim N(0, 1)}$, representem per $\mathbf{z_\alpha}$ al ***percentil d'ordre* α *de* Z**:

$$\mathbf{\Phi(z_\alpha) = P(Z \le z_\alpha) = \alpha}$$



Exemple 14

Anem a demostrar que la mediana, els quartils i el recorregut interquartílic de la variable normal estàndard són:

(A) $\mathbf{z_{0.5} = 0}$ (B) $\mathbf{z_{0.75} = 0.675}$ (C) $\mathbf{z_{0.25} = -0.675}$ (D) **iqr = 1.35**

(A) En les taules veiem que $\Phi(0) = 0.5$, per tant: $\mathbf{z_{0.5} = 0}$.

(B) De la mateixa manera, en les taules busquem el valor z per al qual $\Phi(z) = 0.75$:

$$\Phi(0.67) = 0.7486 < 0.75 \qquad \Phi(0.68) = 0.7517 > 0.75$$

aleshores prenem el punt mitjà entre 0.67 i 0.68 com a valor del quartil superior: $\mathbf{z_{0.75} = 0.675}$.

(C) En les taules no apareixen probabilitats menors que 0.5, però per la simetria de la corba normal:

$$\mathbf{z_{0.25} = -\,z_{0.75} = -0.675}$$

(D) $\text{iqr} = z_{0.75} - z_{0.25} = 0.675 - (-0.675) = 1.35 \quad \to \quad$ **iqr = 1.35**

Exemple 15

Per llarga experiència en la reparació d'electrodomèstics, es considera que el temps de vida (en anys) que un electrodomèstic de certa marca roman sense avariar-se és una variable aleatòria que segueix una distribució aproximadament normal amb mitjana $\mu = 7$ i desviació típica $\sigma = 2$. La garantia d'un electrodomèstic és el temps durant el qual si es desbarata és reparat sense càrrec.

(A) Si el fabricant ofereix pels seus electrodomèstics una garantia de 3 anys, quin tant per cent dels aparells que ven tindrà que reparar-los sense càrrec?

(B) Si el fabricant està disposat a reparar sense càrrec un 5% dels aparells que ven, quin temps ha de figurar en la garantia dels aparells?

Considerem la variable **X: "temps que un aparell funciona sense avaries"** $\rightarrow$ $\mathbf{X \sim N(7, 4)}$

Anomenem **g** a la **duració de la garantia**, aleshores:

si $X \le g$ $\rightarrow$ el fabricant paga la reparació
si $X > g$ $\rightarrow$ el fabricant ja no la paga

(A) Si g = 3 aleshores volem la següent probabilitat:

$$P(X \le 3) = F(3) = \Phi\left(\frac{3-7}{2}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

Al voltant del 2.3% dels aparells són reparats pel fabricant, sense càrrec.

(B) Volem el valor de g per al qual:

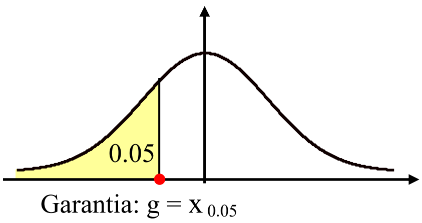
$$\left.\begin{array}{l} P(X \le g) = 0.05 \quad \rightarrow \quad F(g) = 0.05 \\ \text{Com que } X \sim N(7,4) \quad \rightarrow \quad F(g) = \Phi\left(\dfrac{g-7}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \quad \Phi\left(\frac{g-7}{2}\right) = 0.05 \quad \rightarrow \quad \frac{g-7}{2} = z_{0.05}$$

El valor del percentil d'ordre 0.05 no apareix en les taules, perquè la menor probabilitat que apareix és 0.5, no obstant, per la simetria de la funció de densitat normal estàndard:

$$z_{0.05} = -\, z_{0.95} = -1.645$$

Aleshores: $\dfrac{g-7}{2} = -1.645 \quad \rightarrow \quad g = 7 - 2 \cdot 1.645 \quad \rightarrow \quad \mathbf{g = 3.71}$

Amb una garantia de 3.71 anys serien reparats sense càrrec un 5% dels electrodomèstics venuts.



19 Troba els valors de x que verifiquen les següents expressions:

(A) $\Phi(x) = 0.99$ (B) $\Phi(x) = 0.95$ (C) $\Phi(x) = 0.90$ (D) $\Phi(x) = 0.05$

(E) $F(x) = 0.99$, si $X \sim N(5, 4)$ (F) $F(x) = 0.01$, si $X \sim N(5, 4)$

(G) $F(x) = 0.99$, si $X \sim N(5, 10)$ (H) $F(x) = 0.01$, si $X \sim N(5, 10)$

20 L'alçada dels xics en categoria juvenil d'un país segueix una distribució normal, amb mitjana de 175 cm i desviació típica de 10 cm. Per a una operació alçada es convoca a tots aquells xics que superen la talla mitjana almenys en 20 cm.

(A) Quina proporció de xics és convocada?

(B) Quin límit inferior hauríem de posar a l'alçada si volem convocar només a un 0.1% de la població?

5.9 Aproximació normal de la variable binomial

Un dels motius pels quals la variable normal és tan important es deu al fet que és la "*distribució límit*" de moltes distribucions de probabilitat no normals. Aquest concepte no és fàcil d'explicar en aquest moment, però podem entendre que moltes variables contínues tenen, en certes condicions, funcions de densitat semblants a les de la família de variables normals i, per això, les seues probabilitats s'obtenen fàcilment amb la taula de probabilitats de la variable normal estàndard.

Però aquest fet també ocorre amb variables discretes i, concretament, amb la variable binomial, que és la més utilitzada, amb les precaucions que cal tenir al comparar una variable discreta amb una variable contínua.

En aquest apartat ens limitem a enunciar les condicions en què efectuem el càlcul de probabilitats de variables binomials de forma aproximada amb la variable normal.

➢ Teorema de Moivre

Si $X \sim B(n, p)$ i $n \geq 30$, la variable X és aproximadament normal, amb mitjana i variància:

$$\boldsymbol{\mu = n \cdot p} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q}$$

Exemple 16

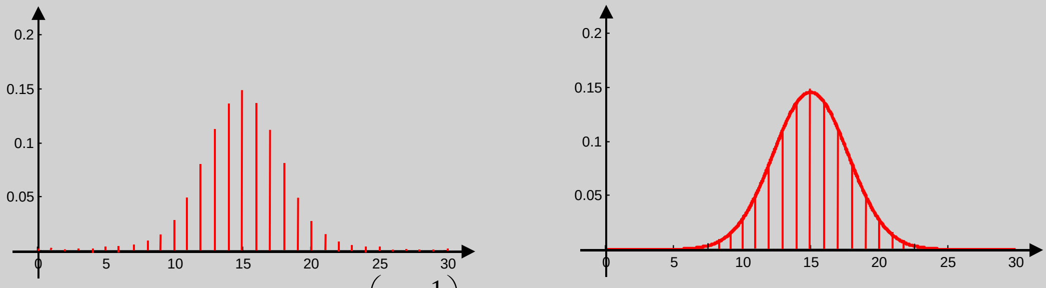
Considerem la funció de quantia de la següent variable binomial:

$$X \sim B\left(30, \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad P(X = x) = \binom{30}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}, \text{ per a } x = 0, 1, 2, ..., 30$$

i la funció de densitat de la variable normal que, segons el teorema de Moivre, proporciona una bona aproximació per al càlcul de probabilitats:

$$\mu = np = 15, \ \sigma^2 = npq = 7.5 \quad \rightarrow \quad Y \sim N(15, 7.5) \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{7.5 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-15}{7.5}\right)^2}, \text{ per a } x \in \mathbb{R}$$

La representació gràfica de les anteriors funcions permet veure com la gràfica de la funció de densitat normal se superposa sobre la gràfica de la funció de quantia binomial.



Funció de quantia binomial $B\left(30, \frac{1}{2}\right)$ — Funció de densitat normal N(15, 7.5)

Però la variable binomial és discreta, mentre que la normal és contínua; per a calcular una probabilitat del tipus $P(X = x)$ (que en distribució normal és zero, però no així en binomial) recorrem a la funció de distribució normal, aproximant $P(X = x)$ per l'àrea davall la corba normal que correspon a l'interval $[x - 1/2, x + 1/2]$.

El valor 1/2 rep el nom de ***correcció per continuïtat***.

➢ Càlcul aproximat de probabilitats

Considerem $X \sim B(n, p)$ amb $n \geq 30$, i la variable $Y \sim N(np, npq)$, aleshores:

(A1) $P(X = x) \simeq P(x - 1/2 \leq Y \leq x + 1/2) = F(x + 1/2) - F(x - 1/2)$, per a $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

(A2) $P(a \leq X \leq b) \simeq P(a - 1/2 \leq Y \leq b + 1/2) = F(b + 1/2) - F(a - 1/2)$, si $a, b \in \{0, 1, \ldots, n\}$

El valor **1/2** que es suma i resta rep el nom de ***correcció de continuïtat.***

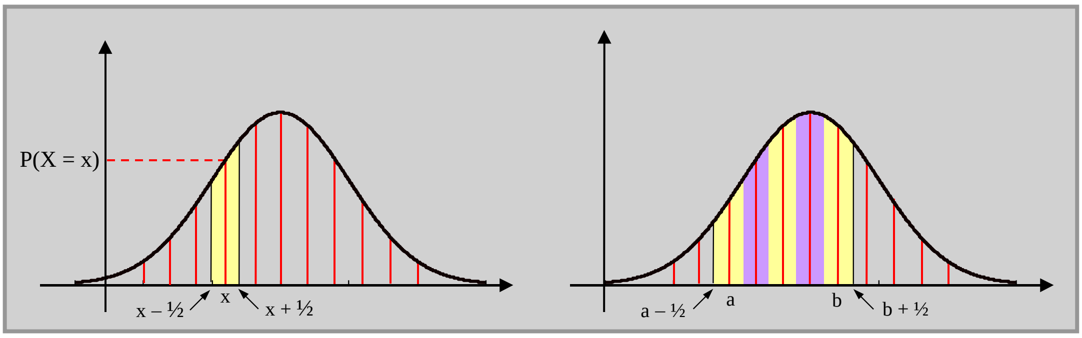
Si $X \sim B(n, p)$ aleshores el seu rang és $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Per a qualsevol valor $x \in R_X$, el valor de la probabilitat $P(X = x)$ s'aproxima per mitjà de l'àrea davall la corba normal, amb mitjana $\mu = np$, i variància $\sigma^2 = npq$, que li correspon a l'interval $[x - 1/2, x + 1/2]$, que té per centre al valor x i una unitat de longitud.

El recinte acolorit en groc de la figura següent correspon a aquesta àrea, que és la probabilitat

$$P(x - 1/2 \leq Y \leq x + 1/2) = F(x + 1/2) - F(x - 1/2)$$

sent $Y \sim N(np, npq)$ i F la seua funció de distribució.



De la mateixa manera, com que la probabilitat $P(a \leq X \leq b)$ és la suma de tots les probabilitats de la forma $P(X = x)$ amb $a \leq x \leq b$, aproximem $P(a \leq X \leq b)$ per la suma de totes les àrees ratllades en la figura de la dreta, el resultat de la qual és:

$$P(a - 1/2 \leq Y \leq b + 1/2) = F(b + 1/2) - F(a - 1/2)$$

Exemple 17

Considerem la variable $X \sim B(50, 0.4)$, de mitjana $E(X) = np = 20$ i variància $Var(X) = npq = 12$.

Pel teorema de Moivre, la variable $Y \sim N(20, 12)$ s'utilitza per a calcular $P(22 \leq X \leq 24)$ de forma aproximada. Vegem una altra forma d'explicar la fórmula A2:

$$P(22 \leq X \leq 24) = P(X = 22) + P(X = 23) + P(X = 24) \simeq \text{(segons la fórmula A1)}$$

$$\simeq P(22 - 1/2 \leq Y \leq 22 + 1/2) + P(23 - 1/2 \leq Y \leq 23 + 1/2) + P(24 - 1/2 \leq Y \leq 24 + 1/2) =$$

$$= P(21.5 \leq Y \leq 22.5) + P(22.5 \leq Y \leq 23.5) + P(23.5 \leq Y \leq 24.5) = P(21.5 \leq Y \leq 24.5)$$

Per tant $P(22 \leq X \leq 24) = P(21.5 \leq Y \leq 24.5)$.

Com que $Y \sim N(20, 12)$:

$$P(21.5 \leq Y \leq 24.5) = F(24.5) - F(21.5) = \Phi\left(\frac{24.5 - 20}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{21.5 - 20}{\sqrt{12}}\right) =$$

$$= \Phi(1.23) - \Phi(0.43) = 0.8907 - 0.6664 = 0.2243$$

Obtenim $P(22 \leq X \leq 24) \simeq 0.2243$.

Exemple 18

Un sac que conté 500 monedes es buida sobre una taula. Calculem les següents probabilitats:

(A) D'obtenir 275 cares. (B) D'obtenir menys de 225 cares.

(C) D'obtenir més de 260 cares. (D) D'obtenir entre 240 i 260 cares.

Siga X: "nombre de cares al llançar 500 monedes", $X \sim B\left(500, \frac{1}{2}\right)$.

(A) El valor exacte de la probabilitat d'obtenir 275 cares s'obté:

$$P(X = 275) = \binom{500}{275} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{275} \left(\frac{1}{2}\right)^{500-275} = \binom{500}{275} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$$

Però el valor $\binom{500}{275}$ excedeix la capacitat de la calculadora científica.

Calculem l'anterior probabilitat de forma aproximada, amb el teorema de Moivre, utilitzant la variable:

$$Y \sim N(250, 125) \qquad \text{on } 250 = E(X) = np \text{ i } 125 = Var(X) = npq$$

$$P(X = 275) \simeq P(275 - 1/2 \le Y \le 275 + 1/2) = P(274.5 \le Y \le 275.5) = F(275.5) - F(274.5) =$$

$$= \Phi\left(\frac{275.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{274.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) = \Phi(2.28) - \Phi(2.19) = 0.9887 - 0.9857 = 0.003$$

(B) Obtenir menys de 225 cares vol dir que n'obtenim entre 0 i 224:

$$P(X < 225) = P(0 \le X \le 224) = P(0 - 1/2 \le Y \le 224 + 1/2) = P(-0.5 \le Y \le 224.5) =$$

$$= \Phi\left(\frac{224.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) = \Phi(-2.28) - \Phi(-22.4) = 1 - \Phi(2.28) - 0 = 0.0113$$

(C) $P(X > 260) = P(261 \le X \le 500) = P(261 - 1/2 \le Y \le 500 + 1/2) = P(260.5 \le Y \le 500.5) =$

$$= F(500.5) - F(260.5) = \Phi\left(\frac{500.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{260.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) =$$

$$= \Phi(22.4) - \Phi(0.94) = 1 - 0.8264 = 0.1736$$

(D) $P(240 \le X \le 260) = P(240 - 1/2 \le Y \le 260 + 1/2) = P(239.5 \le Y \le 260.5) =$

$$= F(260.5) - F(239.5) = \Phi\left(\frac{260.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{239.5 - 250}{\sqrt{125}}\right) =$$

$$= \Phi(0.94) - \Phi(-0.94) = 2 \cdot \Phi(0.94) - 1 = 0.6528$$

21 Un dau és llançat 120 vegades. Amb l'aproximació normal, calcula la probabilitat de:

(A) Obtenir 20 vegades el nombre 5.

(B) Obtenir almenys 25 vegades el nombre 5.

(C) Obtenir almenys 45 vegades nombres múltiples de 3.

(D) Obtenir almenys 65 vegades nombres parells.

22 En un col·legi hi ha 800 alumnes. Suposem que la probabilitat que en un dia determinat un alumne necessite una aspirina és 0.01. En la farmàcia hi ha 10 aspirines.

(A) Quina és la probabilitat aproximada que en un dia s'esgoten les aspirines?

(B) Quantes aspirines haurien d'haver en el col·legi per a tenir una probabilitat de 0.99 que en un dia determinat no s'acaben?

5.10 Aproximació normal de la variable hipergeomètrica

Si $X \sim H(N, M, n)$ amb $n \geq 30$ i $N \geq 10n$, la variable X és aproximadament normal, amb mitjana i variància:

$$\boldsymbol{\mu = n \cdot p} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N - n}{N - 1}}, \qquad \text{per a } p = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}},\ q = 1 - p$$

Els valors de μ i σ^2 són l'esperança i la variància de la variable hipergeomètrica.

El càlcul aproximat de probabilitats es fa de la mateixa forma que en la variable binomial, perquè ambdues són discretes i el seu rang conté només nombres enters: considerem el factor **1/2** de ***correcció de continuïtat***.

Exemple 19

En una població de 5000 persones hi ha 1000 que són socis d'un determinat club esportiu. Si elegim a l'atzar 200 persones de la població, calculem la probabilitat que hi haja entre 30 i 50 socis del club.

Siga X: "nombre de socis entre les 200 persones elegides".

$$\left.\begin{array}{l} \text{Grandària de la població: } N = 5000 \\ \text{Nombre d'èxits (socis): } M = 1000 \\ \text{Grandària de la mostra: } n = 200 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{X \sim H(5000, 1000, 200)}$$

Com que $n = 200 \geq 30$ i $N = 5000 \geq 10n$, utilitzem l'aproximació normal amb mitjana i variància:

$$\mu = E(X) = 200 \cdot \frac{1000}{5000} = 40 \qquad \sigma^2 = 200 \cdot \frac{1000}{5000} \cdot \frac{4000}{5000} \cdot \frac{5000 - 200}{5000 - 1} = 30.73$$

L'aproximació normal és $\mathbf{Y \sim N(40, 30.73)}$, d'on

$$P(30 \leq X \leq 50) = P(30 - 1/2 \leq Y \leq 50 + 1/2) = P(29.5 \leq Y \leq 50.5) =$$

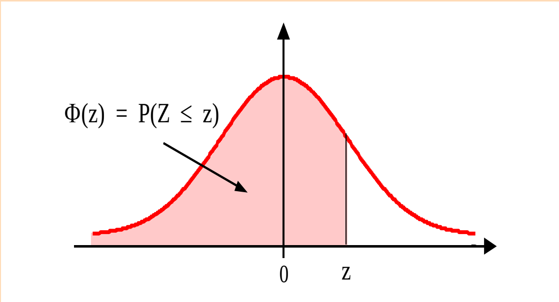
$$= F(50.5) - F(29.5) = \Phi\left(\frac{50.5 - 40}{\sqrt{30.73}}\right) - \Phi\left(\frac{29.5 - 40}{\sqrt{30.73}}\right) =$$

$$= \Phi(1.89) - \Phi(-1.89) = 2 \cdot \Phi(1.89) - 1 = 0.94124$$

23 Una màquina fabrica peces una a una de forma independent. La probabilitat que una peça siga defectuosa és 0.02. Cada dia s'inspeccionen 100 peces de la producció del dia anterior i, si n'hi ha 3 o més defectuoses, es para la producció.
- (A) Calcula la probabilitat de parar la producció.
- (B) I si la producció es para quan hi ha 4 o més peces defectuoses?
- (C) Si la producció es para quan hi ha n o més peces defectuoses, obtén aquest valor per al qual la probabilitat de parar la producció siga de 0.01.

24 Suposem que la màquina de l'activitat anterior s'ha desbaratat i, entre les 1000 peces produïdes durant un dia, hi ha hagut un total de 150 defectuoses. En aquest cas, la inspecció es realitza elegint 100 peces d'entre les 1000 i comptant el nombre de peces defectuoses.
Calcula la probabilitat de no parar la producció perquè trobem menys de 3 peces defectuoses en la inspecció.

Funció de distribució de la variable normal estàndard



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	$0.9^{2}0097$	$0.9^{2}0358$	$0.9^{2}0613$	$0.9^{2}0863$	$0.9^{2}1106$	$0.9^{2}1344$	$0.9^{2}1576$
2.4	$0.9^{2}1802$	$0.9^{2}2024$	$0.9^{2}2240$	$0.9^{2}2451$	$0.9^{2}2656$	$0.9^{2}2857$	$0.9^{2}3053$	$0.9^{2}3244$	$0.9^{2}3431$	$0.9^{2}3613$
2.5	$0.9^{2}3790$	$0.9^{2}3963$	$0.9^{2}4132$	$0.9^{2}4297$	$0.9^{2}4457$	$0.9^{2}4614$	$0.9^{2}4766$	$0.9^{2}4915$	$0.9^{2}5060$	$0.9^{2}5201$
2.6	$0.9^{2}5339$	$0.9^{2}5473$	$0.9^{2}5604$	$0.9^{2}5731$	$0.9^{2}5855$	$0.9^{2}5975$	$0.9^{2}6093$	$0.9^{2}6207$	$0.9^{2}6319$	$0.9^{2}6427$
2.7	$0.9^{2}6533$	$0.9^{2}6636$	$0.9^{2}6736$	$0.9^{2}6833$	$0.9^{2}6928$	$0.9^{2}7020$	$0.9^{2}7110$	$0.9^{2}7197$	$0.9^{2}7282$	$0.9^{2}7365$
2.8	$0.9^{2}7445$	$0.9^{2}7523$	$0.9^{2}7599$	$0.9^{2}7673$	$0.9^{2}7744$	$0.9^{2}7814$	$0.9^{2}7882$	$0.9^{2}7948$	$0.9^{2}8012$	$0.9^{2}8074$
2.9	$0.9^{2}8134$	$0.9^{2}8193$	$0.9^{2}8250$	$0.9^{2}8305$	$0.9^{2}8359$	$0.9^{2}8411$	$0.9^{2}8462$	$0.9^{2}8511$	$0.9^{2}8559$	$0.9^{2}8605$
3.0	$0.9^{2}8650$	$0.9^{2}8694$	$0.9^{2}8736$	$0.9^{2}8777$	$0.9^{2}817$	$0.9^{2}8856$	$0.9^{2}8893$	$0.9^{2}8930$	$0.9^{2}8965$	$0.9^{2}8999$
3.1	$0.9^{3}0324$	$0.9^{3}0646$	$0.9^{3}0957$	$0.9^{3}1260$	$0.9^{3}1553$	$0.9^{3}1836$	$0.9^{3}2112$	$0.9^{3}2378$	$0.9^{3}2636$	$0.9^{3}2886$
3.2	$0.9^{3}3123$	$0.9^{3}3363$	$0.9^{3}3590$	$0.9^{3}3810$	$0.9^{3}4024$	$0.9^{3}4230$	$0.9^{3}4429$	$0.9^{3}4623$	$0.9^{3}4810$	$0.9^{3}4991$
3.3	$0.9^{3}5166$	$0.9^{3}5335$	$0.9^{3}5499$	$0.9^{3}5658$	$0.9^{3}5811$	$0.9^{3}5959$	$0.9^{3}6103$	$0.9^{3}6242$	$0.9^{3}6376$	$0.9^{3}6505$
3.4	$0.9^{3}6631$	$0.9^{3}6752$	$0.9^{3}6869$	$0.9^{3}6982$	$0.9^{3}7091$	$0.9^{3}7197$	$0.9^{3}7299$	$0.9^{3}7398$	$0.9^{3}7493$	$0.9^{3}7585$
3.5	$0.9^{3}7674$	$0.9^{3}7759$	$0.9^{3}7842$	$0.9^{3}7922$	$0.9^{3}7999$	$0.9^{3}8074$	$0.9^{3}8146$	$0.9^{3}8215$	$0.9^{3}8282$	$0.9^{3}8347$
3.6	$0.9^{3}8409$	$0.9^{3}8469$	$0.9^{3}8527$	$0.9^{3}8583$	$0.9^{3}8637$	$0.9^{3}8689$	$0.9^{3}8739$	$0.9^{3}8787$	$0.9^{3}8834$	$0.9^{3}8879$
3.7	$0.9^{3}8922$	$0.9^{3}8964$	$0.9^{4}0039$	$0.9^{4}0426$	$0.9^{4}0799$	$0.9^{4}1158$	$0.9^{4}1504$	$0.9^{4}1838$	$0.9^{4}2159$	$0.9^{4}2468$
3.8	$0.9^{4}2765$	$0.9^{4}3052$	$0.9^{4}3327$	$0.9^{4}3593$	$0.9^{4}3848$	$0.9^{4}4094$	$0.9^{4}4331$	$0.9^{4}4558$	$0.9^{4}4777$	$0.9^{4}4988$
3.9	$0.9^{4}5190$	$0.9^{4}5385$	$0.9^{4}5573$	$0.9^{4}5753$	$0.9^{4}5926$	$0.9^{4}6092$	$0.9^{4}6253$	$0.9^{4}6406$	$0.9^{4}6554$	$0.9^{4}6696$
4.0	$0.9^{4}6833$	$0.9^{4}6964$	$0.9^{4}7090$	$0.9^{4}7211$	$0.9^{4}7327$	$0.9^{4}7439$	$0.9^{4}7545$	$0.9^{4}7649$	$0.9^{4}7748$	$0.9^{4}7843$

Problemes del capítol 5

1. Calcula el valor de K perquè la següent funció f siga de densitat de probabilitat, i calcula les probabilitats $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$ i $P(1.5 < X < 2.5)$:

$$f(x) = kx \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

2. Si sabem que X és una variable aleatòria amb distribució uniforme en l'interval [a, b]:
(A) Obtén la seua funció de densitat de probabilitat.
(B) Obtén la seua funció de distribució de probabilitat.
(C) Calcula la probabilitat $P(c < X < d)$, si $a < c < d < b$.
(D) Calcula E(X) i Var(X).

3. Calcula el valor de K perquè la següent funció siga de densitat de probabilitat:

$$f(x) = Kx^3 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

(A) Calcula l'esperança i la variància.
(B) Obtén la funció de distribució.
(C) Calcula les probabilitats $P(X < 0.5)$, $P(X > 0.1)$ i $P(0.1 \leq X \leq 0.9)$.

4. Calcula el valor de K perquè la següent funció f siga de densitat de probabilitat:

$$f(x) = kx \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

(A) Calcula l'esperança i la variància.
(B) Obtén la funció de distribució, i les probabilitats $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$ i $P(1.5 < X < 2.5)$.

5. Troba el valor de K perquè la següent funció f siga de densitat d'una variable aleatòria. Calcula $P(0 \leq X \leq 4)$ i el valor de x si $P(x - 1 \leq X \leq x) = 0.1$.

$$f(x) = \frac{x}{8} + k, \text{ si } -1 \leq x \leq 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0, \text{ en altre cas.}$$

6. Comprova que la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{16} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ és una funció de densitat d'una variable aleatòria contínua.

Calcula: (A) $P(0 \leq X \leq 1)$. (B) $P(X \leq 3)$. (C) $P(X \geq 2)$.

7. Donada la variable aleatòria amb funció de densitat $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$:

(A) Obtén la funció de distribució.
(B) Calcula les probabilitats $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ i $P(1 \leq X \leq 2)$.
(C) Calcula l'esperança de X.

8. Donada la funció $f(x) = ke^{-|x|}$ per a tot $x \in \mathbb{R}$:
(A) Obtén el valor de K perquè f siga una funció de densitat de probabilitat.
(B) Obtén la funció de distribució.
(C) Calcula les probabilitats $P(X \leq -1)$, $P(X \geq 1)$ i $P(-1 \leq X \leq 1)$.

9. Donada la variable aleatòria amb funció de densitat $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$:

(A) Obtén la funció de distribució.
(B) Calcula les probabilitats $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 3)$ i $P(2 \leq X \leq 3)$.

10. El temps de permanència dels cotxes en un garatge oscil·la entre 20 i 100 minuts. Es paguen 20 cèntims per cada 30 minuts o fracció, és a dir, cada part menor de 30 minuts es paga com si foren 30 minuts. Obtén el preu mitjà que paga cada vehicle.

11. Obtén la funció de densitat de probabilitat i calcula les probabilitats $P(X \le 2)$, $P(0.5 \le X \le 1.5)$, $P(X > 1)$ per a una variable aleatòria contínua amb funció de distribució:

(A) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

12. La duració (en minuts) de les telefonades per a rebre un determinat servei és una variable aleatòria contínua, amb funció constant en l'interval [0, 3]:

$$f(x) = \frac{1}{3} \text{ si } 0 < x < 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

(A) Comprova que és una funció de densitat de probabilitat, i calcula la seua esperança.
(B) Suposem que es paga 1 euro per cada minut que dure una trucada, i que les fraccions de minut es paguen com un minut complet. Calcula la probabilitat de pagar 1 €, de pagar 2 €, i de pagar 3 €.

13. La duració (en minuts) de les telefonades per a rebre un determinat servei és una variable aleatòria contínua, amb funció de densitat:

$$f(x) = \frac{2}{9}(3x - x^2) \text{ si } 0 < x < 3 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

Comprova que és una funció de densitat de probabilitat, i calcula l'esperança i la variància.
Suposem que es paga 1 euro per cada minut que dure una trucada, i que les fraccions de minut es paguen com un minut complet. Calcula:
(A) La probabilitat de pagar un euro. (B) La probabilitat de pagar 2 euros.
(C) Quants diners esperem pagar per una trucada a aquest servei telefònic?

14. Una estació de servei rep gasolina una vegada per setmana. La demanda setmanal és una variable aleatòria contínua amb funció de densitat:

$$f(x) = 2 - 2x \text{ si } 0 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas,}$$

on x ve expressada en desenes de milers de litres.
(A) Comprova que f(x) és una funció de densitat de probabilitat.
(B) Calcula la probabilitat de vendre en una setmana més de 2 000 litres.
(C) Calcula la probabilitat de vendre en una setmana més de x desenes de milers de litres.
(D) El dipòsit de la gasolinera té una capacitat de 5 000 litres. Quina és la probabilitat que en una setmana el dipòsit s'esgote? (que la demanda setmanal supere la capacitat del dipòsit)
(E) Calcula la capacitat C que hauria de tenir el dipòsit de gasolina perquè la probabilitat d'esgotar-se el dipòsit siga de 0.1.

15. Els temps d'arribada, en minuts, de dos autobusos a una parada segueixen una distribució de probabilitat uniforme en l'interval [0, 60], i són independents. Calcula la probabilitat que:
(A) Els dos autobusos tarden més de 40 minuts en aplegar.
(B) Un autobús tarde més de 40 minuts i l'altre tarde menys de 10 minuts.

16. Si X és una variable aleatòria amb distribució normal, amb mitjana $\mu = 25$ i desviació típica $\sigma = 4$, calcula les següents probabilitats:
(A) $P(X \le 30)$ (B) $P(X \le 15)$ (C) $P(25 \le X \le 28)$
(D) $P(X > 33)$ (E) $P(3X - 2 \le 70)$ (F) $P(|X - 25| \le 3)$

17. La resistència al pes d'un determinat tipus de cordes és una variable contínua amb funció de densitat:

$$f(x) = \frac{1}{9x^2} \text{ si } 0.1 < x < 1 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas,}$$

on x s'expressa en milers de kg.
(A) Comprova que l'anterior funció és de densitat de probabilitat.
(B) Quina és la resistència mitjana d'aquest tipus de cordes?
(C) Calcula la probabilitat que una corda resista un pes de 200 kg.
(D) Si comprem 10 cordes, calcula la probabilitat que totes elles puguen resistir un pes de 200 kg.

18. Un focus consta de 5 bombetes que funcionen de forma independent. El temps de vida (en milers d'hores) de cada bombeta és una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \frac{k}{x^2} \quad \text{si } 1 \le x \le 2 \quad \text{i} \quad f(x) = 0 \text{ en altre cas.}$$

Obtén el valor de k perquè la funció anterior siga de densitat de probabilitat, i:

(A) Calcula la duració mitjana de cada bombeta.

(B) Calcula la probabilitat que una bombeta dure menys de 1100 hores.

(C) Quan més d'una bombeta es fon, aleshores renovem les bombetes del focus. Calcula la probabilitat que en 1100 hores açò no siga necessari.

19. Si X segueix una distribució normal, amb mitjana $\mu = 0$ i desviació típica σ, calcula les probabilitats:

(A) $P(|X| \le \sigma)$ (B) $P(|X| \le 2\sigma)$ (C) $P(|X| \le 3\sigma)$

20. Les persones patim un determinat nombre d'infeccions bacterianes al llarg de la nostra vida; les comptabilitzades en el nostre historial mèdic suposem segueixen una distribució normal, amb mitjana de 120 infeccions i desviació típica de 25.

(A) Elegim a l'atzar l'historial mèdic d'una persona morta; calcula la probabilitat que tinga en ell comptabilitzades més de 150 infeccions bacterianes.

(B) Elegim a l'atzar l'historial de dues persones. Calcula la probabilitat que en els dos estiguen comptabilitzades més de 150 infeccions bacterianes.

21. Un fabricant necessita rebles que tinguen una resistència d'almenys 2500 kg. En el mercat hi ha 3 tipus de rebles, A, B i C, que poden ser adequats, la resistència mitjana dels quals és de 2800, 2900 i 3000 kg, amb una desviació típica de 100, 120 i 180 kg, respectivament. Suposant distribució normal per a la resistència de cada tipus de rebles, quins seran més adequats per al fabricant?

22. Una fàbrica produeix pistons els diàmetres dels quals segueixen una distribució normal amb una mitjana de 10 cm i una desviació típica de 0.01 cm. Perquè un pistó es puga utilitzar, el seu diàmetre ha de trobar-se entre 9.98 i 10.02 cm. Si el diàmetre del pistó és menor que 9.98 cm, es rebutja; si és major que 10.02 pot reprocessar-se. Calcula la probabilitat que un pistó:

(A) Siga utilitzable. (B) Es rebutge. (C) Siga reprocessable.

23. El pes de dues poblacions A i B de ratolins segueix una distribució de probabilitat normal, amb mitjana de 350 g i desviació típica de 5 g la població A, i amb mitjana de 340 g i desviació típica de 25 g la població B.

(A) Calcula, en les dues poblacions, el percentatge de ratolins per als quals el pes sobrepassa els 350 grams.

(B) Si volem seleccionar, de cada població, els individus amb pes superior a 355 grams, en quina de les poblacions seleccionarem més individus?

24. La demanda mensual d'un cert producte segueix una distribució normal amb mitjana de 500 unitats i desviació típica de 50 unitats. Un comerciant té en el seu magatzem un total de 575 unitats. Calcula la probabilitat que en un mes esgote totes les seues existències.

25. Comprova que la funció $f(x) = \begin{cases} 0.125x + 0.25 & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$ és de densitat. Calcula las següents probabilitats:

(A) $P(X \le 3)$ (B) $P(X \ge 1)$ (C) $P(-1 \le X \le 1)$ (D) $P(-0.5 \le X \le 1)$

26. Per a una determinada edat, el pes dels homes d'una població segueix una distribució normal, amb mitjana de 75 kg i desviació típica de 5 kg.

(A) Elegim a l'atzar a un home d'aquesta població; calcula la probabilitat que el seu pes no es diferèncie més de 5 kg de la mitjana de la població.

(B) Elegim a l'atzar a dos homes d'aquesta població. Calcula la probabilitat que els pesos dels dos superen els 70 kg.

27. Per a una determinada edat, el pes dels homes d'una població segueix una distribució normal, amb mitjana de 65 kg i desviació típica de 3 kg, mentre que el pes de les dones segueix una distribució normal, amb mitjana de 55 kg i desviació típica de 2 kg. Elegim a l'atzar una persona de cada població. Calcula la probabilitat que:

(A) El pes de les dues persones supere els 60 kg.

(B) El pes de l'home siga menor de 60 kg i el de la dona siga major de 60 kg.

(C) El pes de cadascun no es diferencie més de 2 kg del pes mitjà de la seua població.

28. Si X segueix una distribució normal, amb mitjana μ i desviació típica σ, calcula les probabilitats:

(A) $P(| X - \mu | \leq \sigma)$ (B) $P(| X - \mu | \leq 2\sigma)$ (C) $P(| X - \mu | \leq 3\sigma)$

29. Una variable aleatòria segueix una distribució normal, amb $\mu = 20$ i $\sigma = 4$. Troba el valor de x per al qual:

(A) $P(X \leq x) = 0.75$ (B) $P(X \leq x) = 0.05$ (C) $P(X > x) = 0.99$

30. El pes dels pastissos que fa un forner és una variable aleatòria que suposem normal, amb una mitjana de 500 g. Si el 5% dels pastissos pesa menys de 450 g, quina és la desviació típica?

31. El pes d'un tipus de producte segueix una distribució normal amb mitjana $\mu = 5$ kg. Si sabem que el 5% dels productes pesen més de 7 kg:
(A) Calcula la desviació típica σ.
(B) Calcula el percentatge de productes que pesen menys de 3 kg.

32. Una variable aleatòria normal verifica $P(X \leq 16) = 0.82$ i $P(X \leq 3) = 0.15$
Calcula la mitjana, la variància i $P(2.5 < X < 4)$.

33. El diàmetre de les taronges de cada partida que arriba a un magatzem es distribueix normalment. Se sap que el 10% d'una partida té un diàmetre inferior a 40 mm. i un 15% de la partida sobrepassa els 80 mm.
(A) Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquesta distribució.
(B) Calcula el percentatge de taronges de la partida el diàmetre de les quals oscil·la entre 60 i 70 mm.

34. Suposem que l'altura dels individus d'una població és una variable aleatòria normal, que el 10% dels individus mesura més de 190 cm, i que el 20% mesura menys de 170 cm. Calcula el percentatge de població per al qual l'altura es troba entre 175 i 185 cm.

35. La nota dels alumnes presentats a un determinat test segueix una distribució de probabilitat normal, amb mitjana de 150 punts i desviació típica de 50 punts. Es considera apte a qualsevol alumne amb nota superior a 100 punts.
(A) Elegim a l'atzar 10 alumnes dels presentats, calcula la probabilitat que siguen tots aptes, i també la probabilitat que 6 siguen aptes.
(B) Calcula el nombre mitjà d'alumnes aptes en un conjunt de100 alumnes.

36. Un focus consta de 30 bombetes que funcionen de forma independent. El temps de vida de cada bombeta és una variable aleatòria normal amb mitjana de 1600 hores i desviació típica de 150 hores.
(A) Calcula la probabilitat que una bombeta dure menys de 1200 hores.
(B) Quan més de dues bombetes es funden, aleshores renovem les bombetes del focus. Calcula la probabilitat que en 1200 hores açò no siga necessari.

37. Suposem que el pes d'un cert producte es distribueix normalment, amb mitjana de 150 grams i desviació típica de 30 grams. Un producte és apte per a la venda si el seu pes difereix de la mitjana menys de x grams. Calcula el valor de x perquè la probabilitat que un producte resulte apte per a la venda siga de 0.95.

38. Dues components A i B d'un sistema funcionen independentment, i el rendiment d'ambdues es distribueix normalment, amb la mateixa mitjana $\mu = 25$ per a les dues, però amb desviació típica distinta, 3 per a A i 5 per a B. El sistema funciona si el rendiment de les dues components no difereix de la mitjana més de 5. Calcula la probabilitat que el sistema funcione.

39. Suposem que la demanda mensual d'un cert producte es distribueix normalment, amb mitjana de 150 unitats i desviació típica de 30 unitats. Calcula la quantitat d'unitats que hem de tenir a principi de mes perquè la probabilitat que s'esgoten les existències siga menor o igual que 0.05.

40. La resistència al pes d'un determinat tipus de cordes és una variable contínua amb distribució normal, amb mitjana de 500 kg i desviació típica de 20 kg.
(A) Calcula la probabilitat que una corda puga resistir un pes de 450 kg.
(B) Si comprem 10 cordes, calcula la probabilitat que totes elles puguen resistir un pes de 450 kg.
(C) Si comprem 20 cordes, calcula la probabilitat que alguna d'elles no puga resistir un pes de 450 kg.

41. En el problema anterior, si una corda no resisteix un pes p, la corda és tornada al fabricant. Calcula el valor de p perquè només un 1% de cordes siguen tornades al fabricant.

42. En una fàbrica el 3% dels cargols tenen una longitud inferior a 1.9 cm i el 5% superior a 2.1 cm. Suposant que les longituds es distribueixen normalment:

(A) Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquesta distribució.
(B) Calcula la probabilitat que un cargol mesure més de 2.2 cm.
(C) Calcula la probabilitat que un cargol mesure menys de 2.1 cm
(D) Calcula el percentatge de cargols de longitud entre 1.99 i 2.01 cm.

43. La demanda mensual d'arròs del tipus A segueix una distribució normal amb mitjana de 5 000 kg i desviació típica de 500 kg, mentre que la d'un altre tipus d'arròs B segueix una distribució normal amb mitjana de 1 000 kg i desviació típica de 100 kg. Una cooperativa té en el seu magatzem un estoc de 6 000 kg d'arròs del tipus A i 900 kg del tipus B. Calcula la probabilitat que en un mes:

(A) Esgote les existències dels dos tipus d'arròs.
(B) No esgote les existències de cap dels dos tipus d'arròs.
(C) Esgote les existències d'arròs del tipus A, però no del tipus B.
(D) Esgote les existències d'arròs del tipus B, però no del tipus A.
(E) Esgote les existències d'un sol tipus d'arròs.

44. El voltatge d'un cert circuit es distribueix normalment, amb mitjana de 120 volts i desviació típica de 0.5 volts. Si prenem 3 mesures independents del voltatge, calcula la probabilitat que:

(A) Les tres estiguen compreses entre 120 i 121 volts.
(B) Només dues d'elles estiguen compreses entre 120 i 121 volts.
(C) Dues d'elles estiguen compreses entre 120 i 121 volts i l'altra siga major de 121 volts.

45. Una estació de servei rep gasolina una vegada per setmana. Suposem que la demanda setmanal és una variable aleatòria normal amb mitjana de 8 000 litres i una desviació típica de 1250 litres.

(A) Calcula la probabilitat de vendre en una setmana menys de 6 000 litres.
(B) Calcula la probabilitat de vendre en una setmana entre 4 000 i 10 000 litres.
(C) El dipòsit de la gasolinera té una capacitat de 10 000 litres. Quina és la probabilitat que en una setmana el dipòsit s'esgote? (que la demanda setmanal supere la capacitat del dipòsit)
(D) Calcula la capacitat C que hauria de tenir el dipòsit de gasolina perquè la probabilitat d'esgotar-se el dipòsit en una setmana no supere el 1%.

46. Un fabricant de televisors ofereix una garantia de 3 anys, durant els quals reemplaça el televisor avariat per un altre nou. Suposem que el temps transcorregut fins a tenir una avaria es distribueix normalment, amb mitjana de 5 anys i desviació típica d'1 any.

(A) Calcula la probabilitat que un televisor s'avarie en temps de garantia.
(B) Si ven un total de 500 televisors, calcula el nombre mitjà de televisors que tindran una avaria en temps de garantia.
(C) Si vol reemplaçar només un 1% de televisors, quina ha de ser la garantia?

47. El pes dels melons d'Alger d'un magatzemista segueix una distribució normal, amb mitjana de 3250 grams i desviació típica de 350 grams. El preu per kg. és de 0.75 euros. Una persona elegeix a l'atzar una meló d'Alger. Calcula la probabilitat que:

(A) El seu pes supere els 4 kg.
(B) El seu preu supere els 2.5 euros.
(C) El seu pes no diferisca més d'1 kg. del seu pes mitjà.
(D) El seu preu no diferisca més d'un euro del preu mitjà.

48. El consum d'aigua (en m^3) és una variable aleatòria amb distribució normal de mitjana 30 m^3 i desviació típica de 2 m^3. El preu que es paga és de 10 € fixes més 5 €/m^3 consumit.

(A) Calcula la probabilitat de consumir més de 33 m^3 d'aigua.
(B) Calcula la probabilitat de pagar més de 150 €.
(C) Calcula la probabilitat de consumir entre 25 i 32 m^3.
(D) Calcula la probabilitat de pagar entre 150 i 170 €.

49. Un focus consta de 30 bombetes que funcionen de forma independent. El temps de vida de cada bombeta és una variable aleatòria normal amb mitjana de 1 600 hores i desviació típica de 150 hores.

(A) Calcula la probabilitat que una bombeta dure menys de 1 200 hores.
(B) Quan més de dues bombetes es funden renovem les bombetes del focus. Calcula la probabilitat que en 1 200 hores açò no siga necessari.

50. Donada la variable X que es distribueix normal, amb $\mu = 20$ i $\sigma = 2$, en quin interval centrat en la mitjana la probabilitat que la variable no prenga valors en ell és 0.2?

51. Un jugador de bàsquet té una mitjana de 20 punts per partit, amb una desviació típica de 5 punts. Suposem adequada una distribució normal:
(A) Quina és la probabilitat que en el pròxim partit obtinga més de 15 punts?
(B) I que en els dos pròxims partits obtinga més de 25 punts en cadascun?
(C) I que en el pròxim partit obtinga més de 30 punts i en el següent menys de 30 punts?
(D) Calcula també la probabilitat que en 9 dels pròxims 10 partits obtinga una puntuació no inferior a 10 punts.

52. Per a ser admès en un centre d'estudis esportius, s'han de superar unes proves físiques i altres psicotècniques. La puntuació que els aspirants obtenen en aquestes proves segueix distribucions aproximadament normals, amb mitjanes de 1250 i 200 punts, i desviacions típiques de 100 i 10 punts, respectivament. La puntuació mínima per a superar les proves és de 1450 i 210 punts, respectivament. Calcula la probabilitat que una persona elegida a l'atzar:
(A) Supere les dues proves.
(B) No supere cap de les dues proves.
(C) Supere les proves físiques, però no les psicotècniques.

53. El curs anterior, la nota mitjana dels estudiants que volien estudiar una determinada carrera va ser de 6.75 punts, amb una desviació típica de 0.4 punts. Suposant adequada una distribució normal per a les notes, calcula la "nota de tall" per a aquesta carrera, si volem acceptar un 75% dels estudiants que volen estudiar la carrera (són acceptats tots aquells la nota dels quals és superior a la de tall).

54. Per a ser admès en un determinat tipus d'estudis tots els candidats han de passar unes proves, les qualificacions de les quals segueixen, determinat per llarga experiència, una distribució normal amb mitjana 550 i desviació típica 40. Si es desitja admetre al 25% de tots els aspirants que tinguen les qualificacions més altes, obtén la qualificació mínima que cal obtenir per a ser admès.

55. Una empresa desitja instal·lar una nova planta de producció. La direcció aventura una demanda mitjana anual de 50 000 unitats amb desviació típica de 10 000 unitats. Es pren la decisió d'establir una capacitat de producció C per a la planta, de forma que la probabilitat que quede sense utilitzar un 10% o més d'aquesta capacitat siga d'un 5%. Quina és la capacitat de producció requerida? Per a obtenir-la, suposem que la demanda anual segueix una distribució normal.

56. Per llarga experiència se sap que aproximadament el 2% dels articles que fabrica una empresa són defectuosos. Si els articles són empaquetats en caixes de 500, calcula aproximadament la probabilitat que:
(A) Una caixa continga almenys 5 articles defectuosos.
(B) Una caixa continga entre 5 i 15 articles defectuosos.
(C) Si totes les caixes que contenen més de 15 articles defectuosos són rebutjades, calcula la probabilitat de rebutjar alguna caixa al inspeccionar 5 d'elles.

57. Dels 2500 habitants d'un barri hi ha 300 que estan empadronats defectuosament. En una revisió del cens s'elegeix a l'atzar a 200 habitants del barri. Si es troben entre ells més de 10 persones defectuosament empadronades, es decideix refer el cens. Amb ajuda de l'aproximació normal, calcula la probabilitat de refer el cens.

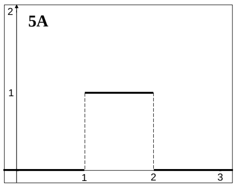
58. Un joc consisteix en llançar dos daus i es guanya si la diferència entre els resultats dels dos daus és superior a 2 punts.
(A) Calcula la probabilitat de guanyar en una jugada.
(B) Si repetim el joc 10 vegades, calcula la probabilitat de guanyar més de 2 vegades.
(C) Si repetim el joc 50 vegades, calcula la probabilitat de guanyar més de 10 vegades.

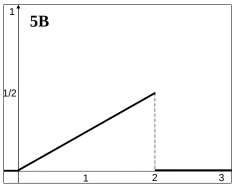
59. Una màquina fabrica articles de forma independent. La probabilitat que un article siga defectuós és de 0.05. Calcula la probabilitat de que en un lot de 100 articles:
(A) Hi haja més de 8 articles defectuosos. (B) Hi haja entre 3 i 8 articles defectuosos.

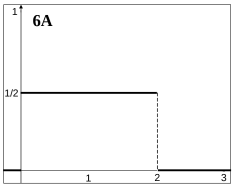
Solucions de les activitats del capítol 5

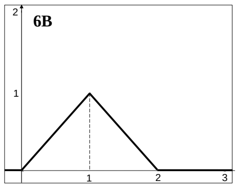
1. $\frac{1}{3}$. **2.** (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{11}{18}$. **3.** K = $\frac{1}{20}$; (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{20}$. (E) $\frac{1}{40}$. (F) 0.

(G) $\frac{1}{4}$. (H) $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{4}$.





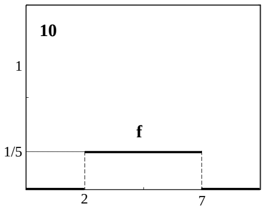


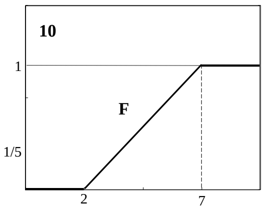


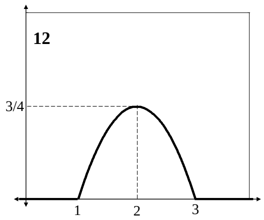
6. (A) 1/4 i 1/2. (B) 1/8 i 3/4. **7.** $\frac{7}{8}$. **8.** (A) 0.3672. (B) 1/64. (C) 0.6172. **9.** K = 2.

10. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x-2}{5} & \text{si } 2 \le x \le 7 \\ 1 & \text{si } x > 7 \end{cases}$. (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. **11.** (A) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \ge 0 \\ 1 & \text{en altre cas} \end{cases}$.

(B) $P(X < 1) = 1 - e^{-1}$; $P(X \ge 2) = e^{-2}$; $P(1 \le X \le 2) = e^{-1} - e^{-2}$. **12.** (A) K = $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{11}{16}$. (C) E(X) = 2. Var(X) = $\frac{1}{5}$.







13. (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{27}{32}$. (C) E(X) = 0, Var(X) = $\frac{1}{5}$. **15.** (A) 0.99942. (B) 0.04006. (C) 0.02275. (D) 0.96844.

16. (A) 84.13%. (B) 0.135%. (C) 2.278%. (D) 28.575%. (E) 0.70778. **17.** (A) 0.9729. (B) 0.0271. **18.** 0.0455.

19. (A) 2.3268. (B) 1.645. (C) 1.2816. (D) –1.645. (E) 9.6536. (F) 0.3464. (G) 12.368. (H) –2.368.

20. (A) 2.27%. (B) 206 cm. **21.** (A) 0.0975. (B) 0.1352. (C) 0.1918. (D) 0.2057. **22.** (A) 0.186. (B) 15.

23. (A) 0.3605. (B) 0.142. (C) 6. **24.** 0.00024

Solucions dels problemes del capítol 5

1. K = $\frac{1}{4}$; $P(X \le 2) = \frac{3}{8}$; $P(X > 2) = \frac{5}{8}$; $P(1.5 < X < 2.5) = \frac{1}{2}$. **2.** (A) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$ (C) $\frac{d-c}{b-a}$; (D) $E(X) = \frac{a+b}{2}$; $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3. K = 4. (A) $E(X) = \frac{4}{5}$. $Var(X) = \frac{2}{75}$. (B) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. (C) $P(X < 0.5) = \frac{1}{16}$; $P(X > 1) = 0.9999$;

$P(0.1 \le X \le 0.9) = 0.656$. **4.** $K = \frac{1}{4}$. (A) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$ (B) $E(X) = \frac{13}{6}$; $Var(X) = \frac{11}{36}$. (C) $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{8}$;

$\frac{1}{2}$. **5.** $K = \frac{1}{8}$; $P(0 \le X \le 4) = \frac{15}{16}$; x = 0.3. **6.** Sí; $\frac{5}{32}$; 1; 0. 7. (A) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$. (B) P(X < 1) =

$= 1 - e^{-1/2}$; $P(X \ge 2) = e^{-1}$; $P(1 \le X \le 2) = e^{-1/2} - e^{-1}$. (C) E(X) = 2. **8**. (A) $K = \frac{1}{2}$. (B) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

(C) $P(X \le -1) = P(X \ge 1) = \frac{1}{2}e^{-1}$; $P(-1 \le X \le 1) = 1 - e^{-1}$. **9.** (A) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-1}{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; (B) $P(X \le 2) = \frac{1}{2}$;

$P(X \ge 3) = \frac{1}{3}$; $P(2 \le X \le 3) = \frac{1}{6}$. **10.** 50 cèntims. **11.** (A) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$; 1, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$. **12.** E(X) = 1.5. (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. **13.** $E(X) = \frac{3}{2}$, $Var(X) = \frac{9}{20}$.

(A) $\frac{7}{27}$. (B) $\frac{13}{27}$. (C) 2 €. **14.** (B) 0.64. (C) $(1 - x)^2$, si $0 < x \le 1$; 0, si $x \ge 1$. (D) 0.25. (E) 6837.7 litres.

15. (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{1}{9}$. **16.** (A) 0.8944. (B) 0.00621. (C) 0.2734. (D) 0.02275. (E) 0.4013. (F) 0.5468.

17. (B) 255.8 kg. (C) $\frac{4}{9}$. (D) 0.0003. **18.** 2. (A) 1386.3 h. (B) 0.1818. (C) 0.77416. **19.** (A) 0.6826. (B) 0.9545. (C) 0.9973. **20.** (A) 0.1151. (B) 0.0132. **21.** Els del tipus B. **22.** (A) 0.9545. (B) 0.02275. (C) 0.02275. (D) 95.45; 2.275; 2.275. **23.** (A) P(A > 350) = 0.5; P(B > 350) = 0.3446. (B) en B, un 27.43%; en A, un 15.87%. **24.** 0.06681. **25.** (A) 1. (B) 0.4375. (C) 0.5. (D) 0.421875. **26.** (A) 0.6826. (B) 0.7078. **27.** (A) 0.0059. (B) 0.0003. (C) 0.3379. **28.** (A) 0.6826. (B) 0.9545. (C) 0.9973. **29.** (A) 22.7. (B) 13.42. (C) 10.68. **30.** 30.39. **31.** (A) 1.2158. (B) 5%. **32.** $\mu = 9.9032$, $\sigma = 6.6602$; $P(2.5 < X < 4) = 0.0544$. **33.** (A) $\mu = 62.1154$, $\sigma = 17.2547$. (B) 0.2249. **34.** 0.3951. **35.** (A) 0.1776 i 0.0022. (B) 84 alumnes. **36.** (A) 0.0038. (B) 0.9998. **37.** 58.8. **38.** 0.6172. **39.** 200 unitats. **40.** (A) 0.9938. (B) 0.9397. (C) 0.1169. **41.** 453.4 kg. **42.** (A) $\mu = 2.0067$, $\sigma = 0.0567$. (B) 0.0004. (C) 0.95. (D) 13.9%. **43.** (A) 0.0191. (B) 0.1551. (C) 0.0036. (D) 0.8222. (E) 0.8258. **44.** (A) 0.1087. (B) 0.3572. (C) 0.0155. **45.** (A) 0.0548. (B) 0.9445. (C) 0.0548. (D) 10908.5 litres. **46.** (A) 0.02275. (B) 11.37 televisors. (C) 2.67 anys. **47.** (A) 0.0161. (B) 0.4059. (C) 0.9957. (D) 0.99986. **48.** (A) 0.0668. (B) 0.8413. (C) 0.8351. (D) 0.6826. **49.** (A) 0.0039. (B) 0.9998. **50.** [17.44, 22.56]. **51.** (A) 0.8413. (B) 0.1181. (C) 0.0222. (D) 0.1849. **52.** (A) 0.0036. (B) 0.8222. (C) 0.0191. **53.** 6.48. **54.** 577 punts. **55.** C = 37278. **56.** (A) 0.9605. (B) 0.921. (C) 0.1825. **57.** 0.9989. **58.** (A) 1/3. (B) 0.7009. (C) 0.96784. **59.** (A) 0.3232. (B) 0.5507.