Matemàtiques per a batxillerat

Matemàtiques per a batxillerat és el resultat de molta il·lusió, treball, temps i gran experiència docent. Conté tots els coneixements matemàtics necessaris per a emprendre els estudis de Grau de qualsevol Universitat.

Aquest projecte consta dels llibres de matemàtiques de primer i segon de les modalitats de batxillerat de Ciències i Tecnologia i de Ciències socials, segons els continguts curriculars que actualment s'estudien a l'estat espanyol, i estan distribuïts en 3 volums per a cada curs:

	Primer curs	Segon curs
Modalitat de Ciències i Tecnologia	Àlgebra i Geometria	Àlgebra lineal i Geometria
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Estadística	Càlcul de probabilitats
Modalitat de Ciències socials	Àlgebra	Àlgebra lineal
	Funcions	Càlcul diferencial i integral
	Càlcul de probabilitats i Estadística	Càlcul de probabilitats i Inferència estadística

Contingut de Matemàtiques per a batxillerat

- **Tot el currículum** dels batxillerats de l'estat espanyol.
- Més de 1 500 **exemples resolts** dels epígrafs importants.
- Més de 8 000 problemes entre **activitats i exercicis** proposats.
- Totes les activitats i exercicis proposats tenen la **solució** al final del capítol corresponent.

Estructura i concepció del llibre Matemàtiques per a batxillerat

Cada parella de pàgines consecutives (8 i 9, 10 i 11...) **es conceben com una porció tancada** del capítol; cap concepte quedarà a mig fer, i conté exemples resolts i activitats per a resoldre.

Mai hi ha text vertical paral·lel. Sempre es llegeix de dalt a baix, sense distraccions.

Per a facilitar l'estudi distingim amb formes i colors:

- **Definicions**: Sempre amb quadres de color verd, sense farcit.
- **Propietats i teoremes**: Sempre amb quadres amb farcit de color verd. Quan hem cregut convenient incloure la demostració d'alguna propietat ho fem fora del quadre, ressaltada per l'esquerra amb una barra vertical de color verd.
- **Exemples resolts**: És el més abundant al llarg del llibre; resolts amb detall, perquè l'alumne puga dependre d'ells. Molts són aplicacions a altres ciències, com la Física, Biologia, Economia, Topografia, per citar les més aplicades. Van ressaltats per l'esquerra amb una barra groga, i numerats per capítol.
- **Activitats proposades**: Almenys al finalitzar cada parella de pàgines (10 i 11, 12 i 13...) incloem un quadre farcit de color taronja amb activitats numerades per capítol i relacionades amb la teoria explicada en aquestes pàgines i els exemples allí resolts.
- **Problemes de recapitulació**: A més, al finalitzar cada capítol afegim una àmplia col·lecció de problemes proposats per a acabar d'assolir els conceptes del capítol.
- **Solucions**: Cada capítol acaba amb les solucions de totes les activitats i de tots els problemes proposats en ell.

És un procés d'assimilació dels elements conceptuals necessaris per a interpretar, enunciar i resoldre els problemes que planteja l'estudi dels fenòmens propis de les diverses ciències. El coneixement matemàtic s'organitza en forma de sistema deductiu, de manera que definicions, postulats, propietats, teoremes i mètodes s'articulen lògicament per a donar validesa a les intuïcions i a les tècniques matemàtiques. Tot aquest procés culmina en els exemples i problemes.

El llenguatge formal s'introdueix lentament, però resulta imprescindible per a no perdre la línia conductora de la solució del problema. Incloem demostracions d'algunes propietats sempre que siguen adequades al nivell, encara que no són necessàries per al desenvolupament del text.

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Àlgebra i geometria

educàlia editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Àlgebra i geometria

educàlia editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-07-7

Depòsit legal: V-3243-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 2

Raons trigonomètriques de qualsevol angle

2.1 Definició general de les raons trigonomètriques

L'extensió de les raons trigonomètriques a qualsevol angle (no només als aguts) permet treballar amb qualsevol tipus de triangle i possibilita ampliar el camp d'aplicacions.

Considerem el pla amb els seus eixos de coordenades cartesianes i origen O. Considerem a més una circumferència de radi r centrada en l'origen.

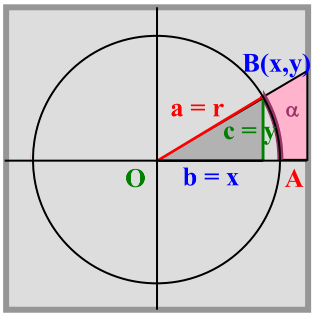
Cada angle amb vèrtex en O tindrà el seu arc corresponent (d'igual mesura) en aquesta circumferència.

Prenem un arc, de mesura α, amb extrem inicial en el punt A(r, 0), i extrem final en el punt B(x, y). Si B està en el primer quadrant redefinim les raons trigonomètriques amb **a = r**, **b = x**, **c = y**:

$$\sin\alpha = \frac{\text{long. catet oposat}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{long. catet adjacent}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{x}{r}$$

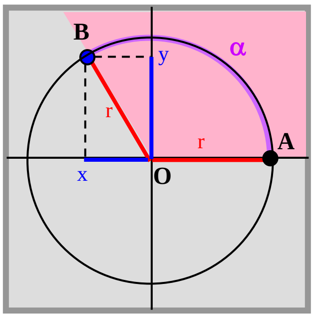
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{long. catet oposat}}{\text{long. catet adjacent}} = \frac{c}{b} = \frac{y}{x}$$



➤ Extensió de la definició de les raons trigonomètriques

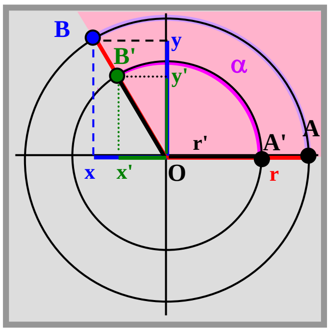
Donat un arc, de mesura α, amb extrem inicial en l'origen d'angles, punt A(r, 0), i extrem final en el punt B(x, y) (un punt qualsevol de la circumferència), definim:

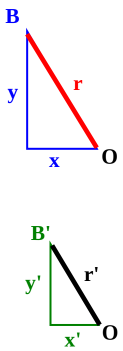
- $\sin\alpha = \dfrac{\textbf{ordenada de B}}{\textbf{radi}} = \dfrac{y}{r}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\textbf{abscissa de B}}{\textbf{radi}} = \dfrac{x}{r}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\textbf{ordenada de B}}{\textbf{abscissa de B}} = \dfrac{y}{x}$, per a $x \neq 0$



La nova definició de les raons trigonomètriques és ***independent*** de la circumferència elegida:

"Si agafem dues circumferències de radis r i r', els arcs AB i A'B' corresponents al mateix angle central α proporcionen triangles semblants. El **teorema de Tales** ens dóna la independència"





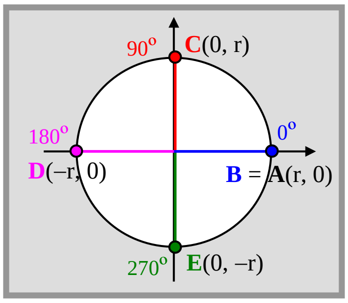
$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} = \sin\alpha$$

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} = \cos\alpha$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}\alpha$$

➢ Raons trigonomètriques de 0º, 90º, 180º i 270º

Angle α / Raó	0º	90º	180º	270º
Sinus	0	1	0	–1
Cosinus	1	0	–1	0
Tangent	0	No existeix	0	No existeix



Si $\alpha = 0^{\circ}$ → B = A(r, 0) → $\sin 0^{\circ} = \frac{0}{r} = 0$ i $\cos 0^{\circ} = \frac{r}{r} = 1$

Si $\alpha = 90^{\circ}$ → B = C(0, r) → $\sin 90^{\circ} = \frac{r}{r} = 1$ i $\cos 90^{\circ} = \frac{0}{r} = 0$

Si $\alpha = 180^{\circ}$ → B = D(–r, 0) → $\sin 180^{\circ} = \frac{0}{r} = 0$ i $\cos 180^{\circ} = \frac{-r}{r} = -1$

Si $\alpha = 270^{\circ}$ → B = E(0, –r) → $\sin 270^{\circ} = \frac{-r}{r} = -1$ i $\cos 270^{\circ} = \frac{0}{r} = 0$

Com que $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ sempre que $x \neq 0$, aleshores:

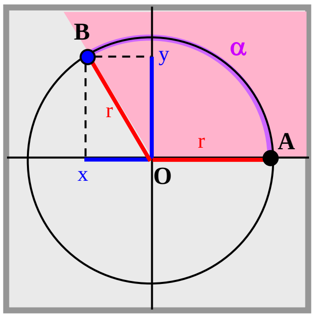
$\text{tg}\,0^{\circ} = \frac{0}{r} = 0$ $\text{tg}\,180^{\circ} = \frac{0}{-r} = 0$ $\text{tg}\,90^{\circ} = \frac{r}{0}$ no existeix $\text{tg}\,270^{\circ} = \frac{-r}{0}$ no existeix

➢ Altres raons trigonomètriques: secant, cosecant i cotangent

En les mateixes condicions de les definicions anteriors, hi ha altres raons trigonomètriques:

Donat un arc, de mesura α, amb extrem inicial en l'origen d'angles, punt A(r, 0), i extrem final en el punt B(x, y) (un punt qualsevol de la circumferència), definim

- ***Cotangent de α:*** $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\textbf{abscissa de B}}{\textbf{ordenada de B}} = \dfrac{x}{y}$
- ***Secant de α:*** $\sec\alpha = \dfrac{\textbf{radi}}{\textbf{abscissa de B}} = \dfrac{r}{x}$
- ***Cosecant de α:*** $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{\textbf{radi}}{\textbf{ordenada de B}} = \dfrac{r}{y}$



Definicions vàlides només si els denominadors no són nuls.

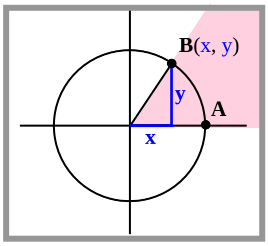
1 Comprova, a partir de les seues definicions, les següents relacions entre raons trigonomètriques:

(A) $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ (B) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ (C) $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

2 Troba les noves raons trigonomètriques de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º i 270º.

2.2 Signe de les raons trigonomètriques

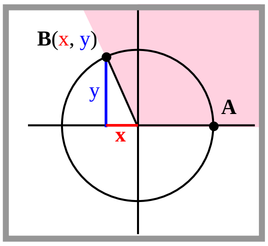
La nova definició de les raons trigonomètriques, a partir dels valors de les coordenades x i y de l'extrem B de l'arc, proporciona el signe d'aquestes raons trigonomètriques.



Angles 1r quadrant:

$x > 0 \quad y > 0$

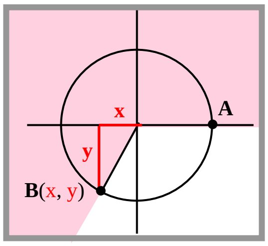
$\sin\alpha > 0$
$\cos\alpha > 0$
$\text{tg}\,\alpha > 0$



Angles 2n quadrant:

$x < 0 \quad y > 0$

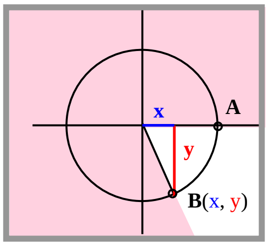
$\sin\alpha > 0$
$\cos\alpha < 0$
$\text{tg}\,\alpha < 0$



Angles 3r quadrant:

$x < 0 \quad y < 0$

$\sin\alpha < 0$
$\cos\alpha < 0$
$\text{tg}\,\alpha > 0$



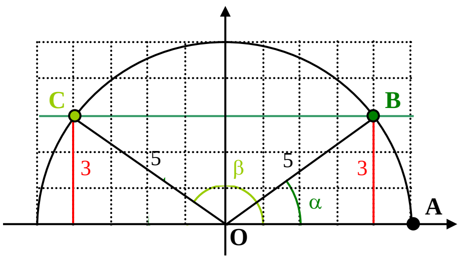
Angles 4t quadrant:

$x < 0 \quad y > 0$

$\sin\alpha < 0$
$\cos\alpha > 0$
$\text{tg}\,\alpha < 0$

Exemple 1

En uns eixos de coordenades dibuixem una semicircumferència de radi r = 5, i sobre ella situem alguns punts, A(5, 0), B(4, 3) i C(–4, 3). Calculem les raons trigonomètriques dels arcs AB i AC, de mesures que anomenem α i β, respectivament.



$$\sin\alpha = \frac{\text{Ordenada de B}}{\text{Radi}} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Abscissa de B}}{\text{Radi}} = \frac{4}{5} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Ordenada de B}}{\text{Abscissa de B}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{Radi}}{\text{Ordenada de B}} = \frac{5}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{Radi}}{\text{Abscissa de B}} = \frac{5}{4} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{Abscissa de B}}{\text{Ordenada de B}} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{\text{Ordenada de C}}{\text{Radi}} = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{\text{Abscissa de C}}{\text{Radi}} = -\frac{4}{5} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{\text{Ordenada de C}}{\text{Abscissa de C}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{cosec}\,\beta = \frac{\text{Radi}}{\text{Ordenada de C}} = \frac{5}{3} \qquad \sec\beta = \frac{\text{Radi}}{\text{Abscissa de C}} = -\frac{5}{4} \qquad \text{cotg}\,\beta = \frac{\text{Abscissa de C}}{\text{Ordenada de C}} = -\frac{4}{3}$$

3 En una circumferència de radi r = 10 situa els punts de coordenades A(10, 0), B(8, 6) i C(–8, 6). Calcula les raons trigonomètriques dels arcs AB i AC. Compara els resultats amb els de l'exemple 1.

4 En la mateixa circumferència, situa els punts A(10, 0), B(6, 8), C(–6, 8), D(–6, –8) i E(6, –8). Calcula les raons trigonomètriques dels arcs AB, AC, AD i AE.

2.3 Propietats de les raons trigonomètriques

(1) El sinus i el cosinus de qualsevol angle són sempre nombres entre –1 i 1:

$$\mathbf{-1 \le \sin\alpha \le 1} \quad \text{i} \quad \mathbf{-1 \le \cos\alpha \le 1}$$

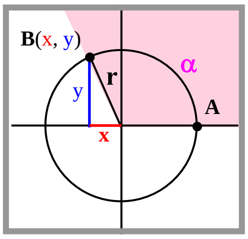
(2) Relació fonamental: $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

(3) Altres relacions: (A) $\mathbf{tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (B) $\mathbf{cotg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

(C) $\mathbf{1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha}$ (D) $\mathbf{1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha}$

Considerem, per exemple, l'angle α del segon quadrant de la figura següent.

(1) Pel teorema de Pitàgores es verifica:



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 \le r^2 \;\to\; \dfrac{x^2}{r^2} \le 1 \;\to\; \mathbf{-1 \le \dfrac{x}{r} = \sin\alpha \le 1} \\ y^2 \le r^2 \;\to\; \dfrac{y^2}{r^2} \le 1 \;\to\; \mathbf{-1 \le \dfrac{y}{r} = \cos\alpha \le 1} \end{cases}$$

(2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

(3) (A) $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y/r}{x/r} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (B) $cotg\,\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x/r}{y/r} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Els casos (C) i (D) s'obtenen dividint l'expressió (2) per $\cos^2\alpha$ i $\sin^2\alpha$ respectivament. Vegem només (C):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \to \quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \to \quad \mathbf{tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$$

Exemple 2

Si sabem que $tg\,\alpha = -3$, sent α un angle del quart quadrant, quin és el valor de $\cos\alpha$ i de $\sin\alpha$?

Com que $tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha \quad \to \quad (-3)^2 + 1 = sec^2\alpha \quad \to \quad sec\,\alpha = \pm\sqrt{10}$

Com que $sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \quad \to \quad \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

A més, el cosinus és positiu en els angles del quart quadrant: $\cos\alpha = +\dfrac{1}{\sqrt{10}} = +\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

A més $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\to\; \sin^2\alpha + \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \;\to\; \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} \;\to\; \sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{9}{10}}$

i ja que el sinus és negatiu en el quart quadrant: $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

5 Si α és un angle del segon quadrant i $tg\ \alpha = -5$, calcula les restants raons trigonomètriques de α.

6 Si α és un angle del tercer quadrant i $\cos\alpha = -0.4$, troba les restants raons trigonomètriques de α.

7 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\ \alpha = 0.2$, troba les restants raons trigonomètriques de α.

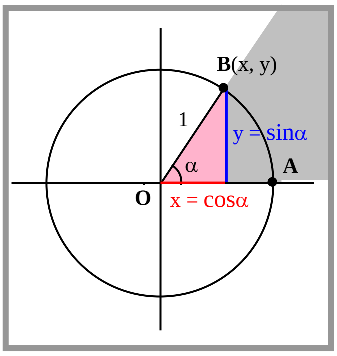
2.4 Línies trigonomètriques

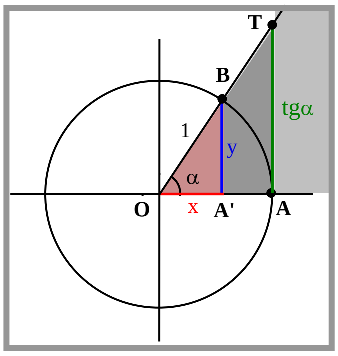
Les raons trigonomètriques de qualsevol angle tenen una còmoda representació gràfica en la circumferència de radi unitat, r = 1, anomenada ***circumferència trigonomètrica***.

Si A(1, 0) i B(x, y) són els extrems inicial i final d'un arc de mesura α sobre la circumferència trigonomètrica, tenim que

$$\mathbf{\sin\alpha} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \mathbf{y} \qquad\qquad \mathbf{\cos\alpha} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \mathbf{x}$$

Les coordenades x i y del punt B coincideixen amb els valors del cosinus i del sinus respectivament.



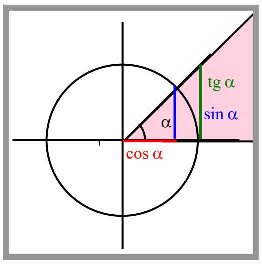


D'altra banda, com que els triangles OA'B i OAT de la segona figura són semblants, els seus costats són proporcionals, i podem expressar que:

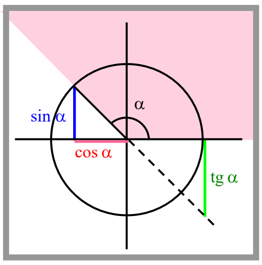
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \quad \rightarrow \quad \mathbf{tg\,\alpha = AT}$$

Així doncs, en una circumferència trigonomètrica, les línies **OA'**, **A'B** i **AT**, les longituds de les quals representen els valors del **sinus**, **cosinus** i **tangent** d'un angle del primer quadrant respectivament, són anomenades ***línies trigonomètriques sinus, cosinus i tangent***.

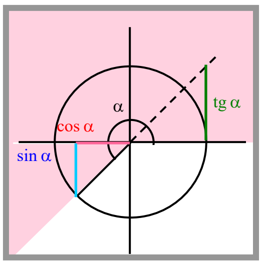
A continuació representem les línies trigonomètriques per a angles dels quatre quadrants. Cal tindre en compte que la situació de les línies ens indica el signe de la raó que representen; les línies verticals per davall de l'eix OX o les horitzontals a l'esquerra de l'eix OY representen raons trigonomètriques amb signe negatiu (dibuixades en colors clars).



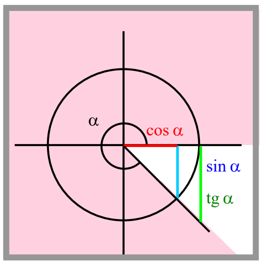
Angles 1r quadrant



Angles 2n quadrant



Angles 3r quadrant



Angles 4t quadrant

8 Per què representem les línies trigonomètriques de la tangent dels angles del segon i tercer quadrant en els quadrants quart i primer, respectivament?

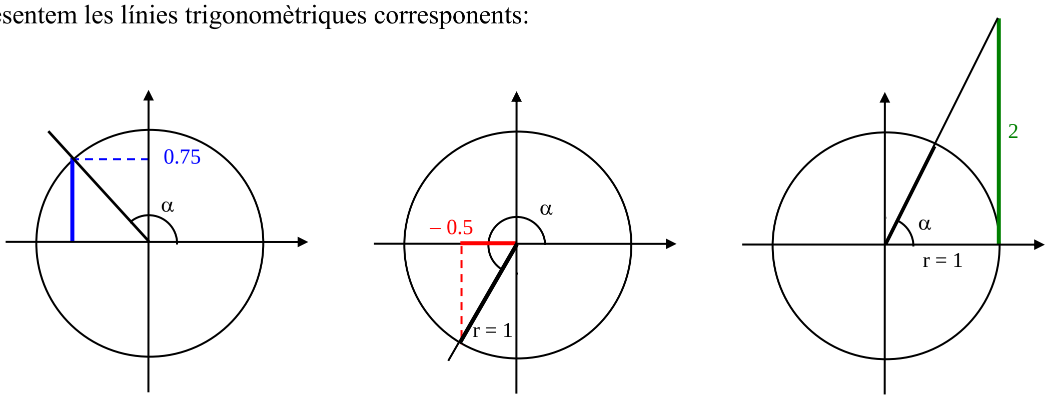
9 Expressa gràficament les línies trigonomètriques de les raons trigonomètriques secant i cosecant en cadascun dels quadrants.

Exemple 3

Amb ajuda de la circumferència trigonomètrica, dibuixem els següents angles:

(A) Un angle del segon quadrant el sinus del qual val 0.75.
(B) Un angle del tercer quadrant el cosinus del qual val – 0.5.
(C) Un angle del primer quadrant la tangent del qual val 2.

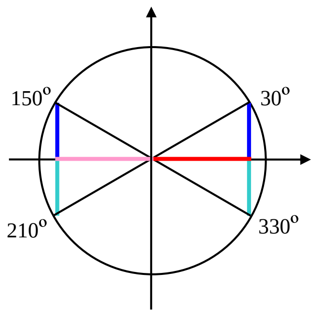
Representem les línies trigonomètriques corresponents:



Exemple 4

Conegudes les raons trigonomètriques de 30º, trobem les dels angles 150º, 210º i 330º utilitzant la representació gràfica de les seues línies trigonomètriques. Representem només les corresponents als sinus i cosinus dels quatre angles, i per simetries veiem que les corresponents als sinus tenen la mateixa longitud, igual que amb el cosinus. Només difereixen en el signe, segons el quadrant.

	30º	**150º**	**210º**	**330º**
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tangent	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



10 Utilitza una circumferència trigonomètrica per a dibuixar els dos angles menors de 360º amb les següents propietats:

(A) El cosinus d'aquests angles val 0.3.
(B) El cosinus d'aquests angles val –0.3.
(C) El sinus d'aquests angles val 0.3.
(D) El sinus d'aquests angles val – 0.3.
(E) La tangent d'aquests angles val 0.3.
(F) La tangent d'aquests angles val –0.3.
(G) La tangent d'aquests angles val –2.

11 Com podries dibuixar l'angle del primer quadrant per al qual la tangent val 100?

12 Construeix taules com l'anterior que continguen els valors de les raons trigonomètriques dels següents grups d'angles (obtingudes per simetria a partir de les del primer angle de cada grup):

(A) 45º, 135º, 225º i 315º
(B) 60º, 120º, 240º i 300º

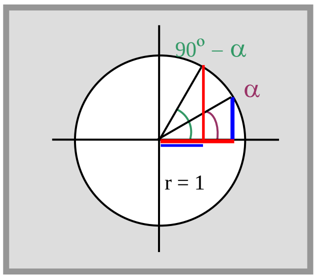
2.5 Relacions trigonomètriques de distints angles

En l'exemple 4 hem obtingut les raons trigonomètriques de 150º, 210º i 330º a partir de les de 30º comparant les seues línies trigonomètriques. Procedint de la mateixa manera obtindrem aquestes i altres relacions de forma general relacionant-les, principalment per comoditat amb angles del 1r quadrant.

(A) Raons trigonomètriques d'angles complementaris

Dos angles α i β són ***complementaris*** si sumen 90º, és a dir, quan $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^\circ}$, o d'altra manera $\boldsymbol{\beta = 90^\circ - \alpha}$. Tenim les següents relacions entre les seues raons trigonomètriques:

$$\mathbf{sin}(90^\circ - \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}(90^\circ - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha$$
$$\mathbf{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathbf{cotg}\,\alpha$$



Recorda el valor de les raons trigonomètriques de 30º i 60º i comprova la propietat dels complementaris:

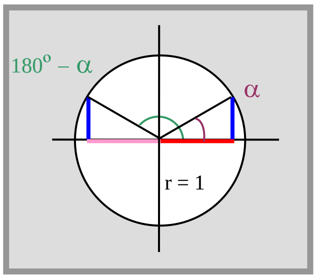
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \operatorname{cotg} 30^\circ$$

(B) Raons trigonomètriques d'angles suplementaris

Dos angles α i β són ***suplementaris*** si sumen 180º, és a dir, si $\boldsymbol{\alpha + \beta = 180^\circ}$, o d'altra manera, quan $\boldsymbol{\beta = 180^\circ - \alpha}$.

Observa en la següent circumferència trigonomètrica les longituds i signes de les línies trigonomètriques:

$$\mathbf{sin}(180^\circ - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}(180^\circ - \alpha) = -\,\mathbf{cos}\,\alpha$$
$$\mathbf{tg}(180^\circ - \alpha) = -\,\mathbf{tg}\,\alpha$$



Exemple 5

Quins angles entre 0º i 360º tenen per sinus el valor 0.6?

El sinus és positiu en els angles del primer i segon quadrants.

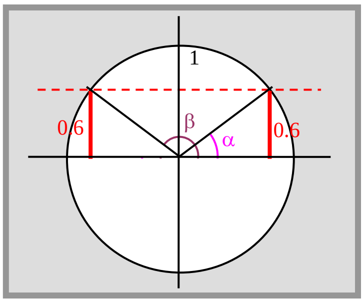
La calculadora proporciona el del primer quadrant $\boldsymbol{\alpha = 36.87^\circ}$.

Però el del segon quadrant **no ens el proporciona**.

Si l'anomenem β, sabem que ha de ser **suplementari de** $\boldsymbol{\alpha}$**:**

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 180^\circ} \quad \rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \alpha$$

I si $\alpha = 36.87 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 143.13^\circ}$



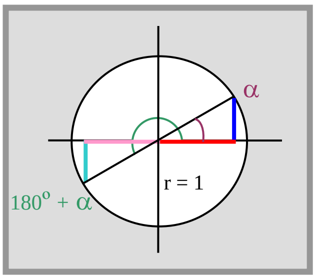
(C) Raons trigonomètriques d'angles que es diferencien en 180º

Considerem dos angles α i β ***que difereixen en* 180º**: **β – α = 180º**, és a dir, **β = 180º + α.**

sin(180º + α) = – sin α

cos(180º + α) = – cos α

tg(180º + α) = tg α



Els angles 40º i 220º **difereixen en 180º**, perquè 220º – 40º = 180º → 220º = 180º + 40º

Aleshores: sin 220º = – sin 40º cos 220º = – cos 40º tg 220º = tg 40º

Exemple 6

Quins angles entre 0º i 360º tenen per cosinus el valor – 0.5?

El cosinus és negatiu en els angles del segon i tercer quadrants.

Sabem que cos 60º = 0.5, i el cosinus del suplementari de 60º serà del mateix valor però negatiu:

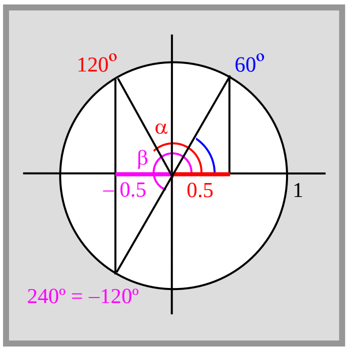
α = 180º – 60º = 120º i **cos 120º = –0.5**

El mateix ocorre amb l'angle que difereix de 60º en 180º:

β = 180º + 60º = 240º i **cos(240º) = –0.5**

Els angles buscats són**:**

α = 120º i **β = 240º**



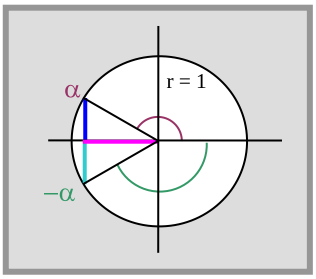
(D) Raons trigonomètriques d'angles oposats

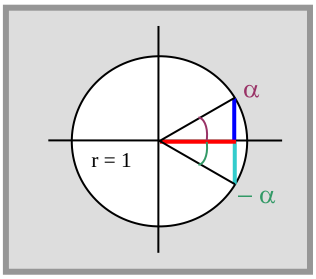
Considerem dos angles α i β ***oposats***, és a dir, **β = – α**. Aleshores:

sin(–α) = – sin α

cos(–α) = cos α

tg(–α) = – tg α





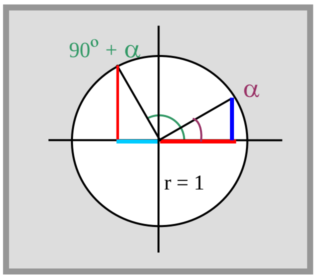
13 Obtén tots els angles α entre 0º i 360º que verifiquen:

(A) sin α = 0.5	(B) sin α = –0.5	(C) sin α = 0	(D) sin α = –1
(E) cos α = 0.5	(F) cos α = –0.5	(G) tg α = 0	(H) cotg α = –1
(I) tg α = 0.5	(J) tg α = –0.5	(K) tg α = 1	(L) tg α = –1
(M) sin α = 0.2	(N) cos α = –0.8	(Ñ) tg α = 3	(O) cotg α = –3

(E) Raons trigonomètriques d'angles que es diferencien en 90º

Considerem dos angles α i β que difereixen en 90º: $\boldsymbol{\beta - \alpha = 90^o}$, és a dir, $\boldsymbol{\beta = 90^o + \alpha}$.

$$\mathbf{sin}(90^o + \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}(90^o + \alpha) = -\,\mathbf{sin}\,\alpha$$
$$\mathbf{tg}(90^o + \alpha) = -\mathbf{cotg}\,\alpha$$



Els angles 40º i 130º **es diferencien en 90º**, perquè 130º – 40º = 90º $\rightarrow$ 130º = 90º + 40º

Aleshores: sin 130º = cos 40º cos 130º = – sin 40º tg 130º = –cotg 40º

(F) Raons trigonomètriques d'angles equivalents

Ja vam veure que β és un ***angle equivalent*** a α si difereix d'ell en qualsevol nombre exacte de voltes completes:

$$\beta - \alpha = k \cdot 360^o \quad \text{(k és el nombre de voltes)} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \alpha + k \cdot 360^o$$

És immediat que es verifica:

Dos angles equivalents tenen les mateixes raons trigonomètriques:

$$\mathbf{sin}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{sin}\,\alpha \qquad \mathbf{cos}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{cos}\,\alpha \qquad \mathbf{tg}(\alpha + \mathbf{k} \cdot 360^o) = \mathbf{tg}\,\alpha$$

Les raons trigonomètriques dels angles 390º i 1830º són idèntiques perquè són angles equivalents a 30º:

390º = 30º + 360º $\rightarrow$ sin 390º = sin 30º cos 390º = cos 30º tg 390º = tg 30º

1830º = 30º + 5 · 360º $\rightarrow$ sin 1830º = sin 30º cos 1830º = cos 30º tg 1830º = tg 30º

Exemple 7

Quins angles entre 0º i 360º tenen per sinus el valor –0.6?

El sinus és negatiu en angles del tercer i quart quadrants.

La calculadora ens proporciona l'angle negatiu α = –36.87,

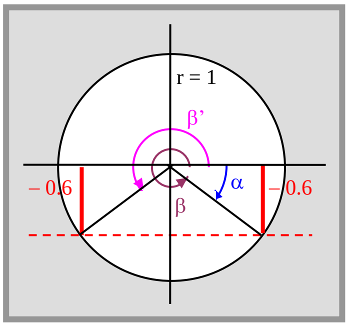
(veurem en el seu dia per què ens dóna aquest angle negatiu).

Aquest angle és equivalent a l'angle positiu:

$$\boldsymbol{\beta = 360^o + \alpha = 360^o - 36.87^o = 323.13^o}$$

L'angle del tercer quadrant l'obtenim per simetria:

$$\boldsymbol{\beta' = 180^o + 36.87^o = 216.87^o}$$



14 Calcula el sinus, el cosinus i la tangent de 165º i de 255º sabent que sin 75º = 0.966.

15 Calcula tots els angles entre 0º i 720º que verifiquen l'equació sin α = –0.5.

Exemple 8

- Quins són tots els angles el sinus dels quals val 0.75?

La calculadora ens proporciona l'angle $\alpha \simeq 48.6^\circ$, però també és solució, com veiem en la primera figura, el suplementari de α: $\beta = 180^\circ - \alpha \simeq 180^\circ - 48.6^\circ = 131.4^\circ$.

Qualsevol angle equivalent als anteriors (sumant voltes) és també solució. A continuació tenim la solució general, i en la taula tots els angles obtinguts donant valors al **nombre de voltes k**.

$$\{48.6^\circ + k\cdot 360^\circ,\ \beta = 131.4^\circ + k\cdot 360^\circ, \text{ amb } k\in\mathbb{Z}\}$$

k	...	–2	–1	0	1	2	...
α	...	–588.6º	–228.6º	**48.6º**	408.6º	768.6º	...
β	...	–671.4º	–311.4º	**131.4º**	491.4º	851.4º	...

- Quins són tots els angles que verifiquen $\cos\alpha = 0.75$?

La calculadora ens proporciona l'angle $\alpha \simeq 41.4^\circ$, i com veiem en la segona figura, també és solució l'angle $\beta = 360^\circ - \alpha \simeq 360^\circ - 41.4^\circ = 318.6^\circ$. La solució general és:

$$\{41.4^\circ + k\cdot 360^\circ,\ \beta = 318.6^\circ + k\cdot 360^\circ, \text{ amb } k\in\mathbb{Z}\}$$

- Quins són els 2 angles més pròxims a 2005º que verifiquen l'equació $\text{tg}^2\alpha = 1$?

$$\text{tg}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}\,\alpha = 1 \quad \text{o} \quad \text{tg}\,\alpha = -1$$

La calculadora ens proporciona l'angle 45º per a la primera equació, i –45º per a la segona; no obstant això, tenim 2 angles vàlids per a cada equació en la primera volta, com veiem en la tercera figura:

45º   135º   225º   315º

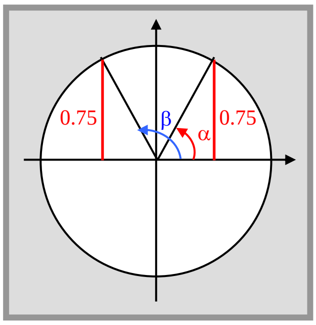
La solució general és:

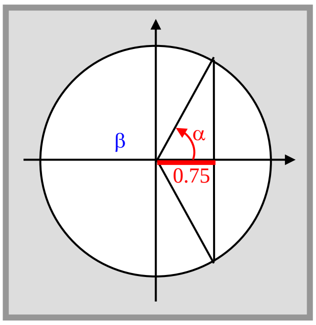
$$\{45^\circ + k\cdot 360^\circ,\ 135^\circ + k\cdot 360^\circ,\ 225^\circ + k\cdot 360^\circ,\ 315^\circ + k\cdot 360^\circ, \text{ amb } k\in\mathbb{Z}\}$$

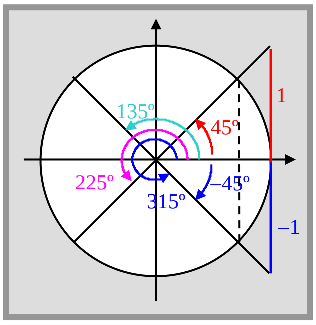
Com que $2005^\circ = 205^\circ + 5\cdot 360^\circ$, aleshores és un angle de la 5a volta ($k = 5$). Les solucions de l'equació $\text{tg}^2\alpha = 1$, que són de la 5a volta, són:

$45^\circ + 5\cdot 360^\circ = 1845^\circ$ $135^\circ + 5\cdot 360^\circ = 1935^\circ$ $225^\circ + 5\cdot 360^\circ = 2025^\circ$ $315^\circ + 5\cdot 360^\circ = 2115^\circ$

i d'elles, les més pròximes a 2005º són **1935º** i **2025º**.







16 Obtén tots els angles que són solució de les següents equacions trigonomètriques:
(A) $\sin\alpha = 0.25$ (B) $\cos\alpha = -0.8$ (C) $\text{tg}\,\alpha = 5$ (D) $\text{tg}\,\alpha = -10$
(E) $\sin 10\alpha = 0.25$ (F) $\cos 10\alpha = -0.8$ (G) $\text{tg}\,10\alpha = 5$ (H) $\text{tg}\,10\alpha = -10$

17 Calcula els angles entre 1000º i 2000º que són solució de les equacions:
(A) $\sin\alpha = 3\cos\alpha$ (B) $\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$

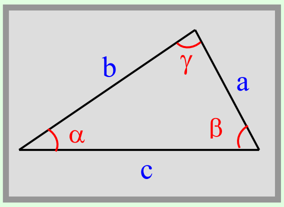
2.6 Resolució de triangles qualssevol

A continuació estudiem dos teoremes, ***teorema del sinus*** i ***teorema del cosinus***, que ens permetran resoldre problemes plantejats amb l'ajuda de triangles no rectangles. Coneguts tres dades, entre costats i angles, a excepció del cas en què només coneixem els tres angles, obtindrem els restants costats i angles.

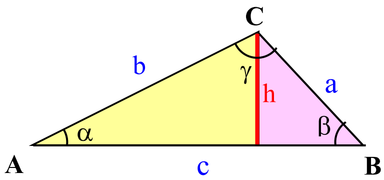
➢ Teorema del sinus

Les longituds **a**, **b** i **c** dels costats de qualsevol triangle són proporcionals als sinus dels seus angles oposats **α**, **β** i **γ**:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin\alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\sin\beta} = \frac{\mathbf{c}}{\sin\gamma}$$



Demostrem la primera igualtat. Tracem l'altura h relativa al costat de mesura c que pot ser interior o exterior al triangle:



En el triangle rectangle groc tenim $\sin\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\sin\alpha$

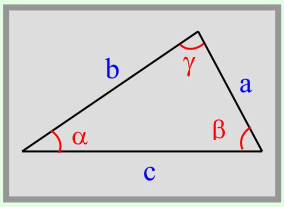
En el triangle rectangle violeta $\sin\beta = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\sin\beta$

Per igualació: $b\sin\alpha = a\sin\beta \rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

➢ Teorema del cosinus

Si anomenem **a**, **b** i **c** a les longituds dels costats de qualsevol triangle i **α**, **β** i **γ** a les mesures dels seus angles oposats, es verifica:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

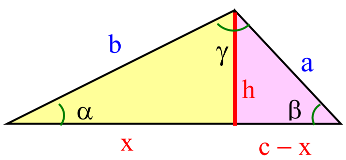


Demostrem la primera igualtat. Anomenem h a la longitud de l'altura del triangle de la figura. Aquesta altura divideix el nostre triangle en dos triangles rectangles amb bases de longituds x i c – x.

El teorema de Pitàgores permet expressar:

En el triangle violeta: $a^2 = h^2 + (c-x)^2$ (1)

En el triangle groc: $b^2 = h^2 + x^2$ (2)



Aïllem h^2 en (2): $h^2 = b^2 - x^2$

i substituïm en (1): $a^2 = b^2 - x^2 + (c-x)^2 \rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$

Aleshores, obtenim $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (3)

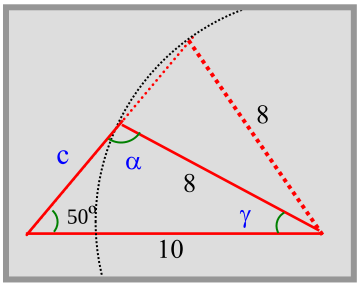
Però en el triangle groc es verifica $\cos\alpha = \frac{x}{b} \rightarrow x = b\cos\alpha$

i substituint l'expressió anterior en (3): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Exemple 9

Quines són les mesures dels costats i angles desconeguts del triangle del dibuix?

Les longituds 8 i 10 són proporcionals als sinus dels seus angles oposats:



$$\frac{8}{\sin 50^\circ} = \frac{10}{\sin\alpha} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{10\cdot\sin 50^\circ}{8} \simeq 0.957$$

La calculadora dóna un angle del primer quadrant però també és vàlid el suplementari: $\alpha = 73.25^\circ$ i $180^\circ - \alpha = 106.75^\circ$.

Les dues possibles solucions de $\mathbf{\sin\alpha = 0.957}$ proporcionen solucions distintes:

(A) Si $\alpha = 73.25^\circ \quad \rightarrow \quad \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 73.25^\circ \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma = 56.75^\circ}$

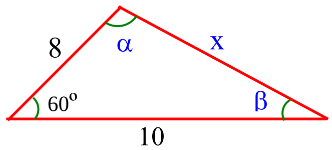
$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{8}{\sin 50^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{8\cdot\sin 56.75^\circ}{\sin 50^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c \simeq 8.73}$$

(B) Si $\alpha = 106.75^\circ \quad \rightarrow \quad \gamma = 180^\circ - 50^\circ - 106.75^\circ \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma = 23.25^\circ}$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{8}{\sin 50^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{8\cdot\sin 23.25^\circ}{\sin 50^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c \simeq 4.12}$$

Exemple 10

Quines són les mesures dels costats i angles desconeguts del triangle següent?



Quan coneixem dos costats i l'angle que constitueixen, el teorema del cosinus permet calcular l'altre costat:

$$x^2 = 10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cos 60^\circ \quad \rightarrow \quad x^2 = 84 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = \sqrt{84}}$$

Coneguts ja els 3 costats, només podem obtenir una solució vàlida per als angles. També amb el teorema del cosinus (si bé ara podríem utilitzar el teorema del sinus), obtenim:

$$10^2 = 8^2 + \left(\sqrt{84}\right)^2 - 2\cdot 8\cdot\sqrt{84}\,\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{48}{16\sqrt{84}} \simeq 0.3273 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 70.89^\circ}$$

i com que $\alpha + \beta + 60^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \beta = 180^\circ - 60^\circ - 70.89 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 49.1^\circ}$

18 Calcula les restants mesures dels costats i angles d'un triangle amb $a = 15$, $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 80^\circ$.

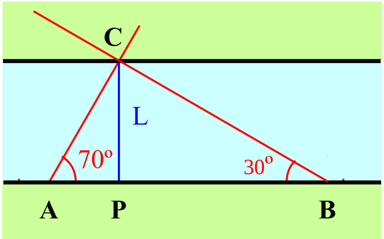
19 Calcula els restants costats i angles d'un triangle habitual amb

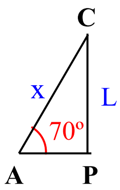
(A) $a = 30$ m, $b = 20$ m, $\gamma = 60^\circ$. (B) $b = 50$ m, $c = 30$ m, $\alpha = 50^\circ$.

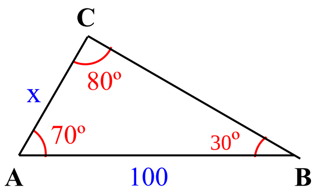
20 Comprova si un triangle pot tenir les següents mesures: $a = 45$ m, $b = 30$ m, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 70^\circ$.

Exemple 11

Un riu té les dues vores paral·leles. Des de dos punts A i B d'una vora, distants entre si 100 metres, observem un punt C de la vora oposada amb visuals que formen, amb la direcció que determinen A i B, uns angles de 70º i 30º respectivament. Quina és l'amplària del riu? (***Distància a un punt inaccessible***).







Ja vam resoldre l’exercici (exemple 13, capítol 1) amb un sistema d'equacions; ara amb el teorema del sinus.

En primer lloc calculem la longitud x del triangle ABC amb el **teorema del sinus:**

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{\sin 30^\circ}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{\sin 80^\circ}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{100 \sin 30^\circ}{\sin 80^\circ} = 50.77$$

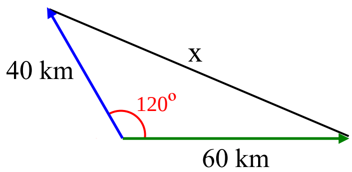
En el triangle rectangle APC calculem la longitud demanada:

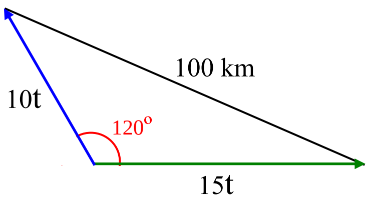
$$\sin 70^\circ = \frac{\text{long. catet oposat}}{\text{long. hipotenusa}} = \frac{L}{x} \quad \rightarrow \quad L = x \cdot \sin 70^\circ = \frac{100 \sin 30^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} \simeq \mathbf{47.70\ metres}$$

Exemple 12

Dos vaixells A i B ixen d'un port al mateix temps, amb trajectòries rectilínies que formen un angle de 120º. La velocitat de A és de 10 km/h i la de B 15 km/h.

(A) Quina distància els separarà després de 4 hores? (B) Quan es trobaran a 100 km de distància?





(A) En 4 hores recorren $4 \cdot 10 = 40$ km i $4 \cdot 15 = 60$ km respectivament. Pel **teorema del cosinus**:

$$x^2 = 40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 120^\circ \quad \rightarrow \quad x^2 = 7600 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \simeq 87.18\ km}$$

(B) Anomenem t al temps que tardaran en distar 100 km. Els vaixells hauran recorregut 10t i 15t km:

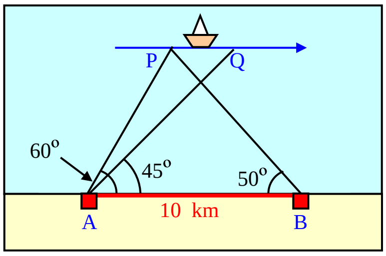
$$(100)^2 = (10t)^2 + (15t)^2 - 2 \cdot 10t \cdot 15t \cos 120^\circ \quad \rightarrow \quad 10\,000 = 100t^2 + 225t^2 + 150t^2$$

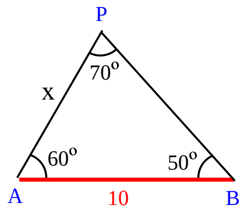
$$475t^2 = 10\,000 \quad \rightarrow \quad t^2 = \frac{10\,000}{475} \quad \rightarrow \quad \mathbf{t \simeq 4.59\ hores}$$

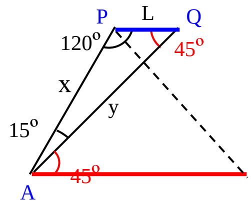
21 Des d'un helicòpter a 3000 m d'altitud observem el pic d'una muntanya, de 1500 m d’altitud, amb un angle, respecte de l'horitzontal, de 30º. Si ens desplacem en direcció del pic durant 2 minuts (sense variar la nostra altitud) el veurem amb un angle, també respecte de l’horitzontal, de 60º. Troba la velocitat de l'helicòpter i el temps que tardarem a sobrevolar el pic.

Exemple 13

Un vaixell navega **paral·lelament** a la vora rectilínia d'una platja on disposem de dos observatoris A i B separats entre si 10 km. En un moment donat, la visual dirigida al vaixell des de A forma un angle de 60º amb la vora (recta AB) i des de B un angle de 50º. Transcorreguts 10 minuts, la visual des de A forma un angle de 45º. Calculem la distància recorreguda pel vaixell en aquests 10 minuts







Anomenem P a la posició inicial del vaixell. En el triangle ABP apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{x}{\sin 50^\circ} = \frac{10}{\sin 70^\circ} \quad \rightarrow \quad x = \frac{10 \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x \simeq 8.15\ km}\ \text{(distància inicial de A al vaixell)}$$

Anomenem Q a la posició final del vaixell. En el triangle APQ apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{y}{\sin 120^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \quad \rightarrow \quad y = \frac{x \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y \simeq 9.98\ km}\ \text{(distància final de A al vaixell)}$$

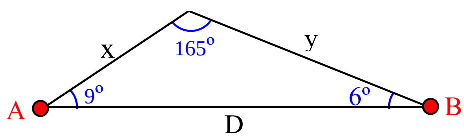
També en el triangle APQ: $\frac{L}{\sin 15^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \quad \rightarrow \quad L = \frac{x \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L \simeq 2.98\ km}$

Exemple 14

Dues ciutats A i B es troben a igual altitud a una distància de 5 km, però la carretera rectilínia que les uneix puja en primer lloc amb una inclinació de 9º per a baixar posteriorment amb una inclinació de 6º. Calculem la distància entre les ciutats, en línia recta.

En el triangle de la figura coneixem els tres angles, i a més que x + y = 5. Per a calcular x o y plantegem un sistema d'equacions amb ajuda del teorema del sinus:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ \dfrac{x}{\sin 6^\circ} = \dfrac{y}{\sin 9^\circ} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x \sin 9^\circ}{\sin 6^\circ}$$



Substituïm l'expressió de y en la primera equació:

$$x + \frac{x \sin 9^\circ}{\sin 6^\circ} = 5 \quad \rightarrow \quad x \sin 6^\circ + x \sin 9^\circ = 5 \sin 6^\circ \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \sin 6^\circ}{\sin 6^\circ + \sin 9^\circ}$$

La distància D és $\frac{D}{\sin 165^\circ} = \frac{x}{\sin 6^\circ} \quad \rightarrow \quad D = \frac{x \sin 165^\circ}{\sin 6^\circ} = \frac{5 \sin 6^\circ}{\sin 6^\circ + \sin 9^\circ} \frac{\sin 165^\circ}{\sin 6^\circ} \simeq \mathbf{4.958\ km}$

22 Si el vaixell de l'exemple 13 no navega paral·lelament a la vora es requereix conèixer l'angle PBQ = 25º (visual des de B fins les dues posicions del vaixell). Calcula el valor de la nova distància recorreguda.

23 Un vehicle A està estacionat en una carretera rectilínia, i altres dos vehicles B i C estan estacionats en una autopista paral·lela a la primera, distants entre si 10 Km. L'angle que forma la línia BA amb la direcció de l'autopista és de 20º, mentre que l'angle que forma la línia CA amb la mateixa direcció és de 40º. Calcula:
(A) La distància de A a B. (B) La distància de A a C. (C) La distància entre les dues carreteres.

2.7 Raons trigonomètriques de la suma i la diferència

Si coneixem les raons trigonomètriques de dos angles α i β podem calcular les de $\alpha + \beta$ i $\alpha - \beta$:

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

(3) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

(4) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

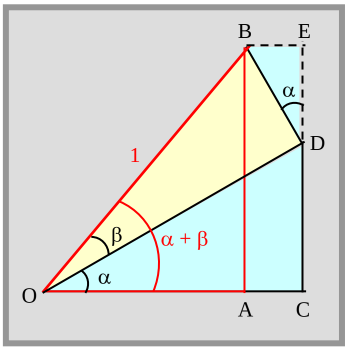
(5) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

(6) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

Demostrem (1). Construïm la figura següent amb la condició que OB = 1.

Aleshores, com que OB és la hipotenusa del triangle OAB tenim que:

$$\sin(\alpha + \beta) = AB = CD + DE \qquad \textbf{(A)}$$



$$\left.\begin{array}{l} \triangle OCD:\ \sin\alpha = \dfrac{CD}{OD} \ \rightarrow\ CD = OD\sin\alpha \\ \triangle OBD:\ (OB = 1) \qquad\qquad OD = \cos\beta \end{array}\right\} \rightarrow CD = \sin\alpha\cos\beta \quad \textbf{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BDE:\ \cos\alpha = \dfrac{DE}{BD} \ \rightarrow\ DE = BD\cos\alpha \\ \triangle OBD:\ (OB = 1) \qquad\qquad BD = \sin\beta \end{array}\right\} \rightarrow DE = \cos\alpha\sin\beta \quad \textbf{(C)}$$

I si substituïm les expressions (B) i (C) en (A) obtenim:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Exemple 15

Si sabem que $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ i $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, sent aquests dos angles del primer quadrant, calculem el valor exacte de $\sin(\alpha - \beta)$. Què es dedueix del resultat?

Si $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \ \rightarrow\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Si $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \ \rightarrow\ \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Aleshores: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \alpha - \beta = 45^\circ}$$

24 Calcula el valor exacte de les raons trigonomètriques de 75º i de 15º, conegudes les de 30º i 45º.

25 Si $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ i $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, sent els dos angles del primer quadrant, demostra que $\alpha + \beta = 45^\circ$.

26 Demostra la següent identitat trigonomètrica: $\sin(\alpha + 30^\circ) + \cos(\alpha + 60^\circ) = \cos\alpha$.

27 Si α i β són angles del primer quadrant, $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 3$ i $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$, calcula el valor de α.

2.8 Raons trigonomètriques de l'angle doble i meitat

(1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ **(2)** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ **(3)** $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

(4) $\sin\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ **(5)** $\cos\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ **(6)** $\operatorname{tg}\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Les expressions per a les raons trigonomètriques de l'angle doble s'obtenen a partir de les de la suma de dos angles. Per exemple, vegem la del sinus:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Per a les de l'angle meitat, considerem les expressions

$$\left.\begin{array}{ll} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \text{(A)} \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x & \text{(B)} \end{array}\right\}$$

Calculant (A) + (B): $2\cos^2 x = 1+\cos 2x \rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ (1)

i calculant (A) – (B): $2\sin^2 x = 1-\cos 2x \rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ (2)

Si en (1) i (2) anomenem $x = \alpha/2$ i per tant, $2x = \alpha$, obtenim les fórmules de l'angle meitat:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad \boldsymbol{\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

El doble signe de les arrels significa que el signe correcte dependrà del quadrant a què pertanga l'angle $\alpha/2$.

Exemple 16

Si $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, i α és un angle del segon quadrant, calculem els valors exactes de:

(A) $\sin 2\alpha$ (B) $\cos 2\alpha$ (C) $\operatorname{tg}\alpha/2$

Com que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \rightarrow \cos^2\alpha = 1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$

perquè en el segon quadrant $\cos\alpha$ és negatiu. Aleshores:

(A) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$ (B) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$

(C) Com que α és un angle del segon quadrant, aleshores $\alpha/2$ és del primer quadrant i $\operatorname{tg}\alpha/2$ és positiu:

$$\operatorname{tg}\alpha/2 = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-(-4/5)}{1+(-4/5)}} = \sqrt{9} = 3$$

28 Calcula les raons trigonomètriques de 15º a partir de les de 30º.

29 Si $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula els valors de les raons trigonomètriques de α, 2α, 3α i 4α.

30 Si $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula el valor exacte de $\operatorname{tg}2\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha/2$.

31 Demostra que: (A) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. (B) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

32 Dedueix relacions per a les raons trigonomètriques de $45^\circ + \alpha$ i de $45^\circ - \alpha$ en funció de les de α.

2.9 Suma i diferència de sinus i cosinus

(1) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(2) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

(3) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

(4) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Demostrem la primera d'elles. Utilitzem les expressions del sinus de la suma i diferència de dos angles que sumem membre a membre:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\quad(1)$$

Si anomenem

$$p=\alpha+\beta\qquad i\qquad q=\alpha-\beta\qquad(2)$$

deduïm que

$$\alpha=\frac{p+q}{2}\qquad i\qquad \beta=\frac{p-q}{2}\qquad(3)$$

Substituint (2) i (3) en (1):

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Exemple 17

Obtenim els valors de x entre 0º i 360º que verifiquen l’equació trigonomètrica:

$$\mathbf{\sin x+\sin 3x=\cos x}$$

Per a això, transformem la suma sinx + sin3x en un producte, amb la fórmula (1):

$$\sin x+\sin 3x=2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=2\sin 2x\cos(-x)=2\sin 2x\cos x$$

L’últim pas, perquè $\cos(-x)=\cos x$. L’equació a resoldre es transforma en:

$$\mathbf{\sin x+\sin 3x=\cos x}\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=\cos x\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x-\cos x=0\Leftrightarrow \mathbf{\cos x\,(2\sin 2x-1)=0}$$

Com que el producte de dos factors és 0 només si algun dels dos factors és 0, la última equació equivalent es resol així:

$$\mathbf{\cos x\,(2\sin 2x-1)=0}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\ \rightarrow\ x=90^\circ+k\cdot180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}2x=30^\circ+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}\ \rightarrow\ x=15^\circ+k\cdot180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=150^\circ+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}\ \rightarrow\ x=75^\circ+k\cdot180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{cases}$$

Les solucions entre 0º i 360º són:

15º, 75º, 90º, 105º, 255º, 270º

33 Resol l'equació $\cos x+\cos 3x=0$.

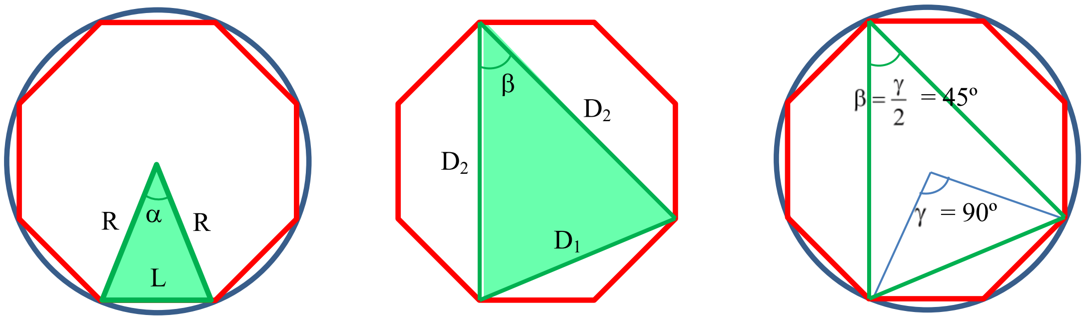
34 Calcula el valor de $\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)$ en funció de $\sin\alpha$.

35 Demostra les relacions trigonomètriques: $\mathrm{tg}\,p+\mathrm{tg}\,q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\ \cos q}$ i $\mathrm{tg}\,p-\mathrm{tg}\,q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\ \cos q}$.

2.10 La proporció cordovesa

Exemple 18

Donada una circumferència de radi R, calculem la longitud L del costat de l'octògon regular inscrit en ella.



El triangle isòsceles amb base un costat de l'octògon i vèrtex al centre de la circumferència té l'angle desigual de $\alpha = 360º/8 = 45º$.

Utilitzant el teorema del cosinus obtenim la longitud L del costat de l'octògon:

$$L^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45º = 2R^2 - 2R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = R^2\left(2 - \sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

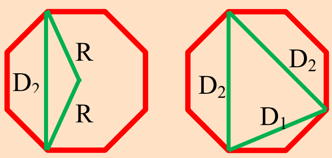
El quocient entre el radi R de la circumferència i el costat L l'octògon $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}} \simeq \mathbf{1.30656}$ és una proporció constant, coneguda com ***la proporció cordovesa***, estudiada per l'arquitecte Rafael de La Hoz, trobada entre les raons de les dimensions de la Mesquita de Còrdova i altres dissenys àrabs andalusos. També s'observa en altres construccions com les piràmides de Teotihuacan (Mèxic) i en les proporcions humanes de mosaics i escultures romanes trobades en Alcolea (Còrdova).

Anomenem ***triangle cordovès*** a qualsevol triangle isòsceles els costats del qual estan en proporció cordovesa. Veiem que el triangle isòsceles del segon dibuix, construït amb 3 diagonals de l'octògon, és semblant al triangle del primer octògon.

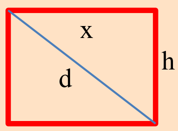
Com els angles γ i β del tercer dibuix abracen el mateix arc de circumferència, sent γ central i β inscrit, es verifica que $\boldsymbol{\beta = \gamma/2}$, i com $\gamma = 2\alpha = 90º$ al abraçar dos costats de l'octògon, resulta que $\boldsymbol{\beta = 45º = \alpha}$. Per tant els dos triangles són semblants i la proporció entre els seus costats és la mateixa, la proporció cordovesa:

$$\frac{\mathbf{D_2}}{\mathbf{D_1}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}}$$

36 Calcula les diagonals D_2 i D_1 de l'exemple anterior a partir del següent dibuix i comprova que verifiquen la proporció cordovesa.

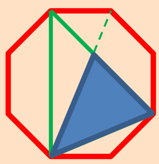


37 Un ***rectangle cordovès*** és aquell els costats del qual mantenen la proporció cordovesa. Calcula, en funció de la base x, l'altura h i la diagonal d del rectangle cordovès del dibuix.



38 Utilitzant el teorema del cosinus, comprova que tot triangle isòsceles amb angle desigual de 45º és cordovès.

39 Comprova que el triangle de la figura de la dreta és també un triangle cordovès.



Problemes del capítol 2

1 Si α és un angle del quart quadrant i $\cos\alpha = 3/4$ calcula les restants raons trigonomètriques d'aquest angle.

2 Si α és un angle del tercer quadrant i $tg\alpha = 4/3$ calcula les restants raons trigonomètriques d'aquest angle.

3 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\alpha = 2/3$ calcula el valor exacte de $\cos\alpha$ i $tg\alpha$.

4 Si α és un angle del quart quadrant i $tg\alpha = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ calcula el valor exacte de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

5 Si α és un angle del segon quadrant i $\cos\alpha = -1/3$ calcula el valor exacte de $\sin\alpha$ i $tg\alpha$.

6 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ calcula el valor exacte de $\cos\alpha$ i $tg\alpha$.

7 Si α és un angle del tercer quadrant i $tg\alpha = \sqrt{8}$ calcula el valor exacte de $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$.

8 Si α és un angle del segon quadrant i $tg\alpha = -\sqrt{2}$, calcula el valor exacte de:
(A) $\sin\alpha$ (B) $\cos\alpha$ (C) $cotg\alpha$ (D) $\sec\alpha$ (E) $cosec\alpha$

9 Si α és un angle del primer quadrant i $\cos\alpha = 2/3$ calcula el valor exacte de:
(A) $\cos(\pi + \alpha)$ (B) $\cos(\pi - \alpha)$ (C) $\cos(90^o - \alpha)$ (D) $\cos(360^o - \alpha)$
(E) $\cos(-\alpha)$ (F) $\cos(360^o + \alpha)$ (G) $\cos(90^o + \alpha)$ (H) $ctg(270^o + \alpha)$

10 Si α és un angle del tercer quadrant i $\sin\alpha = -1/3$ calcula el valor exacte de:
(A) $\sin(\pi + \alpha)$ (B) $\sin(\pi - \alpha)$ (C) $\sin(90^o - \alpha)$ (D) $\sin(360^o - \alpha)$
(E) $\sin(-\alpha)$ (F) $\sin(360^o + \alpha)$ (G) $\sin(90^o + \alpha)$ (H) $\sin(270^o + \alpha)$

11 Si α és un angle del tercer quadrant $tg\alpha = \sqrt{8}$ calcula el valor exacte de
(A) $tg(\pi + \alpha)$ (B) $tg(\pi - \alpha)$ (C) $tg(90^o - \alpha)$ (D) $tg(360^o - \alpha)$
(E) $tg(-\alpha)$ (F) $tg(360^o + \alpha)$ (G) $tg(90^o + \alpha)$ (H) $tg(270^o + \alpha)$

12 Expressa amb un angle del primer quadrant les següents raons trigonomètriques:
(A) $\sin 250^o$ (B) $\cos 320^o$ (C) $tg 250^o$ (D) $\sin(-200^o)$ (E) $\cos(-290^o)$
(F) $tg(-160^o)$ (G) $\sin 105^o$ (H) $\cos 170^o$ (I) $tg 340^o$ (J) $\sin 1250^o$
(K) $tg(-500^o)$ (L) $\sin 845^o$ (M) $\cos 870^o$ (N) $tg 1000^o$ (Ñ) $\sin 630^o$
(O) $\cos(-600^o)$ (P) $tg 1580^o$ (Q) $\sin(-450^o)$ (R) $\cos 1800^o$ (S) $tg 10000^o$

13 Resol les següents equacions trigonomètriques:
(A) $\sin x = -1/2$ (B) $\cos x = -1/2$ (C) $tg\, x = -1$
(D) $\sin 2x = -1/2$ (I) $\cos 2x = -1/2$ (F) $tg\, 2x = -1$
(G) $\sin 3x = -1/2$ (H) $\cos 3x = -1/2$ (I) $tg\, 3x = -1$
(J) $\sin x/2 = -1/2$ (K) $\cos x/2 = -1/2$ (L) $tg\, x/2 = -1$

14 Calcula el perímetre i l'àrea dels següents polígons regulars inscrits en una circumferència de radi R.
(A) Un triangle (B) Un quadrat (C) Un hexàgon

15 Calcula el perímetre i l'àrea dels següents polígons regulars circumscrits a una circumferència de radi R.
(A) Un triangle (B) Un quadrat (C) Un hexàgon

16 Calcula les longituds dels costats i l'altura d'un triangle isòsceles d'angle desigual de 120º, circumscrit a una circumferència de radi R.

17 En un hexàgon regular de costat 1 metre es forma un altre hexàgon regular inscrit unint els punts mitjans dels costats del primer. Quant mesura el costat d'aquest hexàgon? I l'àrea?

18 Calcula l'àrea d'un octògon regular de 5 metres de costat.

19 Demostra que l'àrea d'un octògon regular inscrit en una circumferència de radi 1 m. és exactament de $2\sqrt{2}\ \text{m}^2$.

20 Demostra que l'àrea d'un dodecàgon regular inscrit en una circumferència de radi R és igual a $3R^2$.

21 Calcula la longitud de la diagonal d'un pentàgon regular de 3 metres de costat.

22 Calcula l'àrea d'un segment circular de 5 metres de radi i $\pi/5$ rd d'amplitud.

23 Si dues circumferències són tangents exteriors de 6 i 2 metres de radi, Calcula l'àrea del triangle que constitueixen les seues tangents exteriors comuns.

24 Calcula el radi d'una circumferència inscrita en un sector circular de 10 metres de radi i 60º d'amplitud.

25 Demostra que per a qualsevol triangle de costats a, b i c i angles oposats α, β i γ, es verifica que l'àrea és:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

26 Si un angle d'un triangle rectangle té la relació $\text{tg}\alpha = 4\ \text{ctg}\alpha$, quina relació tenen els catets entre si?

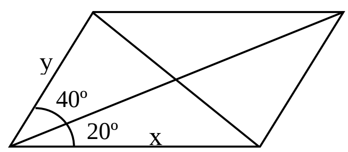
27 Sobre un segment AB de longitud 2a, agafat com a base, es construeixen tres triangles isòsceles ACB, AC'B i AC''B, d'altures a, 2a i 3a respectivament. Demostra que $C + C' + C'' = 180º$.

28 Calcula l'altura d'un pal clavat en un terreny horitzontal si sabem que els angles amb què es veu el pal des de dos punts A i B situats a esquerra i dreta del pal són, respectivament, de 75º i 60º, i la distància entre A i B és de 20 m.

29 Un vaixell es troba en un port P a 10 km de distància en línia recta d'un altre port Q. Si el vaixell segueix una trajectòria rectilínia que forma un angle de 30º amb la línia PQ:
(A) Calcula la distància a què es trobarà de Q després de recórrer 5 km.
(B) Calcula la distància que recorrerà per a trobar-se de nou a 10 km de Q.

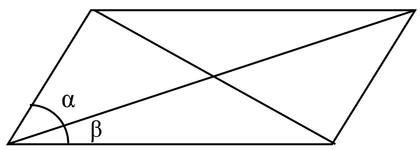
30 Dos vaixells ixen des d'un punt seguint trajectòries rectilínies que formen un angle de 60º. En un moment donat, la distància entre ells és de 70 km. Si un d'ells ha recorregut el triple de distància que l'altre, calcula a quina distància es trobarà cadascun del punt de partida.

31 Del paral·lelogram de la figura sabem que la seua major diagonal mesura 10 cm i forma amb els costats angles de 20º i 40º. Calcula:
(A) Les longituds x i y dels seus costats.
(B) La longitud de l'altra diagonal.
(C) L'àrea del paral·lelogram.



32 Dos punts d'observació A i B es troben a 15 km de distància sobre una carretera rectilínia. Des de A observem un punt P, situat al mateix pla vertical que A i B, de forma que l'angle PAB és de 50º. Des de B observem el mateix punt P, de forma que l'angle PBA és de 70º.
(A) Calcula la distància de P a A.
(B) Calcula la mínima distància de P a la carretera.

33 Del paral·lelogram de la figura sabem que la longitud de les diagonals major i menor és, respectivament, de 20 i 10 cm, i que el menor dels angles que formen entre si és de 40º. Calcula:
(A) Les longituds dels costats del paral·lelogram.
(B) Els angles α i β que formen amb la diagonal major els costats del paral·lelogram.



34 Els costats d'un triangle mesuren 5, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{10}$ cm. Calcula la seua àrea.

35 Demostra que l'àrea d'un triangle circumscrit a una circumferència de radi 1 cm és exactament de $3\sqrt{3}$ cm^2.

36 Un far es troba sobre un penya-segat que forma un angle de 55º amb la superfície del mar. Des d'un vaixell situat en el mar, a 400 metres de distància del penya-segat, mesurem l'angle que forma la visual al punt més baix del far amb la superfície del mar, que resulta ser de 35º, i l'angle amb què es veu el far, que és de 1º. Calcula l'alçada del far.

37 Dos mòbils A i B es troben a 22 km de distància i es desplacen sobre una superfície plana seguint trajectòries rectilínies diferents amb velocitats respectives de 6 i 8 km/h. Si a les 2.5 hores els dos mòbils coincideixen en un punt P:

(A) Calcula l'angle que formen les seues trajectòries en el punt P.

(B) Si desprès de trobar-se en P els mòbils continuen desplaçant-se sense modificar les seues trajectòries i velocitats, calcula el temps que ha de transcórrer perquè es troben a 50 Km, i la distància recorreguda per cadascun.

38 La teulada d'una casa té una inclinació de 30º per un costat i per l'altre 50º. Si l'amplària de la casa és de 10 metres, calcula l'altura que té el punt més alt de la teulada, respecte del sostre de la casa.

39 Una casa té una teulada asimètrica que té una longitud de 6 metres per un costat i de 4 metres per l'altre, sent l'angle d'inclinació de la teulada pel costat més curt doble que pel costat més llarg. Calcula l'amplària de la casa.

40 Calcula la longitud d'una pista d'esquí si té una inclinació de 50º i que si ens situem, en un pla horitzontal, a 250 m. de la base de la pista, l'angle que forma la línia dirigida al punt més alt de la pista amb l'horitzontal és de 20º.

41 D'un triangle ABC la base AB mesura 10 cm i l'altura que correspon a aquesta forma amb els altres costats AC i BC uns angles de 20º i 40º. Calcula les longituds d'aquests dos costats i de l'altura.

42 Dos mòbils estan situats en dos punts A i B a 110 km de distància, i es desplacen sobre una superfície plana seguint trajectòries rectilínies diferents i amb velocitats respectives de 15 i 20 km/h. Si a les 5 hores els dos mòbils coincideixen en un punt P:

(A) Calcula l'angle que formen les seues trajectòries en el punt P.

(B) Calcula els angles que formen les seues trajectòries amb la línia AB.

43 Anem per una carretera rectilínia. En el punt A parteix un camí recte que forma un angle de 30º amb la carretera respecte a la direcció de la marxa. Més endavant, en un altre punt B i a 5 km de A, parteix un altre camí recte que forma un angle de 50º amb la carretera en el sentit de la marxa. Aquests dos camins es tallen en un punt P.

(A) Calcula la distància de la carretera al punt P seguint cadascun dels dos camins.

(B) Calcula la distància mínima des de P a la carretera.

44 Des d'un punt P a la vora d'un riu observem un punt A en la vora oposada on hi ha un arbre l'altura del qual volem obtenir. És conegut com un problema d'***altura de peu inaccessible***. Des de la nostra posició inicial P, veiem l'arbre amb un angle d'inclinació de 2º respecte de l'horitzontal. A continuació ens desplacem 240 metres (no necessàriament seguint línies paral·leles a la vora del riu) fins una posició Q des d'on puguem veure l'arbre i la posició inicial P. Mesurem els angles APQ = 30º i AQP 131.92º. Calcula l'altura del arbre.

45 En el punt més alt d'una pista d'esquí de 250 m de longitud hi ha una casa de 10 m d'altura. En el punt més baix de la pista, un home veu la casa amb un angle de 1.79º. Calcula l'angle d'inclinació de la pista respecte de l'horitzontal.

46 Volem instal·lar dos panells solars de 5 metres de longitud, mirats de perfil, amb una inclinació de 30º respecte l'horitzontal.

(A) Calcula la mínima distància de separació entre els panells perquè el primer no faça ombra al segon, quan els raigs del Sol formen un angle de 50º amb el terra.

(B) Amb la distància obtinguda en l'apartat anterior, calcula la longitud de l'ombra sobre el segon panell que faran els raigs del Sol, quan estos formen un angle de 40º amb el terra.

47 Volem instal·lar dos panells solars de 4 metres de longitud, mirats de perfil, amb una inclinació de 60º amb l'horitzontal, separats una distància de 6 m. Calcula el menor angle que poden formar els raigs del Sol sense que el primer panell faça ombra al segon.

48 Volem instal·lar dos panells solars de 5 metres de longitud, mirats de perfil, amb una inclinació de 30º amb l'horitzontal, separats una distància de 4 m. Calcula l' angle que formaran els raigs del Sol amb el terra en el moment que el primer panell fa sobre el segon panell una ombra de 2.5 m.

49 Dos pals de 12 i 9 m. d'alçada estan separats per una distància de 15 m. Calcula els angles que els hem d'inclinar (respecte de l'horitzontal) perquè es toquen les seues parts superiors, i l'alçada respecte del terra a la qual es tocaran.

50 Dos punts A i B es troben a la vora d'un canal d'aigua, separats per una distància de 300m. En un punt P de l'altra vora hi ha un edifici, que suposem que no té amplària, com un pal. Des de A es veu tot l'edifici amb un angle de 15º. També des de A, les línies AP i AB formen un angle de 40º, i des de B, les línies BP i BA formen un angle de 60º.

(A) Calcula l'alçada de l'edifici.

(B) Calcula l'angle amb que es veu l'edifici des del punt B.

51 A la vora d'un riu canalitzat hi ha un edifici de 50 m d'altura. En front, a l'altra banda del canal, hi ha parat un tren. Des del principi del tren es veu l'edifici amb un angle d'elevació de 10º i des del final del tren amb un angle de 12º. Des de l'extrem superior de l'edifici es veu l'amplitud del tren amb un angle de 40º.

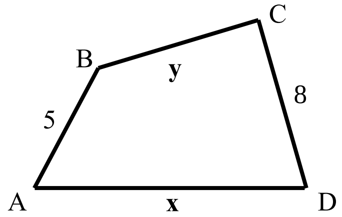
(A) Calcula la longitud del tren.

(B) Calcula l'angle amb que es veu el tren des de l'extrem inferior de l'edifici.

(C) Calcula la distància del tren a l'edifici.

52 Calcula les longituds **x** i **y** del trapezi ABCD de la figura, si coneixem les mesures dels angles següents:

Angle(BAD) = 70º (amb vèrtex en A).
Angle (CAD) = 40º (amb vèrtex en A).
Angle (ADC) = 80º (amb vèrtex en D).

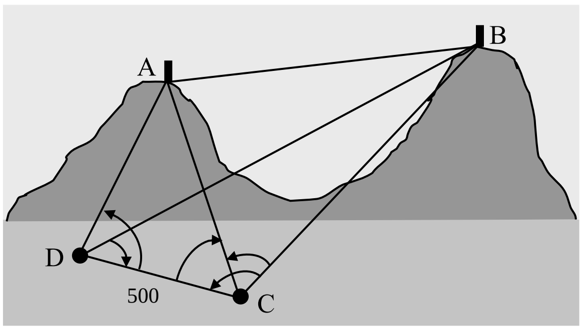


53 Dos fars A i B disten entre si 10 km. En el mar hi ha fondejats dos vaixells P i Q i volem saber la distància que hi ha entre ells. Per a això, prenem les següents mesures angulars:

Des de A: angle(PAQ) = 28º i angle(BAQ) = 35º.
Des de B: angle(PBQ) = 15º i angle(ABP) = 50º.

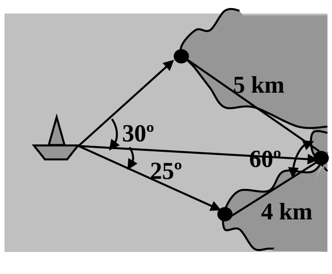
54 Calcula la distància entre els cims de dues muntanyes A i B, per a construir entre elles un telefèric, tenint les següents dades: des de dos punts C i D, situats lluny de les muntanyes, i distants entre si 500 metres, prenem les següents mesures angulars:

Des de C: ACB = 55º, ACD = 65º i BCD = 105º.
Des de D: ADC = 80º i BDC = 70º.



55 En el punt més alt de l'edifici d'un Ajuntament ondeja una bandera amb un pal vertical. Des del sòl observem els extrems superior i inferior del pal amb un angle d'inclinació, respecte de l'horitzontal de 56º i 52º respectivament. Si ens allunyem 20 m, en sentit oposat al de la visual del pal, observem l'extrem inferior del mateix baix un angle de 34º. Calcula l'altura del pal.

56 Des d'un vaixell es veuen 3 punts de terra A, B i C. Calcula la distància del vaixell a cadascun d'ells sabent que la distància (en línia recta) de A a B és de 5 km i la de B a C és de 4 km. Es coneixen els angles indicats en el dibuix.



57 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ calcula el valor exacte de:

(A) $\cos\alpha$ (B) $\sin2\alpha$ (C) $tg2\alpha$ (D) $\sin(\pi - \alpha)$

58 Si α és un angle del primer quadrant i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ calcula el valor exacte de:

(A) $\sin2\alpha$ (B) $\cos2\alpha$ (C) $\sin4\alpha$

59 Si α és un angle del segon quadrant i $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ calcula el valor exacte de:

(A) $\sin\alpha$ (B) $\sin2\alpha$ (C) $\sin3\alpha$

60 Si α és un angle del segon quadrant i $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ calcula el valor exacte de:

(A) $\sin\alpha$ (B) $\sin2\alpha$ (C) $\sin4\alpha$ (D) $\sin\alpha/2$

61 Si α és un angle del segon quadrant i $tg\alpha = -4/3$ calcula el valor exacte de:
(A) $\cos2\alpha$ (B) $\cos3\alpha$ (C) $\cos4\alpha$

62 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\alpha = 5/13$ calcula el valor exacte de:
(A) $tg\alpha$ (B) $tg\alpha/2$ (C) $tg2\alpha$ (D) $tg3\alpha$ (E) $tg4\alpha$

63 Si α és un angle del segon quadrant i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ calcula el valor exacte de:

(A) $tg\alpha$ (B) $tg(\alpha + 45^o)$ (C) $tg2\alpha$ (D) $tg3\alpha$

64 Si α i β són angles del primer quadrant, $\sin\alpha = 3/5$ i $\sin\beta = 5/13$ calcula el valor exacte de:
(A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C) $\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$ (E) $tg(\alpha + \beta)$ (F) $tg(\alpha - \beta)$

65 Si α i β són angles del primer quadrant, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ calcula el valor exacte de $\sin(\alpha + 2\beta)$. Què dedueixes d'aquest resultat?

66 Si α i β són angles del primer quadrant, $\cos\alpha = 1/8$ i $\cos\beta = 3/4$ calcula el valor exacte de $\cos(\alpha + \beta)$.

67 Si α i β són dos angles del primer quadrant:

(A) Si $tg\alpha = 2$ i $tg\beta = \frac{1}{3}$, demostra que $\alpha - \beta = 45^o$.

(B) Si $tg(\alpha + \beta) = 3$ i $tg\beta = \frac{1}{2}$, demostra que $\alpha = 45^o$.

68 Si α i β són dos angles del primer quadrant, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, calcula el valor exacte de $\sin(\alpha - \beta)$ i el valor de l'angle $(\alpha - \beta)$.

69 Si α i β són dos angles del primer quadrant, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, calcula el valor exacte de $\cos(\alpha - \beta)$ i el valor de l'angle $(\alpha - \beta)$.

70 Si sabem que $tg(\alpha + \beta) = -3$ i $tg(\alpha - \beta) = 1/3$, calcula el valor exacte de $tg\alpha$ i de $tg\beta$.

71 Demostra les següents igualtats:
(A) $tg75^o - tg60^o = 2$ (B) $tg60^o + tg15^o = 2$ (C) $tg75^o + tg15^o = 4$

72 Demostra que $\sin75^o - \sin15^o = \sin45^o$.

73 Si sabem que $tg\alpha = 2 + \sqrt{3}$ i $tg\beta = 2 - \sqrt{3}$, demostra que $\alpha - \beta = 60^o$.

74 Si sabem que $tg(\alpha + 45^o) = 2$, calcula el valor exacte de $tg\alpha$.

75 Demostra que si $\text{tg}\alpha = \sqrt{2} + 1$ i $\text{tg}\beta = \sqrt{2} - 1$ tenim que $\alpha + \beta = 90^\circ$ i $\alpha - \beta = 45^\circ$ i per tant $\alpha = 67.5^\circ$ i $\beta = 22.5^\circ$.

76 Demostra les següents identitats trigonomètriques:

(A) $\sin 2\alpha \cdot (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha) = 2$

(B) $\cos(\pi/3 - \alpha) + \cos(\pi/3 + \alpha) = \cos\alpha$

(C) $\cos(\pi/3 - \alpha) + \sin(\pi/6 - \alpha) = \cos\alpha$

(D) $\text{tg}(\alpha + 45^\circ) + \text{tg}(\alpha - 45^\circ) = 2\text{tg}2\alpha$

(E) $\left(\dfrac{1+\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}\alpha}\right)^2 = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$

(F) $\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$

(G) $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)} = 2\text{tg}2\alpha$

(H) $\text{tg}3\alpha = \dfrac{3\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$

77 Demostra les següents identitats trigonomètriques:

(A) $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2\sin 2x$

(B) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$

(C) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

(D) $\text{cotg}\, x = \dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

(E) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = 1+\text{tg}2\alpha$

(F) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

(G) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = 2\,\text{tg}2\alpha$

(H) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos 2\alpha}$

78 Demostra les següents identitats trigonomètriques:

(A) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

(B) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\beta - \cos\beta)^2 = \sin 2\alpha + \sin 2\beta$

79 Demostra les següents identitats trigonomètriques:

(A) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

(B) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(C) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(D) $\text{tg}\, x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x} = \dfrac{1}{\cos x}$

(E) $\dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x} + \dfrac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = 1$

(F) $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

(G) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \text{tg}\alpha$

(H) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)} = -\text{cotg}\alpha$

(I) $\dfrac{\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)} = \sqrt{3}$

(J) $\dfrac{\sin(\alpha+45^\circ)+\cos(\alpha+45^\circ)}{\sin(\alpha-45^\circ)+\cos(\alpha-45^\circ)} = \text{cotg}\alpha$

80 Demostra que:

(A) $\dfrac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 105^\circ + \cos 105^\circ} = \sqrt{3}$

(B) $\dfrac{\sin 105^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ} = \sqrt{3}$

(C) $\dfrac{\sin 105^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

81 Demostra que:

(A) $\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

(B) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta} = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

82 Obtén els angles entre 0º i 360º que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ (B) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (F) $tg\alpha = \sqrt{3}$ (G) $tg\alpha = -\sqrt{3}$ (H) $tg\alpha = 1$

(I) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (J) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (K) $tg\alpha = -1$ (L) $tg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

83 Obtén els angles entre 0º i 360º que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\cos\alpha = -0{,}1$ (B) $\sin\alpha = 2/3$ (C) $\cos\alpha = 0.8$ (D) $\sin\alpha = -0{,}8$

(E) $tg\alpha = 2$ (F) $tg\alpha = 100$ (G) $tg\alpha = 1000$ (H) $tg\alpha = -1000$

84 Donada l'equació $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

(A) Obtén els dos angles entre 0º i 360º que verifiquen l'equació.
(B) Obtén els dos angles més pròxims a 2000º que verifiquen l'equació.
(C) Expressa els anteriors quatre angles en radiants.

85 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\frac{6\cos x+5}{2} = 4$ (B) $\frac{3tgx-1}{2} = 1$ (C) $\frac{2}{3-2\sin x} = 1$ (D) $\frac{\sin x}{2-\sin x} = 1$

(E) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{3}$ (F) $\frac{3+2\cos x}{3-2\cos x} = \frac{1}{2}$ (G) $\frac{2+tgx}{2-tgx} = \frac{1}{3}$ (H) $\frac{1-\sqrt{3}tgx}{2+\sqrt{3}tgx} = -\frac{2}{5}$

86 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $3 - tg^2x = 0$ (B) $\frac{\cos x}{1+\cos x} = -1$ (C) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

87 Donada l'equació $\frac{3\cos x+4}{5\cos x+6} = \frac{5}{7}$:

(A) Obtén els dos angles entre 0º i 360º que verifiquen l'equació.
(B) Obtén l'angle més pròxim a 2012º que verifica l'equació.
(C) Expressa l'anterior angle en radiants.

88 Donada l'equació $\frac{2-3\cos^2 x}{1+2\cos^2 x} = \frac{5}{6}$, obtén tots les solucions i expressa-les en radiants.

89 Obtén tots els angles entre 0º i 360º que verifiquen l'equació $\cos 4x = \frac{1}{2}$.

90 Obtén tots els angles que verifiquen l'equació $\sin 5x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

91 Obtén tots els angles entre 0º i 1000º que verifiquen l'equació $\sin\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

92 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $tg^2x = 3tgx - 2$ (B) $\frac{2\cos x - 1}{3\cos x - 2} = \frac{4}{7}$ (C) $\frac{2tg^2x - 1}{2tg^2x + 1} = \frac{5}{7}$

93 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $2\sin^2\alpha + \sin\alpha = 0$ (B) $2\sin^2\alpha + \sin\alpha = 1$ (C) $tg^3x - 3tgx = 0$

94 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\sin 2x = \frac{3}{4}$ (B) $\cos 2x = \frac{1}{4}$ (C) $tg2x = 1$ (D) $3tg2x = 1$

(E) $2\sin^2x + 1 = 2$ (F) $2\cos^2x + \frac{1}{2} = 2$ (G) $\frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin^2 x + 3} = \frac{1}{2}$ (H) $\frac{3tg^2x - 1}{4tg^2x - 1} = \frac{5}{7}$

95 Obtén tots els angles que verifiquen les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\sin x \cdot \cos x = 0$ (B) $\sin x(2\cos x+1) = 0$ (C) $2\sin 2x = \sin x$

(D) $2\sin 2x - \sin x = 1$ (E) $2\cos 2x + \cos x = 1$ (F) $2\sin 2x + 3\sin x + 1 = 0$

(G) $2tg2x + tgx = 0$ (H) $2tg2x + tgx = 3$ (I) $\sin x = \cos x$

(J) $\sin x = 2\cos x$ (K) $\sin 2x = \cos 2x$ (L) $\sin 2x = 3\cos 2x$

(M) $1 + \sin 2x = \cos 2x$ (N) $tg2x + tgx = 0$ (Ñ) $\sin 2x + \sin x = \cos 2x$

(O) $1 + \sin x = 2\cos 2x$ (P) $\cos 2x - \sin 2x = 1$ (Q) $\cos^2x - 3\sin^2x = -1$

(R) $8\cos^2x + 12\sin^2x = 11$ (S) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

96 Obtén tots els angles entre 0º i 360º que verifiquen l'equació $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} = 8$.

97 Resol les següents equacions trigonomètriques:

(A) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ (B) $\sin x = \cos 2x$ (C) $\sin 2x = \cos x$

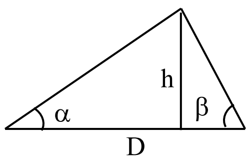
(D) $\sin 3x + \sin x = 0$ (E) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ (F) $tgx + tg2x = 0$

(G) $\cos 2x + \sin x = 4\sin^2x$ (H) $\sin 4x + \sin 2x = \sin 3x$ (I) $\sin x + \sin 3x = \sin 5x$

(J) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ (K) $tg2x + 2\sin x = 0$ (L) $2 - 3\sin x = \cos 2x$

98 Una màquina situada en el sòl produeix un raig làser que projecta un punt lluminós sobre una paret vertical. Calcula l'angle α que forma el raig làser amb el sòl, si sabem que si aquest angle fora el doble de gran, aleshores el punt lluminós es projectaria al triple d'altura en la paret.

99 En el triangle de la figura, demostra que $h = \frac{D\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.



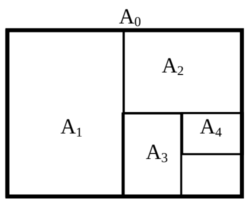
100 Els fulls rectangulars amb format DIN es construeixen amb les condicions:

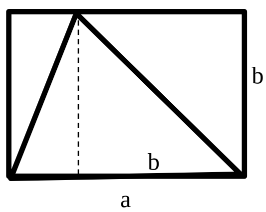
- El full més gran DIN A0 mesura 1 m^2.
- Les dimensions dels seus costats a i b (amb a > b) són tals que al dividir el full per la meitat les dimensions dels costats, b i a/2, del nou full DIN A1, són proporcionals a les del full DIN A0. Açò es pot repetir més vegades obtenint els fulls menors DIN A2, DIN A3, DIN A4....

(A) Calcula les dimensions a i b del full DIN A0.

(B) Dibuixa en el full DIN A0 el quadrat de costat b sobre un lateral i comprova que el triangle dibuixat a partir d'ell és un triangle cordovès.

(C) Calcula les dimensions del full DIN A4 i comprova també la propietat (B) del full DIN A0.





Solucions de les activitats del capítol 2

2.

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**	**180º**	**270º**
secα	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	No	–1	0
cosecα	No	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	No	–1
cotgα	No	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	No	0

4.

α	**sinα**	**cosα**	**tgα**	**cosecα**	**secα**	**cotgα**
AB	4/5	3/5	4/3	5/4	5/3	3/4
AC	4/5	–3/5	–4/3	5/4	–5/3	–3/4
AD	–4/5	–3/5	4/3	–5/4	–5/3	3/4
AE	–4/5	3/5	–4/3	–5/4	5/3	–3/4

5. cosα = $-\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, sinα = $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$, secα = $-\sqrt{26}$, cosecα = $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$, cotgα = $-\dfrac{1}{5}$. **6.** sinα = $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$, tgα = $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$, secα = $-\dfrac{5}{2}$, cosecα = $-\dfrac{5}{\sqrt{21}}$, cotgα = $\dfrac{2}{\sqrt{21}}$. **7.** cosα = $-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, tgα = $-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$, cosecα = 5, secα = $-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$, cotgα = $-2\sqrt{6}$. **8.** Pel seu signe.

12.

	45º	**135º**	**225º**	**315º**
sinα	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
cosα	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
tgα	1	–1	1	–1

	60º	**120º**	**240º**	**300º**
sinα	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
cosα	1/2	–1/2	–1/2	1/2
tgα	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

13. (A) 30º, 150º. (B) 210º, 330º. (C) 0º, 180º, 360º. (D) 270º. (E) 60º, 300º. (F) 120º, 240º. (G) 0º, 180º, 360º. (H) 135º, 315º. (I) 26.57º, 206.57º. (J) 153.44º, 333.44º. (K) 45º, 225º. (L) 135º, 315º. (M) 11.54º, 168.46º. (N) 143.13º, 216.87º. (Ñ) 71.57º, 251.57º. (O) 161.57º, 341.57º. **14.** sin165º = 0.259, cos165º = 0.966, tg165º = –0.267; sin255º = –0.966, cos255º = –0.259, tg255º = 3.736. **15.** 210º, 330º, 570º, 690º. **16.** (A) 14.48º + k·360º, 165.52º + k·360º. (B) 143.13º + k·360º, 216.87º + k·360º. (C) 78.69º + k·180º. (D) 95.71º + k·180º. (E) 1.45º + k·36º, 16.55º + k·36º. (F) 14.31º + k·36º, 21.69º + k·36º. (G) 7.87º + k·18º. (H) 9.57º + k·18º. **17.** (A) 1151.57º, 1331.57º, 1511.57º, 1691.57º, 1871.57º. (B) 1140º, 1200º, 1320º, 1380º, 1500º, 1560º, 1680º, 1740º, 1860º, 1920º. **18.** b = 29.54, c = 28.19, γ = 70º. **19.** (A) c = $10\sqrt{7}$, α = 79.11º o 100.89º, β = 40.89º o 19.11º. (B) a = 38.36, B = 93.2º, C=36.8º. **20.** No. **21.** 51.96 km/h, 1 minut. **22.** 3.89 km.
23. Cotxes a ambdós costats de A: (A) 7.42 km. (B) 3.95 km. (C) 2.54 km. Cotxes a un mateix costat de A: (A) 18.79 km. (B) 10 km. (C) 6.42 km. **24.** sin75º = $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cos75º = $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, tg75º = 2 + $\sqrt{3}$; sin15º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$, cos15º = $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$, tg15º = 2 – $\sqrt{3}$. **25.** tg(α + β) = 1. **27.** α = 45º.
28. sin15º = $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, cos15º = $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, tg15º = 2 – $\sqrt{3}$. **29.** cosα = $-\dfrac{12}{13}$, tgα = $-\dfrac{5}{12}$; sin2α = $-\dfrac{120}{169}$, cos2α = $\dfrac{119}{169}$, tg2α = $-\dfrac{120}{119}$; sin3α = $\dfrac{2035}{2197}$, cos3α = $-\dfrac{828}{2197}$, tg3α = $-\dfrac{2035}{828}$. **30.** tg2α = $\dfrac{24}{7}$, tgα/2 = –3.
32. sin(45º+α) = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)$ = cos(45º–α); cos(45º+α) = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)$ = sin(45º–α); tg(45º+α) = $\dfrac{1+\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}\alpha}$ = $\dfrac{1}{\text{tg}(45^\circ-\alpha)}$. **33.** x = $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, k$\in\mathbb{Z}$. **34.** –sin$\alpha$. **36.** D_2 = $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, D_1 = $R\sqrt{2}$.

37. h = $x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, d = $x\sqrt{3-\sqrt{2}}$. **38.** Si x és la mesura del costat desigual i y la mesura dels altres, pel teorema del cosinus, x = y $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **39.** Un angle esta inscrit i comprèn dos costats del octògon, per tant mesura 45º = 90º/2, i l’altre també esta inscrit però comprèn 3 costats del octògon i mesura 135º/2.

Solucions dels problemes del capítol 2

1. sinα = $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, tgα = $-\frac{\sqrt{7}}{3}$. **2.** sinα = $-\frac{4}{5}$, cosα = $-\frac{3}{5}$. **3.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ i $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **4.** $-\frac{3}{\sqrt{11}}$ i $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **5.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ i
$-2\sqrt{2}$. **6.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ i –2. **7.** –1/3 i $-\frac{\sqrt{8}}{3}$. **8.** (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\sqrt{3}$. (E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.** (A) –2/3.
(B) –2/3. (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (D) 2/3. (E) 2/3. (F) 2/3. (G) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. (H) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **10.** (A) 1/3. (B) –1/3. (C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) 1/3.
(E) 1/3. (F) –1/3. (G) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (H) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **11.** (A) $2\sqrt{2}$. (B) $-2\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $-2\sqrt{2}$. (E) $-2\sqrt{2}$.
(F) $2\sqrt{2}$. (G) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. (H) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.** (A) –sin70º. (B) cos40º. (C) tg70º. (D) sin20º. (E) cos70º. (F) tg20º.
(G) sin75º. (H) –cos10º. (I) –tg20º. (J) sin10º. (K) tg40º. (L) sin55º. (M) –cos30º. (N) –tg80º. (Ñ) –sin90º.
(O) –cos60º. (P) –tg40º. (Q) –sin90º. (R) cos0º. (S) –tg80º. **13.** (A) {210º, 330º} + k·360º.
(B) {120º, 240º} + k·360º. (C) 135º + k·180º. (D) {105º, 165º} + k·180º. (E) {60º, 120º} + k·180º.
(F) 67.5º + k·90º. (G) {70º, 110º} + k·120º. (H) {40º, 80º} + k·120º. (I) 45º + k·60º. (J) {420º, 660º} + k·720º.
(K) {240º, 480º} + k·720º. (L) 270º + k·360º. **14.** (A) P = $3\sqrt{3}R$, A = $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. (B) P = $4\sqrt{2}R$, A = $2R^2$.
(C) P = 6R, A = $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. **15.** (A) P = $6\sqrt{3}R$, A = $3\sqrt{3}R^2$. (B) P = 8R, A = $4R^2$. (C) P = $4\sqrt{3}R$, A = $2\sqrt{3}R^2$.

16. Costats iguals: R(tg30º+ tg75º), base: 2Rtg75º, altura: Rtg30º tg75º. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$m, $\frac{9\sqrt{3}}{8}m^2$.

18. 50/tg22.5º = $25\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$. **21.** 6cos36º. **22.** 0.5066 m^2. **23.** $12\sqrt{3}$ m^2. **24.** 10/3 m. **26.** y = 2x.

28. 23.66 m. **29.** 6.2 km. i $10\sqrt{3}$ km. **30.** $10\sqrt{7}$ km i $30\sqrt{7}$ km. **31.** (A) 3.95 i 7.42 cm. (B) 6.43 cm.
(C) 25.39 cm^2. **32.** (A) 16.27 km. **(**B) 12.47 km. **33.** (A) 6.96 i 14.2 cm. (B) 27.5º i 13.08º. **34.** 5/2 cm^2.
36. 20.67 m. **37.** (A) 76.4º. (B) 5.68 h; 34.09 km i 45.45 km. **38.** 3.89 m. **39.** 5 m. **40.** 171 m. **41.** 8.85 i
10.85 cm; 8.31 cm. **42.** (A) 76.41º. (B) 62.09º i 41.5º. **43.** (A) 7.31 i 11.2 km. (B) 5.6 km. **44.** 20 m.
45. 36.87º. **46.** (A) 6.43 m. (B) 0.6 m. **47.** 40.9º. **48.** 34.26º. **49.** 36.87º i 53.13º; 7.2 m. **50.** (A) 70.69 m.
(B) 19.85º. **51.** (A) 186.15 m. (B) 40.73º. (C) 233.8 m. **52.** x = 10.78, i = 8.31. **53.** 4.32 km. **54.** 4948.70 m.
55. 4.51 m. **56.** 4.23, 8.19 i 5.42 km. **57.** (A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. (B) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$. (C) $-4\sqrt{5}$. (D) $\frac{2}{3}$. **58.** (A) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.
(B) $\frac{1}{9}$. (C) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$. **59.** (A) $\frac{2}{3}$. (B) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$. (C) $\frac{22}{27}$. **60.** (A) 4/5. (B) –24/25. (C) 336/625. (D) sinα/2.

61. (A) –7/25. (B) 117/125. (C) –527/625. **62.** (A) $-\frac{5}{12}$. (B) 5. (C) $-\frac{120}{119}$. (D) $-\frac{2035}{828}$. (E) $-\frac{28560}{239}$.
63. (A) –3/4. (B) 1/7. (C) –24/7. (D) 117/44. **64.** (A) 56/65. (B) 33/65. (C) 16/65. (D) 63/65. (E) 56/33.
(F) 16/63. **65.** 1; α + 2β = 90º. **66.** –9/16. **68.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, α – β = 45º. **69.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, α – β = 45º. **70.** 2 i 1. **74.** 1/3.

82. (A) 120º i 240º. (B) 240º i 300º. (C) 45º i 315º. (D) 45º i 135º. (E) 30º i 210º. (F) 60º i 240º. (G) 120º i 30º.
(H) 45º i 225º. (I) 135º i 225º. (J) 225º i 315º. (K) 135º i 315º. (L) 150º i 330º. **83.** (A) 95.7º i 264.3º. (B) 41.8º i
138.2º. (C) 36.9º i 323.1º. (D) 233.1º i 306.9º. (E) 63.4º i 243.4º. (F) 89.4º i 269.4º. (G) 89.9º i 269.9º. (H) 90.1º i
270.1º. **84.** (A) 225º i 315º. (B) 2025º i 2115º. (C) 5π/4, 7π/4, 45π/4 i 47π/4. **85.** (A) 60º + k·360º, 300º + k·360º.
(B) 45º + k·180º. (C) 30º + k·360º, 150º + k·360º. (D) 90º + k·360º. (E) 30º + k·360º, 150º + k·360º.

(F) 120º + k·360º, 240º + k·360º. (G) 135º + k·180º. (H) 60º + k·180º. **86.** (A) x = 60º + k·180º, 120º + k·180º. (B) x = 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 90º + k·360º. **87.** (A) 0º i 360º. 120º, 240º. (B) 2040º. (C) 34π/3. **88.** (A) 60º + k·360º, 120º + k·360º, 240º + k·360º, 300º + k·360º. (B) π/3 + 2kπ, 2π/3 + 2kπ, 4π/3 + 2kπ, 5π/3 + 2kπ. **89.** 15º, 75º, 105º, 165º, 195º, 255º, 285º, 355º. **90.** 9º + k·72º, 27º + k·72º. **91.** 45º, 225º, 585º, 765º. **92.** (A) 45º + k· 180º, arctg2 + k·180º. (B) 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) 60º + k·360º, 120º + k·360º. **93.** (A) 0º + k· 180º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (B) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (C) k·180º, 60º + k·180º, 120º + k·180º. **94.** (A) i (B): 60º + k·180º, 120º + k·180º. (C) 45º + k·90º. (D) 30º + k·180º, 150º + k·360º. (E) 45º + k·90º. (F) 30º + k·180º, 150º + k·180º. (G) 45º + k·90º. (H) 54.7º + k·180º, 125.3º + k·180º. **95.** (A) k·90º. (B) k·180º, 120º + k·360º, 240º + k·360º. (C) k·180º, 30º + k·360º, 150º + k·360º. (D) 90º + k·360º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (E) 180º + k·360º, 60º + k·360º, 300º + k·360º. (F) 270º + k·360º, 210º + k·360º, 330º + k·360º. (G) k·180º, 153.4º + k·180º. (H) 45º + k·180º, 123.7º + k·180º. (I) 45º + k·180º. (J) 63.4º + k·180º. K) 45º + k·90º. (L) 60º + k·180º, 120º + k·180º. (M) k·180º. (N) k·180º, 135º + k·180º. (Ñ) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (O) 30º + k·360º, 150º + k·360º, 270º + k·360º. (P) k·180º. (Q) 45º + k·90º. (R) 60º + k·180º, 120º + k·180º. (S) 45º + k·360º. **96.** 30º, 45º, 135º, 150º, 210º, 225º, 315º, 330º. **97.** (A) {90º, 120º, 240º, 270º} + k·360º. (B) {30º, 150º, 270º} + k·360º. (C) {30º, 150º, 90º, 270º} + k·360º. (D) k·90º. (E) {120º, 180º, 240º} + k·360º. (F) {0º, 60º, 120º} + k·180º. (G) {30º, 150º, 199.47º, 340.53º} + k·360º. (H) k·60º. (I) k·180º, {15º, 75º} + k·90º. (J) k·60º. (K) k·180º, {60º,300º} + k·360º. (L) {30º, 90º, 150º} + k·360º.

98. 30º. **100.** (A) $a = \sqrt[4]{2} \simeq 1.189\,\mathrm{m}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \simeq 0.841\,\mathrm{m}$. (C) base = $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4} \simeq 0.297$ m, altura = $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{2}} \simeq 0.210$ m. És immediat que els triangles són isòsceles amb l'angle desigual de 45º.

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Funcions

educàlia editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Funcions

educàlia
editorial

Primera edició, 2018
Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró
Edita: Educàlia Editorial
Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró
Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.
ISBN: 978-84-17734-07-7
Depòsit legal: V-3243-2018
Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 1

Funcions elementals

1.1 Correspondències

Elements de molt diversos conjunts són relacionats en la vida quotidiana: persones amb nombres (com edats, pesos o longituds) o amb lletres (nacionalitat, NIF), països amb continents o idiomes, però sobretot, nombres amb nombres (pesos amb longituds, temperatures amb latituds...). Els conceptes que anem a estudiar, **correspondència** i posteriorment **funció,** s'utilitzen per a establir aquestes relacions.

➢ Definició de correspondència

Anomenem ***correspondència*** a qualsevol relació entre elements de dos conjunts, A i B.
El primer considerat, A, s'anomena ***conjunt inicial*** i el segon, B, ***conjunt final***.
Utilitzarem lletres com f, g, h... per a representar les correspondències. Així, l'expressió

$$\mathbf{f : A \rightarrow B}$$

es llegirà **"f és una correspondència entre el conjunt inicial A i el final B"**.

Al establir una correspondència hem d'indicar els elements dels dos conjunts relacionats entre si, que constitueixen un conjunt de **parelles ordenades**, la primera del conjunt inicial i la segona del final, anomenat ***graf de la correspondència***, **G**.

El graf és un subconjunt del conjunt de totes les possibles parelles ordenades que es poden formar amb els elements de A i B, l'anomenat ***producte cartesià***, **A × B**:

$$\mathbf{G \subset A \times B}$$

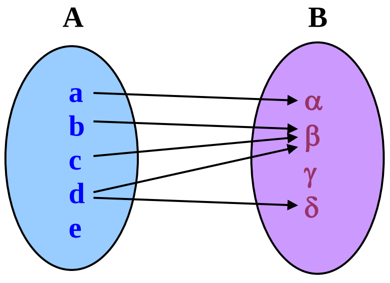
Exemple 1

Un grup excursionista A, constituït per 5 xiques que anomenem a, b, c, d, e, acorda comunicar-se a través del correu amb un segon grup B, constituït per 4 xics que anomenem α, β, γ, δ. Les xiques envien els següents correus: a escriu a α, b i c escriuen a β i d escriu a β i δ.

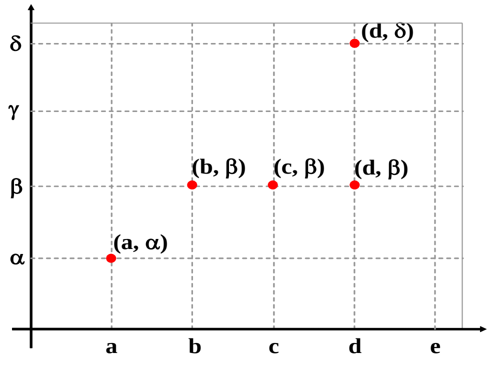
Hem establit una correspondència f, mai millor dit, entre el conjunt inicial A de xiques excursionistes i el final B de xics excursionistes, consistent en els correus que les xiques emeten als xics, de graf

$$\mathbf{G_f = \{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \beta), (d, \beta), (d, \delta)\}}$$

que representem gràficament de dues formes, la primera amb ***diagrames de Venn***, unint amb una fletxa cada parell d'elements relacionats, i la segona amb un ***sistema d'eixos cartesians***, representant cada parell d'elements relacionats com un punt del pla (en l'eix d'abscisses situem els elements del conjunt inicial i en el d'ordenades els del conjunt final).



Diagrames de Venn



Orígens i imatges

En una correspondència f considerem tots els elements del graf, els parells ordenats.

En ells, anomenem ***origen*** o ***antiimatge*** al primer element del parell i ***imatge*** o ***valor*** al segon element del parell.

Considerem la correspondència f de l'exemple 1, de graf $G_f = \{(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{d}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{d}, \boldsymbol{\delta})\}$.

Del parell (**b, β**) deduïm que **"β és imatge de b"** i **"b és origen de β".**

Del parell (**d, β**) deduïm que **"β és imatge de d"** i **"d és origen de β".**

Aquesta diferenciació ens condueix a les següents definicions.

Considerem la correspondència $\mathbf{f: A \rightarrow B}$ de graf **G**.

- Donat **x∈A,** el ***conjunt de les imatges o valors de*** **x**, expressat per **f(x)**, està constituït pels elements de B relacionats amb x:

$$\mathbf{f(x) = \{y \in B, \text{ tal que } (x, y) \in G\}}$$

- Donat **y∈B,** el ***conjunt dels orígens o antiimatges de*** **y**, expressat per $\mathbf{f^{-1}(y)}$, està constituït pels elements de A relacionats amb y:

$$\mathbf{f^{-1}(y) = \{x \in A, \text{ tal que } (x, y) \in G\}}$$

De les dades de l'exemple 1, deduïm els següents **conjunts d'imatges**:

$$f(\mathbf{a}) = \{\alpha\} = \boldsymbol{\alpha} \qquad f(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta} \qquad f(\mathbf{c}) = \boldsymbol{\beta} \qquad f(\mathbf{d}) = \{\beta, \delta\} \qquad f(\mathbf{e}) = \varnothing$$

Quan els conjunts d'imatges són unitaris, no s'escriuen entre claus.

També tenim els següents **conjunts d'orígens** o antiimatges:

$$f^{-1}(\alpha) = \mathbf{a} \qquad f^{-1}(\beta) = \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \qquad f^{-1}(\gamma) = \varnothing \qquad f^{-1}(\delta) = \mathbf{d}$$

Domini i recorregut

Considerem la correspondència $f: A \rightarrow B$

- Anomenem ***domini de la correspondència* f,** representat per $\mathbf{D_f}$, al subconjunt d'elements del conjunt inicial A que tenen alguna imatge.
- Anomenem ***recorregut o rang de la correspondència* f,** representat per $\mathbf{R_f}$, al subconjunt d'elements del conjunt final B que tenen algun origen.

Prenem el graf de la correspondència de l'exemple 1: $G_f = \{(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{c}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{d}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{d}, \boldsymbol{\delta})\}$.

El domini de f el constitueixen els orígens dels elements de B, mentre que el recorregut el constitueixen les imatges dels elements de A:

$$\mathbf{D_f = \{a, b, c, d\}} \subset A \qquad \mathbf{R_f = \{}\alpha, \beta, \delta\mathbf{\}} \subset B$$

1 Obtén el producte cartesià, A×B, constituït amb els elements dels conjunts A i B de l'exemple 1.

2 Si A = B = {1, 2, 3, …, 10}, considera la correspondència que relaciona cada nombre amb els seus divisors propis (ni el 1 ni ell mateix). Calcula la imatge de cada element de A i l'origen de cada element de B. Obtén el domini i el recorregut.

➢ Expressions per a una correspondència

Exemple 2

Qualsevol equació amb 2 incògnites defineix dues correspondències; per exemple, l'equació de la circumferència amb centre (0, 0) i radi 5, $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$, defineix una correspondència f: ℝ → ℝ de graf:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x^2 + y^2 = 25}\ \}$$

al considerar els elements **x** com el conjunt inicial (l'altra correspondència apareix si els elements **y** constitueixen el conjunt inicial).

Els parells de nombres reals relacionats són les solucions d'aquesta equació. Aquests nombres han d'estar compresos entre –5 i 5, per la qual cosa el domini i el recorregut d'aquesta correspondència és el mateix:

$$\mathbf{D_f = R_f = [-5, 5]}$$

Obtenim algunes imatges d'elements del domini:

- Per a **x = 3** tenim 2 imatges que s'obtenen al resoldre l'equació d'incògnita **y**:

$$3^2 + y^2 = 25 \quad \to \quad y^2 = 16 \quad \to \quad y = \pm 4 \quad \to \quad \mathbf{f(3) = \{-4, 4\}}.$$

- En general, les imatges de qualsevol valor **x** del domini les obtenim de la mateixa forma:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \to \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2} \quad \to \quad f(x) = \left\{-\sqrt{25-x^2}, \sqrt{25-x^2}\right\}.$$

La correspondència f es pot expressar indicant les imatges de cada element del domini:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x)} = \left\{-\sqrt{\mathbf{25-x^2}}, \sqrt{\mathbf{25-x^2}}\right\} \quad \textbf{per a } \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

D'aquesta expressió resulta fàcil calcular qualsevol imatge; per exemple:

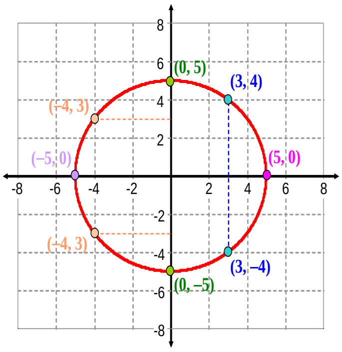
$$f(0) = \left\{-\sqrt{25-0^2}, \sqrt{25-0^2}\right\} = \{-5, 5\}$$

Observa que els valors $x = 5$ i $x = -5$ només tenen una imatge i no dues perquè les dues arrels són iguals:

$$f(5) = \left\{-\sqrt{25-5^2}, \sqrt{25-5^2}\right\} = \{0\} \qquad f(-5) = \left\{-\sqrt{25-(-5)^2}, \sqrt{25-(-5)^2}\right\} = \{0\}$$

La següent taula conté alguns elements del graf que representem en la gràfica:

Conjunts d'imatges	Parells de la gràfica
f(0) = {–5, 5}	(0, –5) (0, 5)
f(3) = {–4, 4}	(3, –4) (3, 4)
f(–4) = {–3, 3}	(–4, –3) (–4, 3)
f(5) = {0}	(5, 0)
f(–5) = {0}	(–5, 0)



3 Obtén les imatges i el domini de les correspondències que defineixen les equacions següents prenent x com a element del conjunt inicial:

(A) $2x + 3y = 5$ (B) $xy + x = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ (E) $y^2 = 4x$

4 Repeteix l'activitat anterior si la variable y correspon al conjunt inicial.

1.2 Funcions

Una ***funció*** és qualsevol correspondència que verifica:

- **Els conjunts inicial i final són numèrics** ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) **o els seus productes cartesians**.
- **Tot element del conjunt inicial té, com a màxim, una imatge**.

Exemple 3

Suposem que el gerent d'una botiga de calçat té mercaderies entre 10 i 50 euros. En període de rebaixes efectua un descompte del x% per a cada preu x.

Edita adhesius amb el preu inicial i el final (rebaixat), establint d'aquesta manera una correspondència entre el conjunt A de preus inicials de les sabates (entre 10 i 50) i el conjunt de preus finals rebaixats B. Alguns elements del graf són (10, 9), (20, 6), (30, 21), (40, 24), (50, 25), perquè:

Si el preu inicial és 10 € la rebaixa del 10% produeix un preu rebaixat de 10 – (10% de 10) = 9 €.
Si el preu inicial és 20 € la rebaixa del 20% produeix un preu rebaixat de 20 – (20% de 20) = 16 €.

Abans: 10 €	Abans: 20 €	Abans: 30 €	Abans: 40 €	Abans: 50 €
Ara: 9 €	Ara: 16 €	Ara: 21 €	Ara: 24 €	Ara: 25 €

Obtenim **una expressió matemàtica per a definir la correspondència**:

Anomenem **x** al preu inicial i **y** al preu final, obtingut aquest últim restant el descompte del x%:

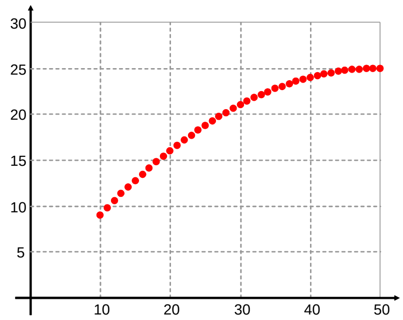
$$y = x - \frac{x}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y = x - 0.01\,x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f(x) = x - 0.01\,x^2}$$

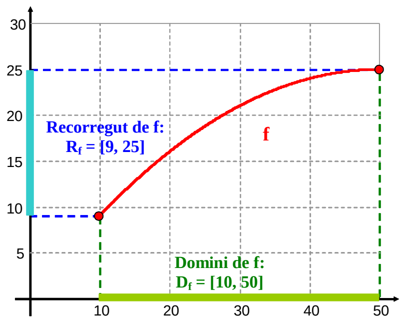
Hem establit una correspondència entre dos conjunts numèrics f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en la que cada element del domini ($0 \le x \le 50$) només té una imatge; per tant, es tracta d'una **funció**:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x) = x - 0.01\,x^2} \quad \text{per a} \quad \mathbf{10 \le x \le 50}$$

En la ***taula de valors*** expressem alguns parells d'elements relacionats que traslladem, a continuació, a la gràfica. En la primera gràfica estan representats tots els preus inicials amb valors enters entre 10 i 50 €, i els seus preus finals, però la gràfica completa és la segona, en la qual omplim tots els buits entre cada parella de punts, considerant que qualsevol nombre real entre 10 i 50 pot ser el preu d'un parell de sabates.

x	y
10	9
15	12.75
20	16
25	18.75
30	21
40	24
50	25





5 Volem comprar orenga i alfàbega per un total de 20 €. L'orenga té un preu de 4 €/kg, mentre que l'alfàbega és de 2 €/kg. Anomenem x i y, respectivament, a les quantitats d'orenga i alfàbega que podem comprar. Obtén una equació que represente aquestes quantitats, expressa y en funció de x, i obtén també el seu domini i recorregut.

➢ Funcions reals de variable real

Considerem f: A $\to$ B una funció, aleshores les imatges f(x) consten d'un únic valor $\forall x \in D_f$, i el graf de f és

$$G_f = \{ (x, y) \in A \times B: \; y = f(x), \; x \in D_f \}$$

De les dues variables utilitzades per a representar les parelles del graf, anomenem:

- ***Variable independent*** a la que representa els valors del domini (en aquest cas **x**).
- ***Variable dependent*** a la que representa els valors del recorregut (en aquest cas **y**).

Els conjunts numèrics inicial i final considerats ens porten a establir una petita classificació entre les funcions:

- Una funció f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ s'anomena ***funció entera*** (perquè les imatges són nombres enters) ***de variable entera*** (perquè els orígens són nombres enters).
- Una funció g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'anomena ***funció real de variable real***.
- Una funció h: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s'anomena ***funció real de variable natural*** o ***successió de nombres reals***.
- Una funció F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'anomena ***funció real de variable vectorial***, on $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemple 4

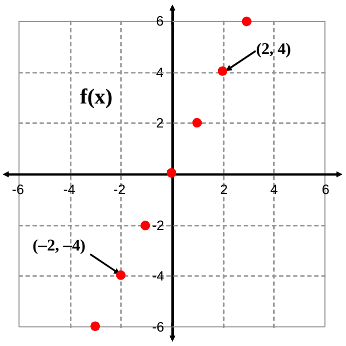
Veiem alguns exemples de funcions i alguna de les seues representacions gràfiques:

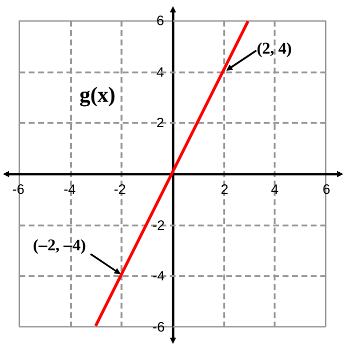
(A) f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida com f(n) = 2n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (funció entera de variable entera).

(B) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida com g(x) = 2x, $\forall x \in \mathbb{R}$, (funció real de variable real).

(C) h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida com h(x, y) = $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, (funció real de variable vectorial).

Aquesta última funció relaciona a cada vector de $\mathbb{R}^2$ amb la seua longitud.





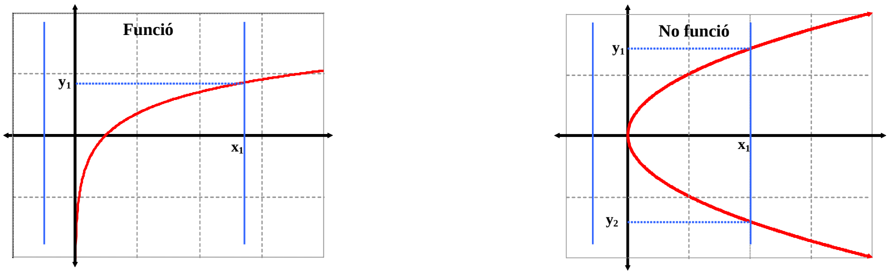
6 (A) Expressa la longitud L del costat d'un quadrat en funció de la seua àrea x.
(B) Expressa la longitud D de la diagonal d'un rectangle de perímetre 10 en funció de la longitud x de la seua base.
(C) Expressa l'àrea A d'un rectangle en funció de les longituds x i y dels seus costats.

7 Estableix la correspondència que relaciona cada vector lliure del pla amb el seu pendent. És una funció? Quin és el seu domini i recorregut? Obtén la imatge del vector (5, 3), i la antiimatge de 2.

➢ Propietat de les gràfiques de les funcions

Una correspondència amb conjunts inicial i final $\mathbb{R}$ serà una funció si:

Qualsevol recta vertical talla a la seua gràfica en un punt, com a màxim.



Observa que en les dues gràfiques tenim rectes verticals que no tallen a les gràfiques, és degut al fet que no tot nombre real pertany al domini. En la primera, les rectes verticals que passen pels punts del domini tallen només una vegada a la gràfica mentre que en la segona ho fan dues vegades en quasi tots ells.

Exemple 5

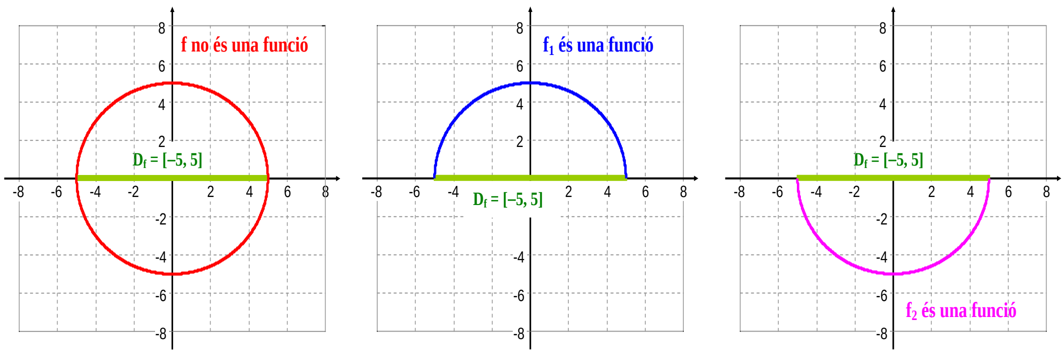
Com hem vist en l'exemple 2, a partir de l'equació de la circumferència $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$ obtenim la correspondència f que expressàvem:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x)} = \left\{-\sqrt{25-x^2},\ \sqrt{25-x^2}\right\} \quad \text{per a} \ \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

Aquesta correspondència no és una funció, perquè cada element del domini té dues imatges. No obstant, la gràfica es pot descompondre en dues parts, representant cadascuna d'elles una funció diferent:

$$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f_1(x)} = \sqrt{25-x^2} \quad \text{per a} \ \mathbf{-5 \le x \le 5}$$

$$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f_2(x)} = -\sqrt{25-x^2} \quad \text{per a} \ \mathbf{-5 \le x \le 5}$$



8 De les correspondències donades per les equacions següents, obtén les funcions que determinen (de forma anàloga a l'exemple anterior) i indica els dominis respectius:

(A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ (B) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $y^2 = 4x$

Realitza la representació gràfica corresponent.

1.3 Funcions polinòmiques

Una funció **f**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és ***polinómica de grau n*** si les seues imatges s'expressen per mitjà d'un polinomi de grau n:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}, \quad \text{on } a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

El **domini** de totes elles és $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$.

➢ Funcions polinòmiques de graus 0 i 1

Les gràfiques de les funcions polinòmiques de graus 0 i 1 són rectes, i les seues expressions són:

(A) **f(x) = mx + n** amb $m \neq 0$, que anomenem ***funcions afins***, on

- El coeficient **m** és el **pendent de la recta** i indica la seua inclinació.
- El coeficient **n** és l'ordenada **en l'origen** i indica el punt de tall amb l'eix OY. Si n = 0, la funció afí s'anomena ***funció lineal.***

(B) **f(x) = n**, que anomenem ***funcions constants***. Són rectes horitzontals (pendent nul).

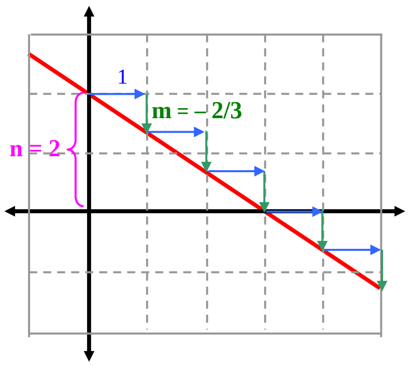
Exemple 6

Representem gràficament la funció afí donada per:

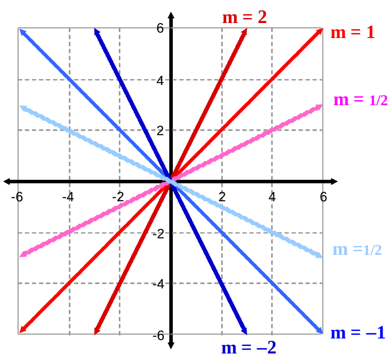
$$\mathbf{f(x) = -\frac{2}{3}x + 2}$$

L'equació que representa aquesta funció és $\mathbf{y = -\frac{2}{3}x + 2}$, que és l'**equació explícita d'una recta**. El seu pendent i la seua ordenada en l'origen són, respectivament:

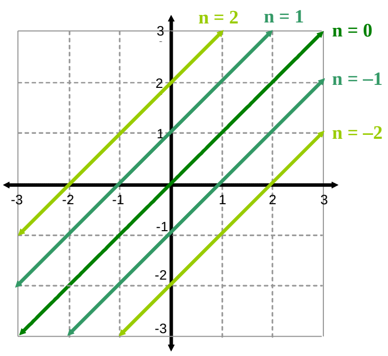
$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad \mathbf{n = 2}$$



A continuació tenim representacions gràfiques de funcions afins per a distints valors de m i n:



f(x) = mx (m = ±1/2, ±1, ±2)



f(x) = x + n (n = 0, ±1, ±2)

Observa que, mantenint el mateix valor de n (n = 0 en el primer dibuix), les rectes passen totes per l'origen i tenen diferent pendent. Mantenint el mateix valor de m (m = 1 en el segon dibuix) les rectes són totes paral·leles.

Exemple 7

Tres empreses de lloguer de vehicles ofereixen als seus clients les següents condicions contractuals:

Empresa A: 50 € per dia.

Empresa B: 10 € per dia, més 0.2 € per km.

Empresa C: 20 € per dia, més 0.1 € per km.

Un client vol llogar un cotxe durant 10 dies.

(A) Si **x** és el nombre total de km recorreguts en 10 dies, expressem 3 funcions que representen **el cost** del lloguer del vehicle en cada empresa, en funció de x.

(B) Comparem les funcions per a determinar quina empresa convé contractar segons els km que realitzem.

(A) Anomenem f_A, f_B i f_C a les funcions que representen els costs en funció dels km recorreguts, en els 10 dies, per a l'empresa A, B i C, respectivament. De l'enunciat deduïm:

$$f_A(x) = 500 \qquad \text{per a } x \geq 0$$
$$f_B(x) = 100 + 0.2x \qquad \text{per a } x \geq 0$$
$$f_C(x) = 200 + 0.1x \qquad \text{per a } x \geq 0$$

(B) Veiem que si el client recorre pocs km li convé l'empresa C, però si recorre molts li convé A.

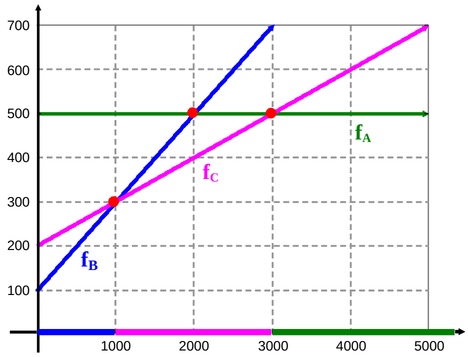
Per a resoldre la qüestió representem gràficament les funcions: "si una recta queda davall de les altres dues és que la funció que representa té les seues imatges menors". Per tant, el preu és menor per a la recta que es dibuixa per davall. Els punts d'intersecció de les rectes ens proporcionen els valors de x per als quals els costs són els mateixos; a partir d'ells, podem decidir l'empresa que convé.

$$f_A(x) = f_B(x) \rightarrow 500 = 100 + 0.2x \rightarrow \mathbf{x = 2000}$$
$$f_A(x) = f_C(x) \rightarrow 500 = 200 + 0.1x \rightarrow \mathbf{x = 3000}$$
$$f_B(x) = f_C(x) \rightarrow 100 + 0.2x = 200 + 0.1x \rightarrow \mathbf{x = 1000}$$

Si $0 \leq x \leq 1000$ convé l'empresa B.

Si $1000 \leq x \leq 3000$ convé l'empresa C.

Si $x \geq 3000$ convé l'empresa A.



9 Representa gràficament les següents funcions afins:

(A) $f(x) = 2x - 3$ (B) $f(x) = 2x + 3$ (C) $f(x) = -2x+3$ (D) $f(x) = -2x-3$

10 Quina és la funció afí la gràfica de la qual passa pels punts A(2, –3) i B(10, 1)? I per A(0, –3) i B(–3, 0)?

11 Troba les funcions de gràfiques paral·leles a les rectes de l'exercici anterior que passen pel punt A(1,2).

12 Una persona vol sol·licitar un préstec per a cancel·lar-lo un any després. Les condicions del banc A són una comissió de 50 euros més un 10% d'interès anual. Les condicions del banc B són una comissió de 100 euros més un 5% d'interès anual. Si anomenem x a la quantitat que sol·licita al banc, es demana:

(A) Expressa, per a cada banc, el cost del préstec en funció de x.

(B) Representa gràficament les anteriors funcions obtingudes i indica en quin banc convé sol·licitar el préstec.

➢ Funcions polinòmiques de grau 2

Són anomenades també ***funcions quadràtiques.*** La seua expressió general és:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{amb } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

La seua representació gràfica és una **paràbola**, amb **vèrtex** en el punt d'abscissa $\mathbf{x_v = -\frac{b}{2a}}$.

Exemple 8

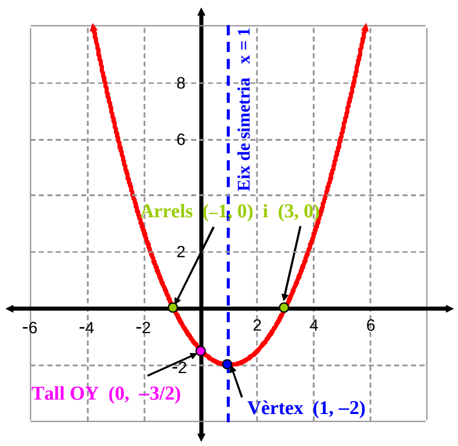
Representem gràficament la funció quadràtica donada per $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

- Obtenim el punt de tall amb l'eix OY, que és en el punt d'abscissa x = 0: (0, –3/2).
- Obtenim els punts de tall (si n'hi ha) amb l'eix OX , resolent l'equació f(x) = 0:

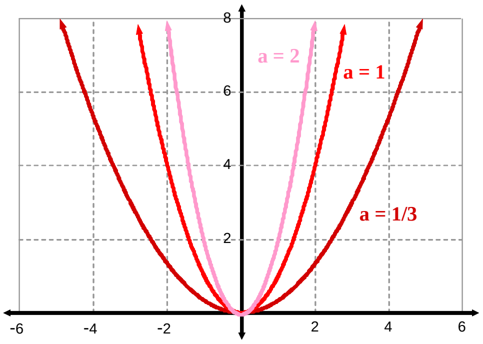
$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3, \quad x = -1 \quad \rightarrow (3, 0) \text{ i } (-1, 0)$$

- Obtenim l'abscissa del vèrtex, $x_v = -\frac{b}{2a} = 1$, per tant el vèrtex és $V(x_v, f(x_v)) = V(1, -2)$.
- Calculem almenys 5 punts de la gràfica (entre ells el vèrtex i els talls amb els eixos). Com que aquestes paràboles són **simètriques respecte de la recta vertical que passa pel vèrtex**, és convenient donar valors de x en la taula equidistants respecte del vèrtex, perquè la imatge serà la mateixa:

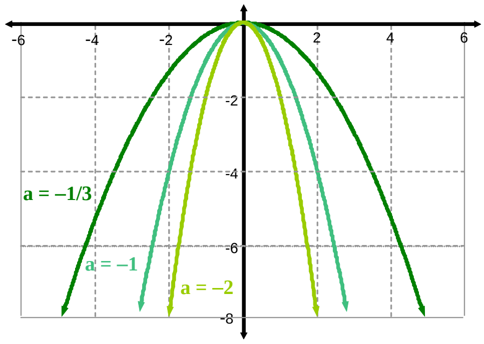
x	f(x)
–2	5/2
–1	0
0	–3/2
$x_v = 1$	–2
2	–3/2
3	0
4	5/2



A continuació representem gràfiques de funcions quadràtiques per a **b = c = 0** i distints valors de a.
Si a > 0, la paràbola dirigeix les seues branques cap a dalt, i si a < 0, cap a baix. La magnitud de | a | està directament relacionada amb l'obertura de les branques: a major valor, menor obertura.



Gràfiques de $f(x) = ax^2$ per a a = 1, 2, 1/3



Gràfiques de $f(x) = ax^2$ per a a = –1, –2, –1/3

Exemple 9

Un club de tenis té 100 socis que paguen una quota anual de 1 000 €.
Es realitza una campanya per a captar nous socis. Tots s'impliquen ja que per cada soci nou s'acorda disminuir la quota anual en 5 € a cadascun.
Anomenem x al nombre de socis nous i C(x) al capital total obtingut per quotes anuals.

(A) Obtenim l'expressió general de C(x) i la seua representació gràfica.
(B) Quin és el nombre de socis per al qual s'obté major capital? I quin és el valor d'aquest?
(C) Per a quins valors de x la campanya de captació de socis fa augmentar el capital anual del club?

(A) Amb x socis nous, el nombre total de socis és de **100 + x**, i la quota anual de cada soci passa a ser de **1 000 – 5x** euros, amb la qual cosa el capital que obté el club és:

$$\mathbf{C(x) = (100 + x)(1\,000 - 5x)}$$

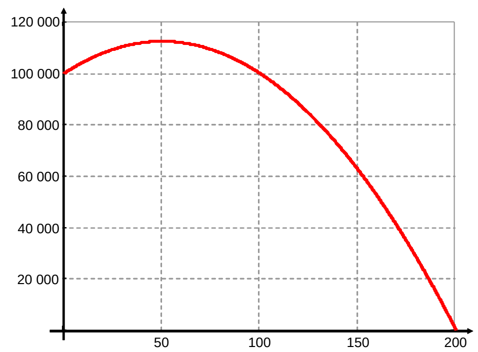
Si efectuem les operacions, obtenim una funció quadràtica, la gràfica de la qual és una paràbola:

$$\mathbf{C(x) = -5x^2 + 500x + 100\,000}$$

Però s'ha de verificar que $\mathbf{x \geq 0}$ i **enter** (nombre de socis nous), i $\mathbf{C(x) \geq 0}$ (perquè és el capital).

Açò porta com a conseqüència que el domini de la funció C(x) són els valors enters de x per als quals la paràbola queda dibuixada en el primer quadrant (en realitat la paràbola no és tal, només són punts no connexes d'ella).

x	C(x)
0	100 000
25	109 375
50	112 500
75	109 375
100	100 000
150	62 500
200	0



(B) El major capital s'obté en el vèrtex de la paràbola, la coordenada x del qual és

$$\mathbf{x_v} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} = -\frac{500}{2\cdot(-5)} = \mathbf{50}$$

i el capital màxim s'obté en aquest valor, **C(50) = 112 500 €**.

(C) El capital total del club, sense admetre nous socis, és C(0) = 100 000 €.

Els valors de x que permeten augmentar el capital del club són les solucions de la inequació

$$C(x) > 100\,000 \quad\rightarrow\quad -5x^2 + 500x + 100\,000 > 100\,000 \quad\rightarrow\quad 5x(x - 100) < 0$$

que es verifica per a $\mathbf{0 < x < 100}$.

Per tant, el capital total augmenta, respecte al valor inicial, per als valors de **x = 1, 2, 3, ..., 99**.

13 Representa gràficament les funcions quadràtiques:

(A) $f(x) = x^2 - 4$ (B) $g(x) = x^2 + 4$ (C) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8$ (D) $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

14 Troba la funció quadràtica la gràfica de la qual passa pels punts A(2, 0), B(3, 0) i C(0,6). Troba també la que passa pel punt A(0, 4) i té per vèrtex V(2, 2).

15 Expressa l'àrea d'un rectangle de perímetre 50 en funció de la longitud x de la seua base. Quina funció és?

1.4 Funcions racionals

Les funcions racionals tenen com a expressió una ***fracció racional***, el quocient de dos polinomis p(x) i q(x):

$$\mathbf{f}\text{:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{p(x)}}{\mathbf{q(x)}}$$

El **domini** són tots els nombres reals excepte les arrels del polinomi del denominador:

$$\mathbf{D_f} = \mathbb{R} \sim \{\textbf{solucions de l'equació q(x) = 0}\}$$

Exemple 10

Calculem els dominis de les següents funcions racionals:

(A) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ (B) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$ (C) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ (D) $F(x) = \dfrac{1}{x^3-x^2-2x+2}$

(A) L'únic valor de x per al qual no hi ha imatge f(x) és el que anul·la el denominador:

$$2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = 3/2$$

$$\mathbf{D_f} = \mathbb{R} \sim \{\text{ solucions de } 2x-3=0\} = \mathbb{R} \sim \left\{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right\}$$

(B) L'equació $x^2 + 4 = 0$ no té solució real i, per tant, no hi ha cap valor que anul·le el denominador de la funció g(x), per la qual cosa el seu domini és

$$\mathbf{D_g} = \mathbb{R}$$

(C) $D_h = \mathbb{R} \sim \{\, x \in \mathbb{R}\text{: } x^2 - 4 = 0 \,\}$

Com que $x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ o } x = -2$

$$\mathbf{D_h} = \mathbb{R} \sim \{\mathbf{-2, 2}\}$$

(D) $D_f = \mathbb{R} \sim \{\, x \in \mathbb{R}\text{: } x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \,\}$. Factoritzem el polinomi de tercer grau, per Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 2x - 2 & x - 1 \\ \hline \mathbf{0} & x^2 - 2 \end{array}$$

$$\to \quad x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2-2)$$

Aleshores: $x^3 - x^2 - 2x + 2 \underset{(1)}{=} 0 \iff (x-1)(x^2-2) = 0 \iff \begin{cases} x - 1 = 0 \to x = 1 \\ x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Per tant $D_F = \mathbb{R} \sim \left\{\mathbf{1}, -\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}}\right\}$.

16 Calcula el domini de les següents funcions racionals:

(A) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+4}$ (B) $g(x) = \dfrac{x+2}{x^3-4x}$ (C) $h(x) = \dfrac{x-4}{-x^2+9}$ (D) $t(x) = \dfrac{x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

(E) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$ (F) $g(x) = \dfrac{x}{x^3-2}$ (G) $h(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$ (H) $t(x) = \dfrac{x+1}{x^4-10x^2+9}$

Exemple 11

Anomenem ***índex de complexió física* i** al quocient entre el pes **p** d'una persona, en kg, i el quadrat de la seua alçada **x**, en metres. Aleshores:

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{x}^2}$$

Distingim quatre tipus de complexions, segons els valors de i:

Complexió:	Prima	Normal	Grossa	Obesa
Valors de i:	$i \le 22$	$22 \le i \le 27$	$27 \le i \le 32$	$i \ge 32$

Per exemple, si una persona pesa 70 kg i mesura 1.75 m, aleshores és de complexió normal, perquè:

$$i = \frac{70}{(1.75)^2} = 22.8 \qquad \text{i} \qquad 22 \le 22.8 \le 27$$

- Si una persona pesa 80 kg l'índex de complexió és una **funció racional** que depén de la seua alçada:

$$\mathbf{i(x)} = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{x}^2}\ ,\ \ \mathbf{x > 0}$$

Es tracta d'una funció **decreixent**, perquè el valor de **i** disminueix al augmentar el valor de x, com veiem en la taula següent i en la gràfica posterior.

Valors de x:	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
Valors de i:	35.5	31.25	27.7	24.7	22.2	20
Complexió:	Obesa	Grossa	Grossa	Normal	Normal	Prima

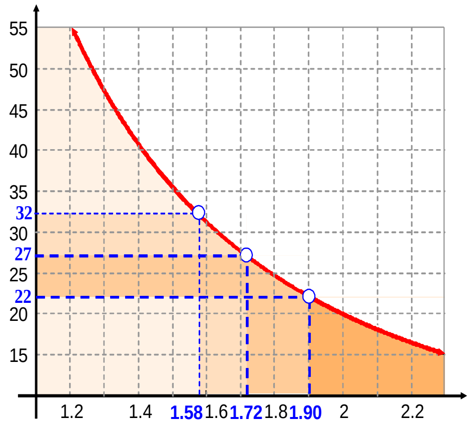
Per a una persona de 80 kg, quins seran els límits de l'altura x que el situen en les diferents tipus de complexions? A la vista de la gràfica, són obtingudes aïllant x en l'equació de la funció:

Per exemple, l'alçada mínima per als prims i màxima per als normals s'obté de:

$$i = 22 \;\rightarrow\; 22 = \frac{80}{x^2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{80}{22} \;\rightarrow\; \mathbf{x} = \sqrt{\frac{80}{22}} \simeq \mathbf{1.90}$$

Mentre que l'alçada màxima per als obesos i mínima per als grossos s'obté de:

$$i = 32 \;\rightarrow\; 32 = \frac{80}{x^2} \;\rightarrow\; x^2 = \frac{80}{32} \;\rightarrow\; \mathbf{x} = \sqrt{\frac{80}{32}} \simeq \mathbf{1.58}$$



Obtenim la següent taula, per a un pes de 80 kg:

Complexió:	Prima	Normal	Grossa	Obesa
Valors de l'alçada x:	$x \ge 190$	$1.72 \le x \le 1.90$	$1.58 \le x \le 1.72$	$i \le 1.58$

17 Repeteix l'exemple anterior per a una persona amb un pes de 100 kg. Obtén els límits que corresponen a cada tipus de complexió.

➢ Funcions de proporcionalitat inversa

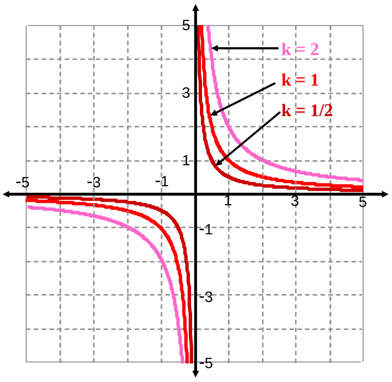
Les funcions de proporcionalitat inversa són funcions racionals del tipus:

$$\mathbf{f(x) = \frac{k}{x}}, \quad \text{amb domini } \mathbb{R} \sim \{0\}.$$

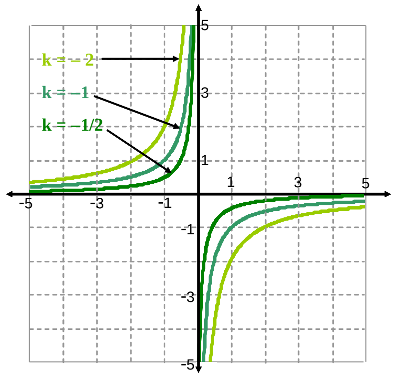
- El nombre no nul **k** s'anomena ***constant de proporcionalitat inversa***.
- Les gràfiques d'aquestes funcions són ***hipèrboles***, amb asímptota vertical **r: x = 0** i asímptota horitzontal **s: y = 0**.

Vegem les gràfiques d'algunes funcions de proporcionalitat inversa, per a distints valors de k:

$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$ per a **k = 1**, **k = 2**, **k = 1/2**



$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$ per a **k = –1**, **k = –2**, **k = –1/2**



Exemple 12

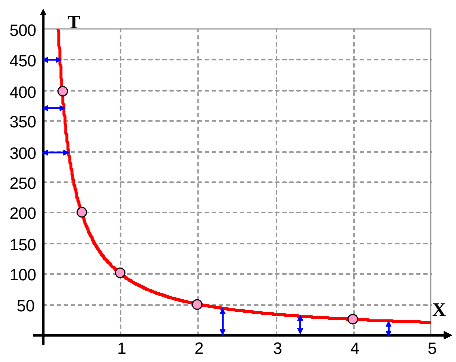
Per a omplir un dipòsit de 100 litres d'aigua disposem d'una aixeta. Si anomenem **x** a la velocitat d'abocar aigua (capacitat de l'aixeta), mesurada en litres per segon, i **t** al temps necessari, en segons, per a omplir el dipòsit, les dues variables estan relacionades per l'equació

$$\mathbf{x \cdot t = 100} \qquad (1)$$

Observa en la taula que al augmentar la velocitat al doble el temps que es tarda en omplir es redueix a la meitat, i viceversa. "Les variables són **inversament proporcionals**" i el nombre **100 és la constant de proporcionalitat inversa**. Si x és la variable independent, la funció que proporciona el temps per a omplir el dipòsit és

$$\mathbf{t(x)} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{x}} \qquad \text{per a } x > 0$$

x	t
0.25	400
0.5	200
1	100
2	50
4	25



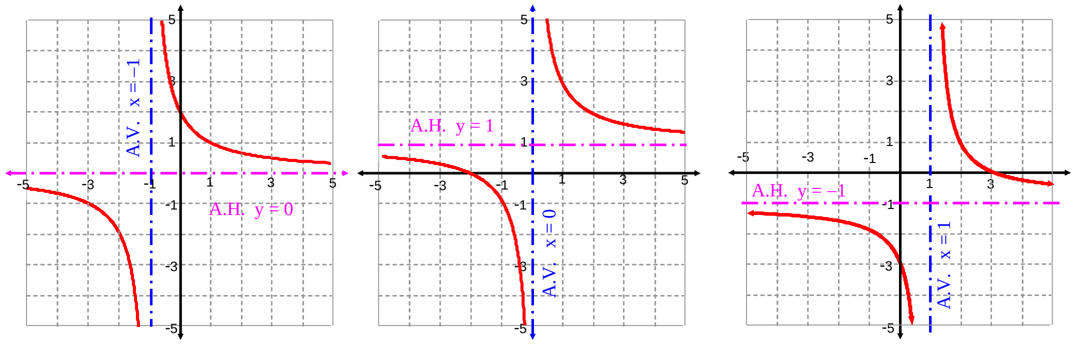
➢ Desplaçaments horitzontals i verticals

- La gràfica de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x-a}}$, amb domini $\mathbb{R} \sim \{a\}$, suposa un desplaçament de la de proporcionalitat inversa de a unitats a la dreta. La seua asímptota vertical és ara **r: x = a**.
- La gràfica de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$, amb domini $\mathbb{R} \sim \{0\}$, suposa un desplaçament de la de proporcionalitat inversa de b unitats cap a dalt. La seua asímptota horitzontal és **s: y = b**.
- La gràfica de la funció racional $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{Cx+D}}$ és una hipèrbola amb domini $\mathbb{R} \sim \left\{-\dfrac{D}{C}\right\}$, i:

  (A) Asímptota vertical en **r:** $\mathbf{x} = -\dfrac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}$. (B) Asímptota horitzontal en **s:** $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}$.

Representem gràficament les funcions racionals següents, i obtenim les equacions de les seues asímptotes:

$f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2}{x} + 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{-x+3}{x-1}$



- La gràfica de $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, amb domini $\mathbb{R} \sim \{-1\}$, és un desplaçament horitzontal de –1 unitats de $y = \dfrac{2}{x}$, (cap a l'esquerra), i les asímptotes són r: **x = –1** i **s: y = 0.**
- La gràfica de $g(x) = \dfrac{2}{x} + 1$, amb domini $\mathbb{R} \sim \{0\}$, és un desplaçament vertical de 1 unitat de $y = \dfrac{2}{x}$, (cap a dalt), i les asímptotes són r: **x = 0** i **s: y = 1.**
- La gràfica de $h(x) = \dfrac{-x+3}{x-1}$, amb domini $\mathbb{R} \sim \{0\}$, és una hipèrbola amb asímptota vertical r: x = 1 i asímptota horitzontal s: y = –1, i resulta de dos desplaçaments, un horitzontal de 1 unitat, i l'altre vertical de –1 unitat, de la hipèrbola $y = \dfrac{2}{x}$. Açò ho podem veure si efectuem la divisió:

–x + 3	x – 1
2	– 1

$\rightarrow \quad -x + 3 = -1(x-1) + 2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{-x+3}{x-1} = -1 + \dfrac{2}{x-1}$

18 Un rectangle té 1 000 m^2 de superfície. Estableix una funció que mesure les dimensions d'un costat en funció de les dimensions de l'altre costat.

19 Representa gràficament les funcions de proporcionalitat inversa $f(x) = \dfrac{5}{x}$ i $g(x) = \dfrac{-5}{x}$. Desplaça 4 unitats cap a dalt i 2 cap a l'esquerra les funcions donades. Com són les noves expressions?

20 Representa gràficament les funcions: (A) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ (B) $\dfrac{2x+4}{3x-6}$ (C) $\dfrac{2x-3}{3x+1}$

1.5 Correspondència recíproca

Donada una correspondència **f: A → B**, representem per $\mathbf{f}^{-1}$ la ***correspondència recíproca o inversa de* f,** correspondència que verifica:

- El conjunt inicial de f^{-1} és el final de f, i el conjunt final de f^{-1} és l'inicial de f:

$$\mathbf{f^{-1}: B \to A}$$

- Els parells d'elements relacionats en f^{-1} són els de f intercanviant l'ordre de cada parell:

$$\mathbf{(x, y) \in G_f} \quad \text{si i només si} \quad \mathbf{(y, x) \in} G_{f^{-1}}$$

Així doncs, els orígens de f^{-1} són les imatges de f i viceversa, per la qual cosa:

$$\mathbf{D_{f^{-1}} = R_f} \quad \text{i} \quad \mathbf{R_{f^{-1}} = D_f}$$

Les gràfiques de qualsevol correspondència i de la seua recíproca són simètriques respecte de la bisectriu del primer i tercer quadrant.

Exemple 13

Obtenim la correspondència recíproca de la funció f: ℝ → ℝ, definida per f(x) = 2x + 1, ∀x∈ℝ.

El seu graf és G_f = {(0, 1), (1, 3), (2, 5)...} = {(x, y)∈ℝ: y = 2x + 1}

Aleshores el de f^{-1} és $G_{f^{-1}} = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2)...\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x-1}{2}\right\}$

L'equació de la correspondència f^{-1} s'obté canviant x per y en l'equació de f, i després aïllant y:

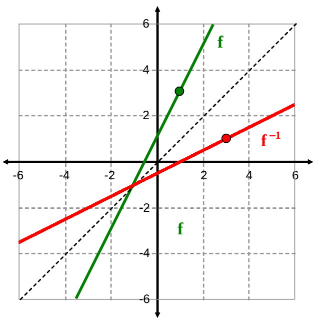
$$y = 2x + 1 \quad \to \quad x = 2y + 1 \quad \to \quad 2y = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x-1}{2}$$

Com que la solució obtinguda és sempre única, cada element té una única imatge, i per tant la correspondència inversa de la funció f, que representem per $\mathbf{f^{-1}}$, **és una funció**:

f^{-1}: ℝ → ℝ, definida per $\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}}$, ∀x∈ℝ

f(x) = 2x + 1

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9



x	y
1	0
3	1
5	2
7	3
9	4

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

La taula de valors de f^{-1} es pot obtenir intercanviant x per y en la taula de valors de f, com hem fet en les taules anteriors. Per això les dues gràfiques són simètriques respecte de la bisectriu y = x.

Donada una funció f, l'expressió general de la seua correspondència inversa s'obté:

- Canviant x per y en l'equació **y = f(x)**.
- Aïllant la variable y en l'equació **x = f(y)**.

➢ Funcions injectives

Diem que una funció és ***injectiva*** si verifica la següent propietat:

Cada element del recorregut té un únic origen o antiimatge.

➢ Propietats de les funcions injectives

Si f és una funció injectiva, aleshores:

- Per a qualsevol element **y** del recorregut, l'equació **f(x) = y només té una solució x**.
- Tota recta horitzontal talla a la gràfica en un únic punt com a màxim.
- La correspondència recíproca de f és una funció, que també és injectiva, i que anomenem ***funció recíproca* o *inversa de* f.**

Exemple 14

Obtenim la correspondència recíproca de la funció $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$, i comprovem que no és injectiva:

De l'equació $y = x^2$, intercanviem x per y, i tornem a aïllar y. Obtenim l'equació de la correspondència recíproca:

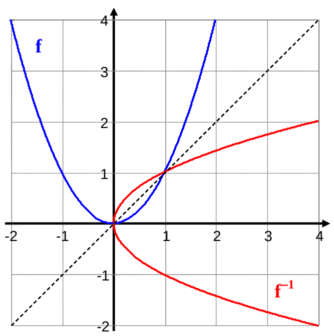
$$y = x^2 \ \rightarrow \ x = y^2 \ \rightarrow \ y^2 = x \ \rightarrow \ y = \pm\sqrt{x} \ \rightarrow \ \mathbf{f^{-1}(x)} = \pm\sqrt{x}$$

La correspondència recíproca de $\mathbf{f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}}$ és $\mathbf{f^{-1}(x) = \left\{ -\sqrt{x}, \sqrt{x} \right\}, \forall x \geq 0}$.

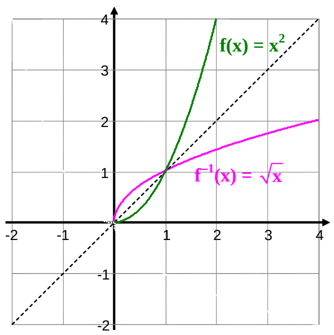
La funció f no és injectiva, perquè cada valor del recorregut té dos orígens, i $\mathbf{f^{-1}}$ no és una funció. Observa el primer dibuix.

Si considerem la funció $\mathbf{f(x) = x^2, \forall x \geq 0}$, la gràfica de la qual està en el segon dibuix, f si que és injectiva, i la seua correspondència inversa és una funció, que s'anomena ***funció arrel quadrada***:

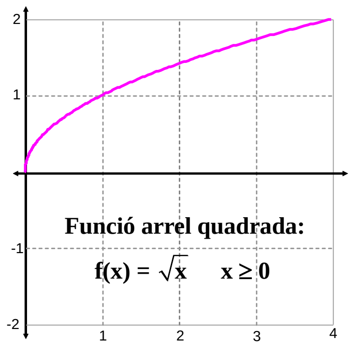
$$\mathbf{f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ , \ x \geq 0}$$



f no injectiva, $\mathbf{f^{-1}}$ no és funció.



f injectiva, $\mathbf{f^{-1}}$ és funció.



21 Comprova si són injectives les següents funcions i troba les seues correspondències o funcions recíproques:

(A) $f(x) = 3x - 4$ (B) $f(x) = x^4 - 1$ (C) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (D) $f(x) = x^2 + x$ (E) $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$

22 Representa gràficament i obtén el domini i el recorregut de les funcions:

(A) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (B) $f(x) = \sqrt{x+1}$ (C) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ (D) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$ (E) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

1.6 Funcions definides a trossos

Fins aquest moment les expressions que defineixen les funcions s'obtenen d'una equació que lliga la variable independent amb la dependent.

Hi ha moltes funcions que no poden ser deduïdes simplement d'una equació, necessiten més d'una, cadascuna aplicable en determinades circumstàncies. Són les ***funcions definides a trossos.***

Exemple 15

En el mercat de la telefonia mòbil apareix una nova empresa, TELEFONA S.A., que ofereix els seus serveis amb tarifes fixes. El preu del servei es calcula en el rebut bimensual de la següent manera:

- Les primeres 15 hores comptabilitzades tenen un preu d'1 € per hora.
- El temps que excedeix de les 15 hores té un preu de 0.5 € per hora.

L'empresa considera el temps totalment fraccionable en minuts, segons...

Quina serà la **funció cost C**, en telefonia mòbil, **depenent del temps acumulat t**, si contractem els serveis de TELEFONA?

$$\text{COST} = \text{PREU UNITARI} \cdot \text{TEMPS}$$

(A) Si el temps acumulat t en trucades no supera les 15 hores, el cost és d'1 euro per hora:

$$\text{si} \quad t \in [0, 15] \quad \rightarrow \quad C(t) = 1 \cdot t = t$$

(B) Si el temps acumulat t supera les 15 hores (i com a màxim hi ha 1440 h en dos mesos), el cost de les primeres 15 h és d'1 € per hora i la resta a 0.5 €:

$$\text{si} \quad t \in]15, 1440] \quad \rightarrow \quad G(t) = 1 \cdot 15 + 0.5 \cdot (t - 15) = 7.5 + 0.5t$$

En resum, la funció cost C s'expressa com:

$$\mathbf{C(t)}\mathbf{:}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{C(t)} = \begin{cases} \mathbf{t} & \mathbf{si} \quad \mathbf{0 \le t \le 15} \\ \mathbf{7.5 + 0.5t} & \mathbf{si} \quad \mathbf{15 < t \le 1440} \end{cases}$$

L'anterior funció s'anomena ***definida a trossos***, perquè està constituïda amb **dos trossos de funcions distintes**:

$$\mathbf{C_1(t) = t} \quad \text{si} \quad \mathbf{0 \le t \le 15} \qquad\qquad \mathbf{C_2(t) = 7.5 + 0.5t} \quad \text{si} \quad \mathbf{15 < t \le 1440}$$

Per a veure el càlcul de les imatges de la funció C, ens referim a dos casos particulars:

- Quin és el cost si emprem un temps de t = 5.2 hores?

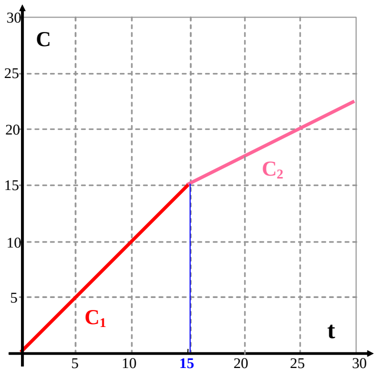
$$\text{Com que} \quad 0 \le 5.2 \le 15 \quad \rightarrow \quad C(5.2) = C_1(5.2) = 5.2\ €$$

- I si emprem un temps de t = 22.5 hores?

$$\text{Com que} \quad 15 \le 22.5 \le 1440 \quad \rightarrow \quad C(22.5) = C_2(22.5) = 7.5 + 0.5 \cdot 22.5 = 18.75\ €$$

A continuació tenim una taula de valors de la funció C(t), i la representació gràfica per a $0 \le t \le 30$.

	t	C(t)
C_1	0	0
	5	5
	15	15
C_2	16	15.5
	20	17.5
	30	22.5
	1440	727.5



➢ El valor absolut d'una funció

Anomenem ***funció valor absolut de* f**, que representem per $|\,\mathbf{f}\,|$, a la següent funció definida a trossos:

$$|\mathbf{f(x)}| = \begin{cases} \mathbf{f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) \ge 0} \\ \mathbf{-f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{f(x) < 0} \end{cases}$$

En el cas particular de $h(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtenim la ***funció valor absolut de* x**:

$$|h(x)| = |\,\mathbf{x}\,| = \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{-x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

Exemple 16

Representem gràficament les funcions:

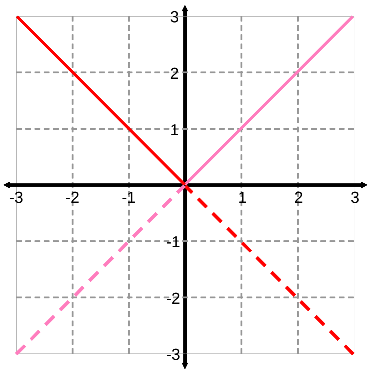
$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = |\,x^2 - 1\,| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \ge 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

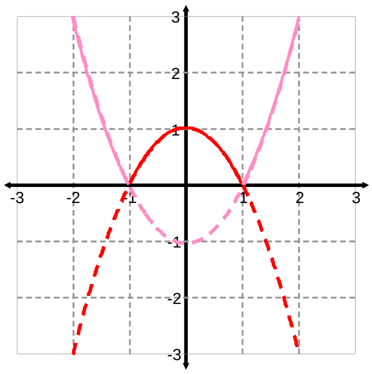
Com que $x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1 \Rightarrow \mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 - 1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \ge 1 \text{ o } x \le 1} \\ \mathbf{-x^2 + 1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{-1 < x < 1} \end{cases}$

Per a representar f i g, representem sobre els mateixos eixos les funcions que defineixen les seues branques:

$f_1(x) = x$ i $\mathbf{f_2(x) = -x}$ $\qquad$ $g_1(x) = x^2 - 1$ i $\mathbf{g_2(x) = -x^2 + 1}$

Les gràfiques de f i de g són, respectivament, els "trossos" dibuixats en traç continu.





23 Expressa una funció que represente el cost (en euros) de l'aigua domèstica en funció del consum realitzat (en m^3) a partir de les següents dades:
(A) Els 15 primers m^3 tenen un cost de 0.25 € per m^3.
(B) Els 30 següents m^3 costen a 0.40 € per m^3.
(C) A partir dels 45 m^3 costen a 1 €/ m^3.

24 Representa gràficament les funcions

(A) $f(x) = |2x - 3|$ $\qquad$ (B) $g(x) = |x^2 - 3x - 4|$ $\qquad$ (C) $h(x) = \left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ $\qquad$ (D) $t(x) = \left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

1.7 Suma i diferència de funcions

Considerem les funcions f i g. Anomenem:

- ***Funció suma de* f *i* g**, que representem per **f + g**, a la funció les imatges de la qual són:

$$\mathbf{(f + g)(x) \;=\; f(x) + g(x)}$$

- ***Funció diferència de* f *i* g**, representada per **f – g**, a la funció les imatges de la qual són:

$$\mathbf{(f - g)(x) \;=\; f(x) - g(x)}$$

Els respectius dominis són $\mathbf{D_{f+g} = D_f \cap D_g}$ i $\mathbf{D_{f-g} = D_f \cap D_g}$.

Exemple 17

En general hi ha moltes funcions que són suma d'altres dues. Una d'elles és la funció de costs totals d'una empresa

$$C(x) = C_0 + C_V(x)$$

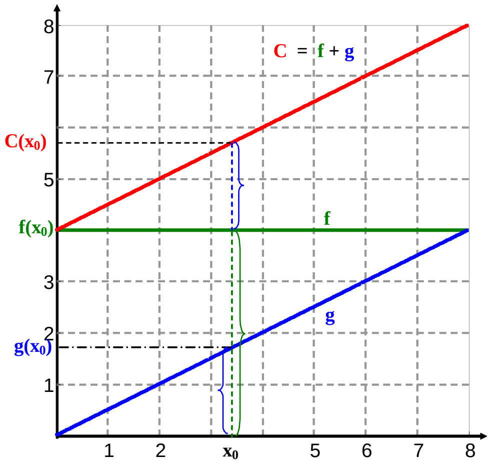
on x representa les unitats produïdes.

Aquesta funció és la suma de la *funció constant de costs fixos*, $f(x) = C_0$, i la *funció lineal de costs variables* $g(x) = C_V(x)$.

Per exemple, si $f(x) = 5 = C_0$ i $g(x) = \frac{1}{2}x = C_V(x)$:

$$C(x) = f(x) + g(x) = 5 + \frac{1}{2}x$$

En un context econòmic com el present, els dominis de f i g són $[0, +\infty[$, i el domini de C(x) és $[0, +\infty[$.



Exemple 18

Calculem el domini de la funció $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-4}$.

Com que h és la suma de les funcions racionals $f(x) = \frac{1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$, de dominis:

$$D_f = \mathbb{R}\sim\{\text{solucions de } x - 1 = 0\} = \mathbb{R}\sim\{1\} \text{ i } D_g = \mathbb{R}\sim\{\text{solucions de } x^2 - 4 = 0\} = \mathbb{R}\sim\{-2, 2\}.$$

Aleshores $\mathbf{D_h} = D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}\mathbf{\sim\{-2, 1, 2\}}$.

25 Obtén l'expressió de les funcions suma i diferència, i els dominis respectius, en els següents casos:

(A) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-3}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-x}$ (C) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

26 Calcula el domini de la funció $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x}$.

1.8 Producte i quocient de funcions

Considerem les funcions f i g. Anomenem:

- ***Funció producte de* f *i* g**, **f · g**, a la funció amb imatges **(f · g)(x) = f(x) · g(x)**.
- ***Funció quocient de* f *i* g**, **f/g**, a la funció amb imatges **(f/g)(x) =** $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Els respectius **dominis** són $\mathbf{D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g}$ i $\mathbf{D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \sim \{\text{solucions de } g(x) = 0\}}$.

Exemple 19

Considerem les funcions, amb domini $\mathbb{R}$, definides per:

$$f(x) = 2x \quad \text{i} \quad g(x) = x$$

Calculem les funcions producte i quocient de f i g:

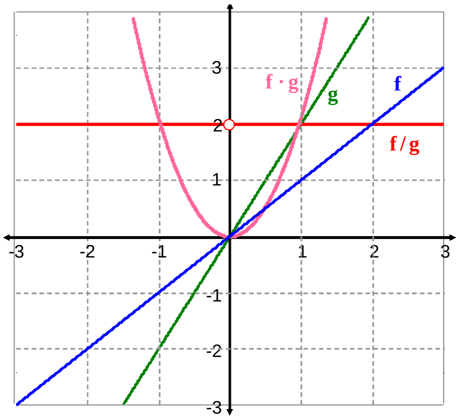
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot 2x = 2x^2$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x} = 2, \text{ sempre que } x \neq 0$$

perquè g(0) = 0, i no podem dividir per zero.

Aleshores: $\mathbf{(f \cdot g)(x) = 2x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\mathbf{(f / g)(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \sim \{ 0 \}}$



Exemple 20

Calculem el domini de la funció $h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x} - 4}$.

Aquesta funció és el quocient de les funcions:

$f(x) = \sqrt{x-2}$, amb domini $D_f = [2, +\infty[$ i $g(x) = \sqrt{x} - 4$, amb domini $D_g = [0, +\infty[$

Aleshores $D_h = (D_f \cap D_g) \sim \{ \text{solucions de } \sqrt{x} - 4 = 0 \}$

Però $D_f \cap D_g = [2, +\infty[\cap [0, +\infty[= [2, +\infty[$

i $\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$

Aleshores $\mathbf{D_h = [2, +\infty[\sim \{16\} = [2, 16[\cup]16, +\infty[}$.

27 Obtén l'expressió de les funcions producte i quocient, i els dominis respectius, en els següents casos:

(A) $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ (B) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$ (C) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

28 Són iguals els dominis de les funcions $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ i $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$?

1.9 Composició de funcions

Les operacions suma, resta, producte i quocient són una extensió de les operacions numèriques al conjunt de les funcions. L'operació que definim a continuació no té relació amb els nombres, però cal dir que la majoria de les funcions són compostes d'altres més elementals. La seua importància es veurà al llarg dels pròxims capítols.

Donades dues funcions f i g, anomenem ***funció composta de* f *i* g**, representada per **g o f** (llegim f composat amb g), a aquella funció les imatges de la qual s'obtenen de l'expressió:

$$\mathbf{(g \circ f)(x) = g((f(x))}$$

Exemple 21

Considerem les funcions $f(x) = 2x$, amb domini $D_f = \mathbb{R}$ i $g(x) = \sqrt{x}$, amb domini $D_g = [0, +\infty[$.
Calculem el valor de la funció composta **g o f** en $x = 8$, $x = 1$, $x = 2$.

Per a obtenir $(g \circ f)(8)$, efectuem dues operacions; primer calculem el valor de f en 8, i després el valor de g en f(8):

$$f(8) = 2 \cdot 8 = 16 \quad \rightarrow \quad g(f(8)) = g(16) = \sqrt{16} = 4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{(g \circ f)(8) = 4}$$

$$8 \xrightarrow{f(x) = 2x} 16 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{x}} 4$$

De la mateixa manera, calculem les altres imatges:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = \sqrt{2} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{(g \circ f)(1) = \sqrt{2}}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = \sqrt{4} = 2 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{(g \circ f)(2) = 2}$$

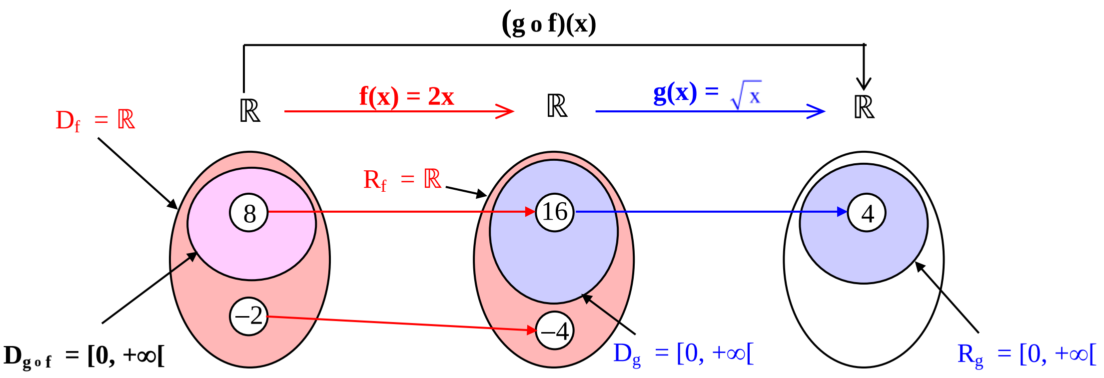
Però hi ha elements del conjunt inicial que no tenen imatge; per exemple:

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-4) = \mathbf{?} \qquad \text{ja que } \sqrt{-4} \text{ no és un nombre real}$$

Observa que $f(-2)$ es pot calcular però no $g(f(-2)) = g(-4)$, perquè -4 no pertany al domini de g (cosa que ocorre en aquest exemple amb qualsevol nombre negatiu). Deduïm que

$$\mathbf{(g \circ f)(x)} \quad \text{només es pot calcular si} \quad \mathbf{x \in D_f} \ \text{ i } \ \mathbf{f(x) \in D_g}$$

Il·lustrem amb diagrames de Venn la composició de f i g:



➢ El domini de la funció composta

El domini de la funció composta **g o f** està format pels elements del domini de f les imatges dels quals pertanyen al domini de g:

$$\mathbf{D_{g\,o\,f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}}$$

Exemple 22

Donades les funcions f i g de l'exemple 21, calculem l'expressió general de gof, fog i els seus dominis.

- Actuant per a x de la mateixa manera que allí ho fem per al nombre 8:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \sqrt{2x}$$

Per a calcular el valor de g(2x) és necessari que $2x \geq 0$, que ocorre si $x \geq 0$, per tant $\mathbf{D_{g\,o\,f} = [0, +\infty[}$.

- De la mateixa forma, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}$ **.**

Per a calcular el valor de g(x) és necessari que $x \geq 0$, per tant també $\mathbf{D_{f\,o\,g} = [0, +\infty[}$.

Observem que **la funció composta f o g és diferent de g o f**.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f(x) = 2x"] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f)(x) = g(2x) = \sqrt{2x}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g(x) = \sqrt{x}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g(x) = \sqrt{x}"] \arrow[rr, bend right, "(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f(x) = 2x"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple 23

Obtenim el domini de la funció irracional donada per $F(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

Aquesta funció és composta de les funcions $g(x) = \sqrt{x}$ i $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

perquè $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}} = F(x)$.

Sempre que $x \neq 1$ ($x \in D_f$) i que $\dfrac{x^2+1}{x-1} \geq 0$ ($f(x) \in D_g$) existirà la funció F = g o f. A més:

$$\frac{x^2+1}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

D'aquesta manera, si $x \neq 1$ i $x > 1$ existeix la funció composta, és a dir, $D_{g\,o\,f} = \mathbf{]1, +\infty[}$.

29 Obtén les funcions compostes f o g i g o f en els següents casos:

(A) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3 - 1$ (B) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ (C) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$

(D) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (E) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ (F) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Propietats de la composició de funcions

1 Hi ha una funció que al compondre-la amb qualsevol altra no altera les imatges d'ella. És l'element neutre de la composició, l'anomenada ***funció identitat*** **i(x)**:

$$\mathbf{i}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{definida per} \quad \mathbf{i(x) = x},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Per a qualsevol funció f: $\quad \mathbf{f \text{ o } i = f} \qquad \mathbf{i \text{ o } f = f}$

2 Si f és una funció injectiva, la seua recíproca f^{-1} és **inversa de f respecte de la composició**, és a dir, al compondre-les entre si obtenim la identitat (en els dominis reduïts):

(A) $\mathbf{(f^{-1} \text{o } f)(x) = i(x) = x,\ \forall x \in D_f}$ **(B)** $\mathbf{(f \text{ o } f^{-1})(x) = i(x) = x,\ \forall x \in D_{f^{-1}}}$

1 Com que $i(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, la definició de composició de funcions ens condueix a

$$(f \text{ o } i)(x) = f(i(x)) = f(x) \quad \forall x \in D_f \ \text{ (ja que } i(x) = x)$$

$$(i \text{ o } f)(x) = i(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in D_f \ \text{ (ja que } f(x) \in \mathbb{R})$$

2 Si f és injectiva, la seua correspondència recíproca f^{-1} verifica $D_{f^{-1}} = R_f$ i $R_{f^{-1}} = D_f$.

Per a qualsevol $x \in D_f$, $y \in R_f$ tenim que:

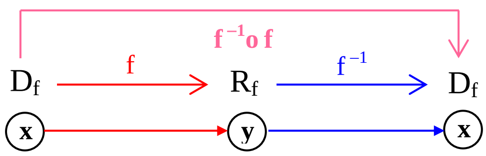
$$\mathbf{f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x} \quad (*)$$

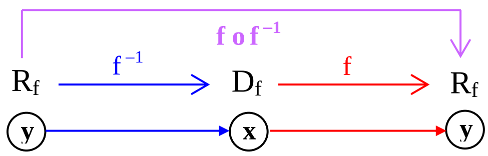
(A) Per a qualsevol $x \in D_f$, si $f(x) = y$:

$$(f^{-1} \text{o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \overset{(*)}{=} x$$

(B) Per a qualsevol $y \in R_f$, si $f^{-1}(y) = x$:

$$(f \text{ o } f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) \overset{(*)}{=} y$$





Exemple 24

Donada la funció $\mathbf{f(x) = 3x - 5}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, obtenim la seua funció recíproca f^{-1} i comprovem que:

$$f \text{ o } f^{-1} = i \quad \text{i} \quad f^{-1} \text{ o } f = i$$

Per a obtenir la funció recíproca, canviem x per y en l'equació y = f(x) i a continuació aïllem y:

$$y = f(x) \quad \to \quad y = 3x - 5 \quad \to \quad x = 3x - 5 \quad \to \quad y = \frac{x+5}{3}$$

Com que la solució és sempre única, **f és injectiva** i la seua correspondència inversa $\mathbf{f^{-1}}$ **és una funció**:

$$\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Calculem la composició de f amb la seua inversa:

$$(f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 5) = \frac{3x - 5 + 5}{3} = x \quad \to \quad \mathbf{f^{-1} \text{ o } f = i}$$

$$(f \text{ o } f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+5}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+5}{3} - 5 = x \quad \to \quad \mathbf{f \text{ o } f^{-1} = i}$$

Exemple 25

- Donada la funció definida per $f(x) = \frac{x}{x-1}$ per a $x \neq 1$, calculem la composició $f \circ f$:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x \quad \textbf{(1)}$$

sempre que $x \neq 1$ (requisit necessari per a aplicar f) i $\frac{x}{x-1} \neq 1$ (necessari per a aplicar f per segona vegada). Aquest últim requisit és cert sempre en aquesta funció.

Si $(f \circ f)(x) = x$ per a tot $x \neq 1$ $\rightarrow$ $\mathbf{f \circ f = i}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f^{-1} = f}$

La funció recíproca de f és ella mateixa: $\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}}$, per a $\mathbf{x \neq 1}$.

- Calculem la funció recíproca f^{-1} amb el mètode habitual. De l'equació $y = f(x)$, intercanviem x per y, i a continuació aïllem y:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad x(y-1) = y \quad \Leftrightarrow \quad xy - x = y \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad xy - y = x \quad \Leftrightarrow \quad y(x-1) = x \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y = \frac{x}{x-1}}$$

Obtenim la mateixa funció recíproca:

$$\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, \text{ per a } x \neq 1}$$

Observació

No hem de confondre la inversa respecte de la composició amb la inversa respecte del producte:
Donat qualsevol nombre real $a \neq 0$, sabem que el seu invers **respecte del producte** s'escriu indistintament per a^{-1} o per $1/a$. En canvi, en funcions açò no és així. No és el mateix f^{-1} que $1/f$:

- La inversa **respecte de la composició de funcions** de la funció $f(x) = 3x - 5$ és la funció $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$, com hem vist en l'exemple 24, i verifica que $\mathbf{f \circ f^{-1} = i}$**,** i que $\mathbf{f^{-1} \circ f = i}$:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x+5}{3}\right) = 3\,\frac{x+5}{3} - 5 = x \quad \rightarrow \quad f \circ f^{-1} = i$$

- La inversa **respecte del producte de funcions** de la funció $f(x) = 3x - 5$ és la funció $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x-5}$ i verifica que $\mathbf{f \cdot \frac{1}{f} = 1}$:

$$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = (3x-5) \cdot \frac{1}{3x-5} = 1$$

30 Donada $f(x) = \frac{2x-1}{3}$, obtén les funcions $\frac{1}{f}$ i f^{-1}, calcula els dominis, i comprova que $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ i $f \circ f^{-1} = i$.

31 Obtén la funció recíproca o inversa de les següents funcions, i comprova que es verifica que $f\text{o}f^{-1} = f^{-1}\text{o}f = i$:

(A) $f(x) = 3x + 5$ (B) $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ (C) $f(x) = \frac{x+2}{x}$ (D) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$

(E) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (F) $f(x) = x^3 + 1$ (G) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ (H) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Problemes del capítol 1

1 Considera la correspondència entre els nombres enters definida per "cada nombre enter està relacionat amb els seus múltiples". Calcula:
(A) f(10), f(20), $f^{-1}(20)$ i $f^{-1}(10)$.
(B) El domini i el recorregut.
(C) L'expressió que determina la correspondència. Assoleix la categoria de funció?

2 Troba l'expressió general de la funció f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que:
f(1) = 3 f(2) = 5 f(3) = 7 f(4) = 9 f(5) = 11…

3 Representa gràficament les funcions següents:
(A) f(x) = 2x − 1 (B) f(x) = −2x + 3 (C) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ (D) $f(x) = \frac{4}{5}x$

4 Obtén les funcions lineals o afins les gràfiques de les quals passen pels punts:
(A) P(1, 3) i Q(5, −1). (B) P(1, 1) i Q(4, 10) . (C) P(−4, −3) i Q(5, 3).
(D) P(2, 6) i Q(0.5, 1.5). (E) P(2, 3) i Q(5, 3). (F) P(1, 1/3) i Q(1/2, 4/3).

5 Cada kg de dacsa costa 1.6 €. Expressa una funció que represente el cost de la compra depenent de la quantitat comprada. Quin significat té el nombre 1.6?

6 Dues carnisseries, A i B, tenen beneficis de 10 500 € i 11 000 € al elaborar 1 000 kg de carn, i unes pèrdues de 500 € i 1000 € respectivament si no elaboren cap quantitat. Expressa, per a cada carnisseria, el benefici en funció de la quantitat x de carn elaborada. Quina de les dues empreses obté majors beneficis? Realitza una representació gràfica que ens mostre la solució. Quin significat econòmic tenen els pendents?

7 Comprem caquis i maduixes per un total de 60 €. El preu per kg dels caquis és de 2 €, i el de les maduixes, de 3 €. Anomenem x i y, respectivament, al nombre de kg de caquis i de maduixes que comprem.
(A) Si comprem 6 kg de caquis, quants kg de maduixes podem comprar?
(B) Obtén l'equació de la correspondència que relaciona x amb y.
(C) Expressa y en funció de x, quin tipus de funció és? Quin és el seu domini i el seu recorregut?

8 Una persona vol comprar un cotxe, i no sap si comprar-lo de gasoil o de gasolina. El de gasoil té un preu de 20 000 €, però cada km recorregut li costarà a 0.10 €. El de gasolina té un preu inferior, de 16 000 €, però cada km recorregut li costarà a 0.12 €.
(A) Expressa dues funcions, una per a cada tipus de cotxe, que ens proporcionen el cost total (cotxe més combustible) en funció del nombre x de km recorreguts. Quin tipus de funcions són?
(B) A partir de quants km és convenient comprar el cotxe de gasoil i no el de gasolina?

9 La relació entre la temperatura de l'aire T (en ºF) i l'altitud h (en metres sobre el nivell del mar) és lineal per a $0 \leq h \leq 20\,000$. Si la temperatura al nivell del mar és de 60ºF, i per cada 5 000 metres d'altitud que es puja, la temperatura de l'aire baixa 18ºF:
(A) Expressa T en funció de h.
(B) Calcula la temperatura de l'aire a una altitud de 12 000 metres.
(C) Calcula l'altitud per a la qual la temperatura de l'aire és de 0ºF.

10 Suposem que la quantitat d'oxigen que hi ha en un llac (en mg/l) decreix amb la profunditat de forma lineal. Un biòleg obté a 10 m de profunditat un contingut d'oxigen de 7.3 mg/l i a 40 m un contingut de 4.9 mg/l.
(A) Quin serà el contingut en oxigen a 30 m de profunditat? I a 60 m?
(B) A quina profunditat el contingut en oxigen serà de 0.2 mg/l?

11 Suposem que el preu d'un servei telefònic depèn de la duració d'aquest servei per mitjà d'una funció afí. Si el preu per 10 minuts és de 4 € i el preu per 20 minuts és de 6.5 €:
(A) Calcula el preu que es pagarà per una hora de servei, i per dues hores de servei.
(B) Calcula el temps de servei pel qual es pagaran 200 €.

12 El tipus d'interès que ofereix als seus clients una caixa d'estalvis va ser, als 3 mesos d'haver sigut constituïda, del 7.25%, mentre que als 12 mesos va ser del 5%.
(A) Expressa el tipus d'interès en funció del temps transcorregut amb una funció afí.
(B) Obtén el tipus d'interès que oferiria la caixa als 24 mesos de ser constituïda.
(C) Obtén quants mesos han de passar perquè el tipus d'interès siga del 1.5%.

13 Al gener del 2004 el preu mitjà del m^2 de l'habitatge va ser de 1 435 €, mentre que a l'agost del mateix any va ser de 1 603 €. Si representem la relació entre el temps (en mesos des de gener del 2004) i el preu mitjà amb una funció afí:

(A) Obtén l'expressió de aquesta funció.
(B) Quin seria el valor del preu mitjà per a març del 2004? I per a gener del 2005?
(C) Quant augmenta el preu mitjà cada mes?
(D) Quin significat econòmic té el pendent de la funció afí d'aquest problema?
(E) Quants mesos han de passar perquè el preu mitjà de l'habitatge supere la barrera dels 2000 €?

14 Suposem que el consum personal diari d'aigua creix amb la temperatura. Sabem que amb una temperatura mitjana de 12º el consum d'aigua és de 136 litres, i amb una temperatura de 16º el consum és de 168 litres.

(A) Amb les dades anteriors, expressa el consum en funció de la temperatura amb una funció afí.
(B) Amb l'anterior funció, quin seria el consum d'aigua amb una temperatura de 22º?
(C) Per a quina temperatura mitjana es consumirà 280 litres per persona?
(D) Quin és el significat del pendent en aquest problema?

15 Representa gràficament les següents funcions polinòmiques de grau 2:

(A) $f(x) = 9 - x^2$ (B) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ (C) $f(x) = -6x^2 + x + 1$ (D) $f(x) = (x - 1)^2$

16 Obtén l'equació de la funció polinòmica de grau 2 que passa pels punts:

(A) A(−1, 6), B(1, 0) i C(2, 0). (B) A(−1, 5), B(1, 3) i C(2, 11).

17 Una funció polinòmica de segon grau s'anul·la en $x = 2$ i també en $x = -2$. Obtén aquesta funció. És única?

18 La funció $A(t) = 900t - 30t^2$ ens dóna, per a qualsevol instant t de temps (en segons), l'altura en metres que assoleix la trajectòria d'un projectil.

(A) Calcula els instants de temps en què assoleix els 6.000 metres d'altura.
(B) Calcula la duració del vol del projectil, suposant que és llançat en una superfície horitzontal.
(C) Calcula la major altura que assoleix el projectil i l'instant de temps en què l'assoleix.

19 Un submarí dispara verticalment un projectil. L'equació $y = -x^2 + 50x - 400$ expressa l'altura (en decàmetres) sobre el nivell del mar a què es troba el projectil, en funció del temps (en segons) des que és llançat.

(A) A quina profunditat es troba el submarí?
(B) A quina altura es troba el projectil als 5 segons de ser llançat? I als 20 segons?
(C) En quin instant de temps el projectil surt del mar? Quan torna a caure al mar?
(D) Quina és la màxima altura que assoleix el projectil? Quan assoleix aquesta altura?

20 La velocitat (en m/s) que assoleix un atleta en una carrera de 200 metres s'expressa en funció de l'espai recorregut x (en metres) per l'expressió $f(x) = -0.00055x\,(x - 300)$.

(A) Quina velocitat té quan ha recorregut 50 metres?
(B) A quina velocitat arriba a la meta?
(C) Calcula la distància recorreguda quan assoleix la màxima velocitat. Quina és aquesta?

21 L'oferta d'energia elèctrica durant les hores laborables d'un dia s'expressa amb la funció $f(x) = -2x^2 + 32x$, amb $0 \le x \le 12$, (x donat en hores i f(x) en milions de kW), mentre que la demanda d'energia en aquest període de temps s'expressa amb la funció $g(x) = 8x + 40$, amb $0 \le x \le 12$.

(A) En quins instants de temps l'oferta és igual a la demanda?
(B) En quin període de temps l'oferta supera a la demanda?
(C) Quina és la màxima quantitat d'energia oferida, i quina quantitat s'ofereix?
(D) Quan l'oferta supera a la demanda es produeixen excedents. Quan són màxims aquests?

22 La següent taula mostra dades sobre el benefici mensual (en milers d'euros) d'una empresa:

Mes	Gener (1)	Febrer (2)	Març (3)
Benefici	25	30	33

(A) Obtén la funció polinòmica de grau 2 que s'ajusta a aquestes dades.
(B) Amb la funció obtinguda, quina és la predicció del benefici per al mes d'agost?
(C) Quin és el primer mes amb pèrdues? Expressa el seu valor.
(D) En quin mes de l'any s'obtindria major benefici? Quin és eixe major benefici?

23 Dos projectils A i B són llançats fins caure en la superfície del mar. Les següents funcions expressen l'altitud en metres, sobre el nivell del mar, a què es troben en cada instant de temps x, en segons.

Projectil A: $f(x) = -25x^2 + 750x$ Projectil B: $g(x) = -5x^2 + 250x + 2000$

(A) Quin projectil aplega a major altitud? Quina és eixa major altitud?
(B) Quan es troben els dos projectils a la mateixa altitud? Quines són eixes altituds?
(C) En quins instants de temps es troba el projectil A 1000 m més alt que el B?
(D) Quan la diferència d'altitud de A respecte de B és màxima? Quina és eixa màxima diferència?
(E) Representa gràficament les dues funcions en els mateixos eixos de coordenades.

24 L'altura en metres que assoleix un projectil en funció del temps en segons des que és llançat es pot expressar amb una funció quadràtica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$.
(A) Obtén els valors de a i de b per als quals el projectil es troba als 10 i als 20 segons a 6000 metres d'altura.
(B) Calcula la major altura que assoleix el projectil i l'instant de temps en que l'assoleix.

25 Un projectil es troba, al segon de ser llançat, a 190 metres d'altura, als 2 segons, a 360 metres, i als 5 segons, a 750 metres d'altura. Suposem que l'altura **y** en funció del temps **x** es pot expressar amb una funció quadràtica de la forma $y = ax^2 + bx + c$.
(A) Obtén la funció quadràtica que s'ajusta a aquestes dades.
(B) Obtén la major altura que assoleix el projectil i l'instant en què assoleix aquesta màxima altura.

26 Sabem que la velocitat d'un mòbil als 10 minuts de començar un trajecte era de 250 km/h i als 30 minuts era de 450 km/h, la qual va ser la màxima velocitat assolida al llarg del trajecte.
(A) Obtén els valors de a, b i c pe als quals la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa la velocitat en funció del temps transcorregut.
(B) Quina va ser la duració total del trajecte?

27 Una empresa ha estimat que anualment els seus ingressos en euros venen donats per la funció $I(x) = 7x^2 + 9000x$, mentre que els costs venen donats per la funció $C(x) = 11x^2 + 3000x + 560000$, on x representa el nombre d'unitats fabricades i venudes. Si els beneficis són els ingressos menys els costs:
(A) Expressa la funció benefici, i obtén quantes unitats cal vendre per a maximitzar el benefici. Quin és el valor d'aquest màxim benefici?
(B) A partir de quina quantitat d'unitats l'empresa obté beneficis?

28 Una agència proposa un viatge conjunt a 60 persones, al preu de 1 000 € per persona. Amb la finalitat d'obtenir el nombre més gran possible de clients, per cada viatger addicional als inicialment proposats, redueix en 10 € el preu del viatge per persona.
(A) Expressa els ingressos totals de l'agència en funció del nombre addicional de viatgers x.
(B) A partir de quin nombre addicional de viatgers l'agència perd diners?
(C) Quin és el nombre addicional de viatgers que proporciona majors ingressos a l'agència? Quins són aquests ingressos màxims?

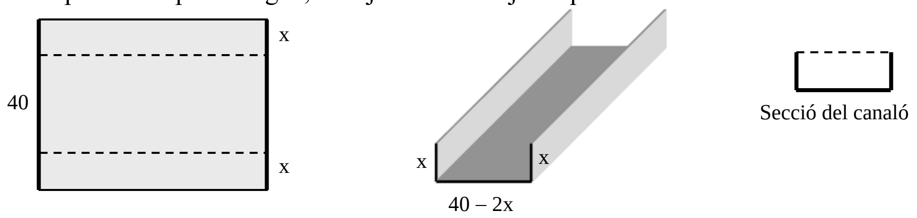
29 Un bancal té actualment 20 arbres que produeixen 250 kg de fruita cadascun. Per a augmentar la producció es vol trasplantar més arbres, però s'estima que per cada arbre addicional trasplantat, la producció de cada arbre del bancal disminuirà en 5 kg.
(A) Obtén una funció que expresse la producció total en funció del nombre addicional x d'arbres trasplantats.
(B) Obtén el nombre d'arbres que cal trasplantar perquè la producció total siga màxima i el valor d'aquesta màxima producció.

30 Volem construir una habitació rectangular que tinga un perímetre de 20 metres. Anomenem x i y a les dimensions de l'habitació i A la seua àrea.
(A) Expressa y en funció de x. Quin tipus de funció és?
(B) Expressa A en funció de x. Quin tipus de funció és?
(C) Obtén les dimensions de l'habitació amb major àrea possible, i el valor d'aquesta àrea.

31 Obtén el major valor que pot prendre el producte de dos nombres positius que sumen entre si una unitat. Repeteix la pregunta si els nombres sumen entre si m unitats.

32 Suposem que el preu en euros d'una pedra preciosa és igual al quadrat del seu pes en grams. Una pedra que pesa 10 grams (val 100 €) es trenca en dues parts.
(A) Si una part pesa 2 grams, calcula el preu total de les dues parts. Quants diners hem perdut?
(B) Si una part pesa x grams, expressa el preu total de les dues parts en funció de x.
(C) Obtén el valor de x para al qual el preu total de les dues partes és mínim i calcula aquest valor.

33 Un metal·lúrgic vol construir canalons de secció rectangular doblegant, pels dos laterals, una porció de longitud x d'una làmina de metall de 40 cm d'amplària. L'àrea de la secció del canaló està directament relacionada amb la capacitat del canaló per a transportar aigua, a major secció major capacitat.



(A) Si vol que l'àrea de la secció siga de 150 cm^2, quina longitud x ha de doblegar?
(B) I si vol que l'àrea siga de 180 cm^2?
(C) Expressa l'àrea de la secció del canaló en funció de x.
(D) Obtén el valor de x per al qual l'àrea de la secció del canaló té la major àrea possible i, per tant, pot transportar més aigua.

34 Una aixeta aboca 5 m^3 d'aigua per hora. Estableix una funció que calcule el temps que tardaria a omplir un dipòsit en funció del volum del mateix.

35 Volem construir una habitació rectangular que tinga una àrea de 25 m^2. Anomenem x i y a les longituds dels seus costats, i p al seu perímetre.
(A) Expressa y en funció de x. Quin tipus de funció obtenim?
(B) Expressa p en funció de x. Quin tipus de funció obtenim?
(C) Obtén el valor de x per al qual el perímetre de l'habitació és de 40 metres.
(D) Repeteix l'anterior pregunta per a perímetres de 35, 30, 25, 20 i 15 metres. A la vista dels resultats, quin és el menor perímetre que pot tenir l'habitació? Per què?

36 Calcula el domini de les següents funcions racionals:

(A) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$ (B) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x-2}$ (C) $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$

(D) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+3x+4}$ (E) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-x-1}$ (F) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-7x+6}$

(G) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-2}$ (H) $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3x^2+2}$ (I) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^4-5x^2+4}$

(J) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-5x-6}$ (K) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-3x^2-2x}$ (L) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+x^2-2x-2}$

(M) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$ (N) $f(x)=\dfrac{x}{4x^3-8x^2-x+2}$ (Ñ) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^3-8x-8}$

37 Obtén el domini de les següents funcions irracionals:

(A) $f(x)=\sqrt{-x}$ (B) $f(x)=\sqrt{5-2x}$ (C) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ (D) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+12}$

(E) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$ (F) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ (G) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x-2}$ (H) $f(x)=\sqrt{x^3-3x-2}$

(I) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$ (J) $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2}$ (K) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ (L) $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+6}$

38 Obtén el domini de les següents funcions irracionals:

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$ (B) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ (C) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$ (D) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-2}}$

(E) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x}}$ (F) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{9-x^2}}$ (G) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}}$ (H) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}}$

39 Representa gràficament la funció $f(x)=\dfrac{6}{x}$. Agafa un punt qualsevol de l'anterior gràfica com a vèrtex d'un rectangle, sent el seu vèrtex oposat el punt O(0, 0) i els altres dos vèrtexs sobre els eixos de coordenades. Quant mesura la seua àrea?

40 Representa gràficament les següents funcions i expressa les equacions de les asímptotes:

(A) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ (B) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ (C) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (D) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(E) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (F) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (G) $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x-1}$ (H) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$

41 Una persona compra dos productes immobiliaris A i B per un preu de 120 € i 90 €, respectivament. El producte A incrementa el seu valor mensualment en un 2%, mentre que el B ho fa en un 4%. Anomenem x al nombre de mesos transcorreguts des de la compra dels dos productes.

(A) Obtén dues funcions f(x) i g(x) que representen el valor de cada producte x mesos després de ser comprat.
(B) Quants mesos passaran perquè el valor d'aquests dos productes siga el mateix?
(C) Anomenem p(x) a la proporció que representa el valor del producte A respecte de la suma dels valors dels dos productes. Quin tipus de funció obtenim?
(D) Quants mesos tenen que passar perquè la proporció p(x) siga de 0.5? I de 0.45? I de 0.3? Quin és el menor valor que pot prendre aquesta proporció?

42 Una persona pot treballar a domicili fins a 40 hores setmanals ordinàries, i fins a 10 hores extraordinàries. Les hores ordinàries les cobra a 10 €, i les extraordinàries a 25 €. Si treballa totes les hores possibles, a quin preu mitjà li resulta l'hora?
Anomenem x al nombre d'hores extraordinàries treballades. Expressa en funció de x el preu mitjà a què li resulta l'hora, en els següents casos:

(A) Treballa 40 hores ordinàries. (B) Treballa 30 hores ordinàries.
(C) Treballa 20 hores ordinàries. (D) Treballa 10 hores ordinàries.

Quins tipus de funcions són? Quin és el domini de cada funció? Quantes hores extra cal treballar en cada cas perquè el preu mitjà siga d'almenys 12 €?

43 Un jugador de bàsquet ha aconseguit encistellar 25 de 40 tirs lliures intentats en un entrenament. L'endemà, encistella tots els tirs que intenta. Anomenem x al nombre de tirs lliures intentats i encistellats del segon dia i f(x) al tant per cent d'encert que aconsegueix acumular amb els tirs dels dos entrenaments:

(A) Obtén l'expressió de la funció f(x). Quin tipus de funció és?
(B) Quants tirs lliures ha de fer el segon dia per a obtenir un percentatge d'encert total del 75%? I del 90%?
(C) Podrà aconseguir el 100% d'encerts? Per què?

44 El nombre d'individus (en milions) d'una determinada colònia d'insectes varia en funció del temps t (en dies) a través de la funció

$$P(t) = \frac{550t+1000}{t+20}, \quad \forall t \geq 0.$$

(A) Quants insectes hi haurà transcorreguts 30 dies?
(B) Quant de temps passarà perquè hi haja 450 milions d'insectes?
(C) Troba les asímptotes i la representació gràfica. Comprova que la funció creix sempre, voldrà dir que la colònia d'insectes creixerà indefinidament?

45 A cada nombre entre 0 i 3 li fem correspondre la seua part entera. Escriu la funció, definida trossos, corresponent. Representa-la gràficament. Fes el mateix si a cada nombre li fem correspondre la seua part decimal.

46 Una persona compra pomes de qualitat normal, a 0.8 €/kg i pomes de qualitat extra, a 1.4 €/kg.

(A) Si compra 30 kg de pomes de qualitat normal i 20 de qualitat extra, quants diners es gasta? Quin és el preu mitjà per kg del total de pomes comprades?
(B) Obtén una funció p(x) que expresse el preu total per comprar 30 kg de pomes de qualitat normal i x kg de pomes de qualitat extra. Quin tipus de funció és?
(C) Obtén una funció f(x) que expresse el preu mitjà per kg del total de pomes comprades quan compra 30 kg de pomes de qualitat normal i x kg de qualitat extra. Quin tipus de funció és?
(D) Amb f(x) de (C), quants kg de qualitat extra hem de comprar si el preu mitjà és 1.2 €?

47 Les següents equacions amb dues incògnites defineixen correspondències. Amb la variable x representem els elements del conjunt inicial, i amb la variable y els del conjunt final. Comprova quines d'elles són funcions. Obtén les seues correspondències recíproques i indica quines d'elles són també funcions.

(A) $x + 2y = 3$ (B) $3x - 5y = 6$ (C) $xy = 25$ (D) $(x-1)(y+1) = 25$ (E) $x^2y^2 = 25$
(F) $y = 4x^2$ (G) $x = 4y^2$ (H) $x^2 + y^2 = 25$ (I) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (J) $x = y^2 - 2y + 1$

48 Donades les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x + 1$, calcula les composicions fog, gof, fof i gog.

49 Obtén les inverses de les següents funcions:

(A) $f(x) = 2x + 3$ (B) $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$ (C) $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}-1}{4}$ (D) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{4}}$

(E) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$ (F) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-4}{x+2}}$ (G) $f(x) = \dfrac{3x^3-4}{x^3+2}$ (H) $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}$

50 Calcula la inversa de la funció $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. A la vista del resultat, què donarà la composició fof?

51 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ i $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, obtén les funcions compostes fog i gof.

52 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ i $g(x) = \dfrac{2x-1}{3}$:

(A) Calcula les funcions compostes fog i gof.
(B) Calcula les funcions compostes fof i gog.
(C) Calcula la funció inversa de f i la de g.

53 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ i $g(x) = \dfrac{3x+1}{2x+1}$, calcula:

(A) fog. (B) gof. (C) fof. (D) gog. (E) $f^{-1}(x)$. (F) $g^{-1}(x)$.

54 Considerem les següents funcions, amb domini $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ g(x) = \frac{x-1}{x},\ i(x) = x.$$

(A) Ompli el següent quadre, calculant la composició de qualsevol parella de les anteriors funcions.
(B) A al vista dels resultats, quina és la funció inversa de f? I la de g? I la de i?

	i	f	g
i			
f			
g			

55 Donada la funció $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$:

(A) Obtén la funció inversa de f .
(B) Obtén el domini i el recorregut de f.

56 Donada la funció $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$:

(A) Obtén la funció inversa de f.
(B) Obtén el domini i el recorregut de f.

57 Donada la funció $f(x) = \dfrac{3+2x}{4-x}$:

(A) Obtén la funció inversa de f.
(B) Obtén el domini i el recorregut de f.
(C) Obtén les asímptotes de f.

58 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{5}{3+2x}$ i $g(x) = \dfrac{5-3x}{2x}$:

(A) Calcula la funció composta fog. Què dedueixes del resultat?
(B) Obtén el domini i el recorregut de f.

59 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{3}{5-x}$ i $g(x) = \dfrac{5x-3}{x}$:

(A) Calcula la funció composta fog. Què dedueixes del resultat?
(B) Obtén el domini i el recorregut de f.

60 Donades les funcions $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ i $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, obtén la funció composta fog.

61 Calcula el domini de les següents funcions irracionals:

(A) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (B) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-x^2}$ (C) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x-1}}$ (D) $f(x) = \dfrac{1}{5-\sqrt{x-1}}$

(E) $f(x) = \dfrac{1}{4+\sqrt{x^2-9}}$ (F) $f(x) = \dfrac{1}{4-\sqrt{x^2-9}}$ (G) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}-10}$ (H) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{2-\sqrt{x-1}}$

(I) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-10}} - \dfrac{1}{\sqrt{20-x}}$ (J) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-10}-\sqrt{20-x}}$ (K) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10-x}}$

62 Un globus esfèric s'infla mantenint sempre la seua forma. Expressa una funció que determine el radi depenent del seu volum.

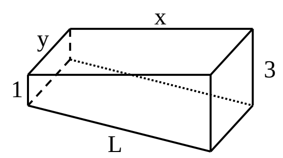
63 Representa gràficament les següents funcions:

(A) $f(x) = | x + 2 |$ (B) $f(x) = | 3 – 2x |$ (C) $f(x) = | 2x^2 – 4 |$ (D) $f(x) = | x – x^2 |$

(E) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ (F) $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{3x+6}\right|$ (G) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ (H) $f(x) = 1 + | x |$

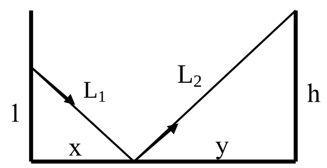
64 Volem construir una piscina rectangular amb un perímetre de 18 metres, que tinga al principi 1 m de profunditat, i al final 3 m (mira la figura). Anomenem x i y a les longituds dels costats de la piscina.

(A) Expressa y en funció de x.
(B) Expressa L en funció de x.
(C) Expressa l'àrea de la superfície de la piscina en funció de x.
(D) Expressa l'àrea del fons de la piscina en funció de x.
(E) Expressa l'àrea de les parets de la piscina en funció de x.



65 Dues parets estan separades per una distància d'un metre. El sòl que les separa esta constituït per una superfície horitzontal reflectora. A un metre d'altura, en la primera paret, situem un focus de llum que projecta un raig lluminós sobre el sòl i que, després de reflectir-se, incideix en l'altra paret. Anomenem x, y, h, L_1 i L_2 a les longituds assenyalades en la figura.

(A) Expressa L_1 en funció de x, i x en funció de L_1.
(B) Expressa y en funció de x.
(C) Expressa h en funció de x, i x en funció de h.
(D) Expressa L_2 en funció de x.
(E) Si $L = L_1 + L_2$, expressa L en funció de x, i x en funció de L.



66 En una ciutat hi ha dos aparcaments subterranis d'ús públic, que obrin 4 hores cada vesprada. L'empresa que explota el primer cobra 0.8 € per cada hora o fracció d'hora que roman cada vehicle, mentre que l'empresa que explota el segon cobra 0.4 € per cada mitja hora o fracció de mitja hora.

(A) Obtén, per a cada empresa, una funció definida a trossos que expresse el preu en funció del temps de permanència en l'aparcament.
(B) Representa en els mateixos eixos cartesians les dues funcions. Quin aparcament és més barat?

67 La següent taula representa l'impost de la renda de les persones físiques. La base líquida són els ingressos anuals declarats. Obtén la funció definida a trossos que determine la quota íntegra o impost a pagar en funció de la base líquida x. Expressa x i f(x) en milers de euros. Realitza una representació gràfica.

Base líquida fins a (euros)	Quota íntegra (euros)	Resta base líquida fins a (euros)	Tipus aplicable (%)
10 000	0	10 000	20
20 000	2 000	10 000	25
30 000	4 500	10 000	30
40 000	7 500	10 000	35
50 000	11 000	En avant	40

68 Un comerç efectua el següent tipus de descomptes: "Per a compres no superiors a 30 € un 10% del valor de la compra; per a compres superiors a 30 € un 10% dels primers 30 € més un 20% de la quantitat que passe de 30 €".

(A) Obtén una funció definida a trossos D(x) que expresse el descompte que correspon a cada valor x de compra, i representa-la gràficament.
(B) Obtén una altra funció P(x) que represente el percentatge sobre el total de la compra x que suposa el descompte D(x) realitzat, i representa-la gràficament.

Solucions de les activitats del capítol 1

1. $A \times B = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \alpha), (d, \alpha), (e, \alpha), (a, \beta), (b, \beta), (c, \beta), (d, \beta), (e, \beta), (a, \gamma), (b, \gamma), (c, \gamma), (d, \gamma), (e, \gamma), (a, \delta), (b, \delta), (c, \delta), (d, \delta), (e, \delta)\}$. **2.** $f(4) = 2$, $f(6) = \{2, 3\}$, $f(8) = \{2, 4\}$, $f(9) = 3$, $f(10) = \{2, 5\}$; $f^{-1}(2) = \{4, 6, 8, 10\}$, $f^{-1}(3) = \{6, 9\}$, $f^{-1}(4) = 8$, $f^{-1}(5) = 10$; $D_f = \{4, 6, 8, 9, 10\}$; $R_f = \{2, 3, 4, 5\}$. **3.** (A) $f(x) = \frac{5-2x}{3}$, $D_f = \mathbb{R}$.

(B) $f(x) = \frac{1-x}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. (C) $f(x) = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$; $D_f = [-2, 2]$. (D) $f(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$, $D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

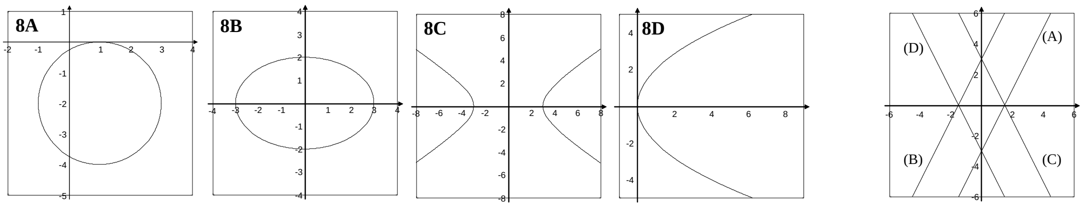
(E) $f(x) = \pm 2\sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty[$. **4.** (A) $g(y) = \frac{5-3y}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$. (B) $g(y) = \frac{1}{y+1}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{-1\}$.

(C) $g(y) = \pm 2\sqrt{1-y^2}$, $D_f = [-1, 1]$. (D) $g(y) = \pm 3\sqrt{1+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}$. (E) $g(y) = \pm\frac{y^2}{4}$, $D_f = \mathbb{R}$. **5.** $4x + 2y = 20$; $y = 10 - 2x$; $D = [0, 5]$, $R = [0, 10]$. **6.** (A) $L = \sqrt{x}$, $x > 0$. (B) $D = \sqrt{x^2+(5-x)^2}$, $0 < x < 5$. (C) $A = xy$, $x, y > 0$.

7. $f(x, y) = \frac{y}{x}$, és una funció, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0\}$, $R_f = \mathbb{R}$; $f(5, 3) = 3/5$; $f^{-1}(2) = \{(x, 2x) \ / \ x \neq 0\}$.

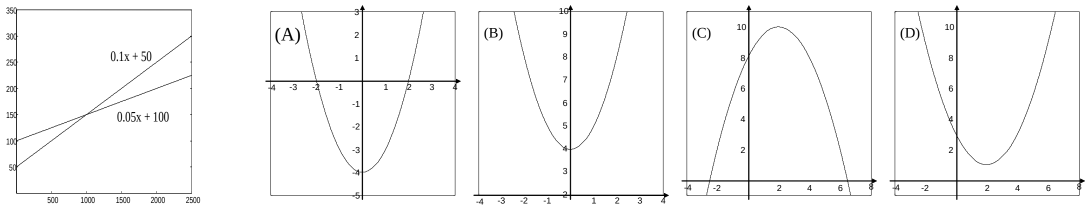
8. (A) $f_1(x) = -2+\sqrt{4-(x-1)^2}$, $f_2(x) = -2-\sqrt{4-(x-1)^2}$, $D = [-1, 3]$. (B) $f_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$. (C) $f_1(x) = = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, $f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, $D =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. (D) $f_1(x) = 2\sqrt{x}$, $f_2(x) = -2\sqrt{x}$, $D = [0, +\infty[$.

9.

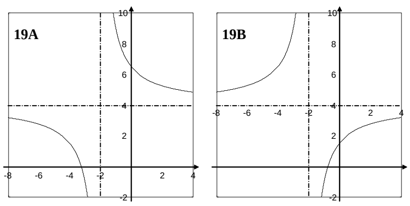


10. $f(x) = \frac{x}{2} - 4$; $g(x) = -x - 3$. **11.** $f(x) = \frac{x+3}{2}$; $g(x) = -x + 3$. **12.** (A) $f_A(x) = 0.1x + 50$, $x > 0$; $f_B(x) = 0.05x + 100$, $x > 0$. (B) Si $x < 1000$, convé A; si $x > 1000$, convé B.

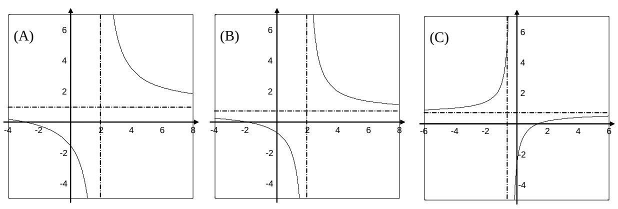
13.



14. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$. **15.** $f(x) = 25x - x^2$; funció quadràtica. **16.** (A) $\mathbb{R} \sim \{-2\}$. (B) $\mathbb{R} \sim \{0, 2, -2\}$. (C) $\mathbb{R} \sim \{3, -3\}$. (D) $\mathbb{R} \sim \{1\}$. (E) $\mathbb{R} \sim \{-1\}$. (F) $\mathbb{R} \sim \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$. (G) $\mathbb{R} \sim \{1, -2\}$. (H) $\mathbb{R} \sim \{1, -1, 3, -3\}$. **17.** $i(x) = \frac{100}{x^2}$; complexió prima si $x \geq 213$ cm, normal si $192 \leq x \leq 213$, grossa si $177 \leq x \leq 192$, obesa si $x \leq 177$ cm. **18.** $f(x) = \frac{1000}{x}$, $x > 0$. **19.** (A) $f(x) = 4 + \frac{5}{x+2}$. (B) $g(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$.



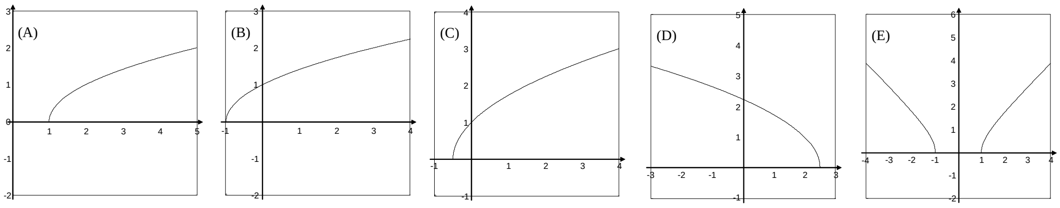
20.



21. (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{3}$, sí. (B) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt[4]{x+1}$, no. (C) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2x-1}$, no. (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$, no.

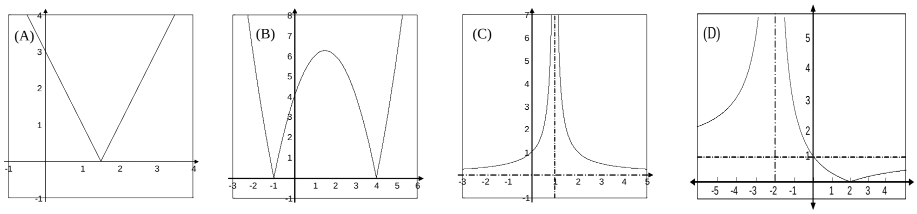
(E) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{x-2}$, sí. **22.** (A) D = $[1, +\infty[$. (B) D = $[-1, +\infty[$. (C) D = $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. (D) D = $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$.

(E) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.



23. $f(x) = \begin{cases} 0.25x & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ 0.4x - 2.25 & \text{si } 15 \le x \le 45 \\ x - 29.25 & \text{si } x \ge 45 \end{cases}$.

24.



25. (A) $(f+g)(x) = \dfrac{2x^2}{x^4-9}$, $(f-g)(x) = \dfrac{-6}{x^4-9}$, D = $\mathbb{R} \sim \{\pm\sqrt{3}\}$. (B) $(f+g)(x) = \dfrac{2x}{x^3-x}$, $(f-g)(x) = \dfrac{-2}{x^3-x}$,

D = $\mathbb{R} \sim \{0, \pm 1\}$. (C) $(f+g)(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}$, $(f-g)(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x-4}$, D = $[4, +\infty[$. **26.** [1, 2].

27. (A) $(f \cdot g) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $(f/g)(x) = (x+2)(x+1)$, D = $\mathbb{R} \sim \{-1)$. (B) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{1-x^2}$, D = $[-1, 1]$;

$(f/g)(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, D = $]-1, 1]$. (C) $(f \cdot g)(x) = 1 - x$, D = $[0, +\infty[$; $(f/g)(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, D = $[0, +\infty[\sim \{1\}$.

28. $D_f =]2, +\infty[$ i $D_g =]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[$. **29.** (A) $(fog)(x) = 2x^3 - 1$, $(gof)(x) = (2x+1)^3 - 1$.

(B) $(fog)(x) = \sqrt{x+1}$, $(gof)(x) = \sqrt{|x|+1}$. (C) $(fog)(x) = \sqrt{x-2}$, $(gof)(x) = \sqrt{x} - 2$. (D) $(fog)(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$,

$(gof)(x) = \dfrac{2x+1}{2x+2}$. (E) $(fog)(x) = x$, $(gof)(x) = |x|$. (F) $(fog)(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $(gof)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

30. $(1/f)(x) = \dfrac{3}{2x-1}$, D = $\mathbb{R} \sim \{1/2\}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$, D = $\mathbb{R}$. **31.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$. (B) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{3}$.

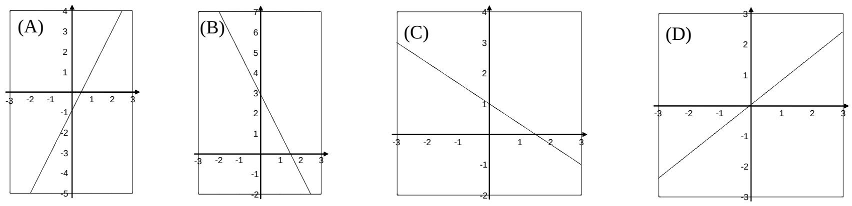
(C) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-1}$. (D) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. (F) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. (G) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2$.

(H) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$.

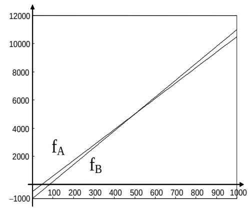
Solucions dels problemes del capítol 1

1. (A) $f(10) = \{\pm10, \pm20, \pm30\ldots\} = \{10n : n\in \mathbb{Z}\}$; $f(20) = \{\pm20, \pm40, \pm60\ldots\} = \{20n : n\in \mathbb{Z}\}$; $f^{-1}(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; $f^{-1}(10) = \{1, 2, 5, 10\}$. (B) $D_f = R_f = \mathbb{N}$. (C) $f(x) = \{nx: n\in \mathbb{N}\} = \{x, 2x, 3x\ldots\}$, no és una funció. **2.** $f(n) = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3.



4. (A) $f(x) = -x + 4$. (B) $f(x) = 3x - 2$. (C) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$; (D) $f(x) = 3x$. (E) $f(x) = 3$. (F) $f(x) = \dfrac{7-6x}{3}$.



5. $f(x) = 1.6x$, $x \geq 0$; 1.6 és el preu per kg.

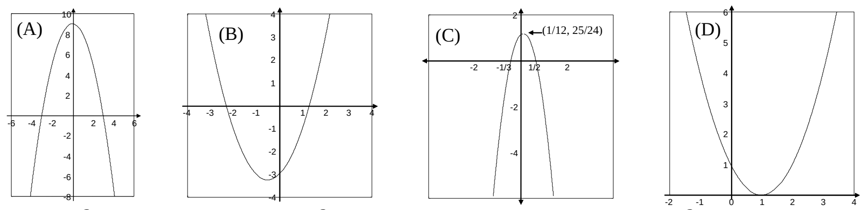
6. Funció benefici per a A: $f(x) = 11x - 500$, $x \geq 0$ (x en kg, f(x) en €);
funció benefici per a B: $g(x) = 12x - 1000$, $x \geq 0$.
A obté major benefici que B si $x < 500$. Els pendents 11 i 12 són el benefici per kg.

7. (A) 16 kg. (B) $2x + 3y = 60$. (C) $y = -\dfrac{2}{3}x + 20$; funció lineal, D = [0, 30], R = [0, 20].

8. (A) De gasoil: $f(x) = 20000 + 0.1x$; de gasolina: $16000 + 0.12x$. (B) A partir de 200000 km.

9. (A) $T = -0.0036h + 60$. (B) 16.8ºF. (C) 16666.7 m. **10.** (A) 5.7 mg/l; 3.3 mg/l. (B) 98.75 m. **11.** (A) 16.5 €, 31.5 €. (B) 794 minuts. **12.** (A) $y = -0.25x + 35$. (B) 2 %. (C) 26 mesos. **13.** A) $f(x) = 24x + 1411$. (B) 1483 €; 1723 €. (C) 24 €. (D) És l'increment del preu mitjà per mes. (E) 24 mesos. **14.** (A) $y = 8x + 40$. (B) 216 litres. (C) 30º. (D) $m = 8$ és l'increment del consum per cada grau de temperatura que augmenta.

15.



16. (A) $f(x) = x^2 - 3x + 2$. (B) $f(x) = 3x^2 - x + 1$. **17.** No és única: $f(x) = a(x^2 - 4)$. **18.** (A) Als 10 i 20 s. (B) 30 s. (C) 6750 m, als 15 segons. **19.** (A) –400 dam. (B) –175 dam; 200 dam. (C) Als 10 s; als 40 s. (D) 225 dam; als 25 s. **20.** (A) 6.875 m/s. (B) 11 m/s. (C) Als 150 m. v = 12.375 m/s. **21.** (A) A les 2 i a les 10 h. (B) En]2, 10[. (C) 128 milions de kW/h, a las 8 h. (D) A las 6 h. **22.** (A) $y = -x^2 + 8x + 18$. (B) 18000 €. (C) Octubre, amb –2000 €. (D) En abril, 34000 €. **23.** (A) El mòbil A, a 5625 m. (B) A les 5 h i a 3125 m; a les 20 hores i a 5000 m. (C) Als 10 i 15 s. (D) Als 12.5 s; 1125 m. **24.** (A) $a = -30$, $b = 900$. (B) 6750 m, als 15 s.

25. (A) $y = -10x^2 + 200x$. (B) 1000 m als 10 segons. **26.** (A) $a = -0.5$, $b = 30$, $c = 0$. (B) 60 minuts.

27. (A) $B(x) = -4x^2 + 6000x - 560000$. 1690000 €, amb 750 unitats. (B) A partir de 100 unitats i fins a 1400 unitats. **28.** (A) $f(x) = (60 + x)(1000 - 10x)$, $x \geq 0$. (B) A partir de 40 més. (C) 20 passatgers, amb benefici de 64000 €. **29.** (A) $y = (20 + x)(250 - 5x)$. (B) 15 arbres més, 6125 kg. **30.** (A) $y = 10 - x$, funció afí.
(B) $A = x(10 - x)$, funció quadràtica. (C) $x = y = 5$ m. $A = 25\ m^2$. **31.** 1/4; $m^2/4$. **32.** (A) 68 € i 32 €.
(B) $y = x^2 + (10 - x)^2$. (C) 5 g i 50 €. **33.** (A) 5 o 15 cm. (B) $10 + \sqrt{10}$ o $10 - \sqrt{10}$ cm. (C) $A = -2x^2 + 40x$.
(D) x = 10 cm. **34.** $f(x) = x/5$, $x \geq 0$. **35.** (A) $y = 25/x$, funció de prop. inversa. (B) $p = 2x + \dfrac{50}{x}$, f. racional.

(C) 10 ± $5\sqrt{3}$ m. (D) 20 és el menor perímetre, perquè és el menor valor de p perquè x tinga solució.

36. (A) $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}$. (B) $\mathbb{R} \sim \{2/3\}$. (C) $\mathbb{R} \sim \{3, -3\}$. (D) $\mathbb{R}$. (E) $\mathbb{R} \sim \{1, -1/2\}$. (F) $\mathbb{R} \sim \{1, 2, -3\}$.

(G) $\mathbb{R} \sim \left\{1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right\}$. (H) $\mathbb{R}$. (I) $\mathbb{R} \sim \{1, -1, 2, -2\}$. (J) $\mathbb{R} \sim \{2, -1\}$. (K) $\mathbb{R} \sim \{0, 2, -1\}$.

(L) $\mathbb{R} \sim \left\{-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$. (M) $\mathbb{R} \sim \{-1\}$. (N) $\mathbb{R} \sim \{2, 1/2. -1/2\}$. (Ñ) $\mathbb{R} \sim \{2, -1\}$. **37.** (A) $]-\infty, 0]$.

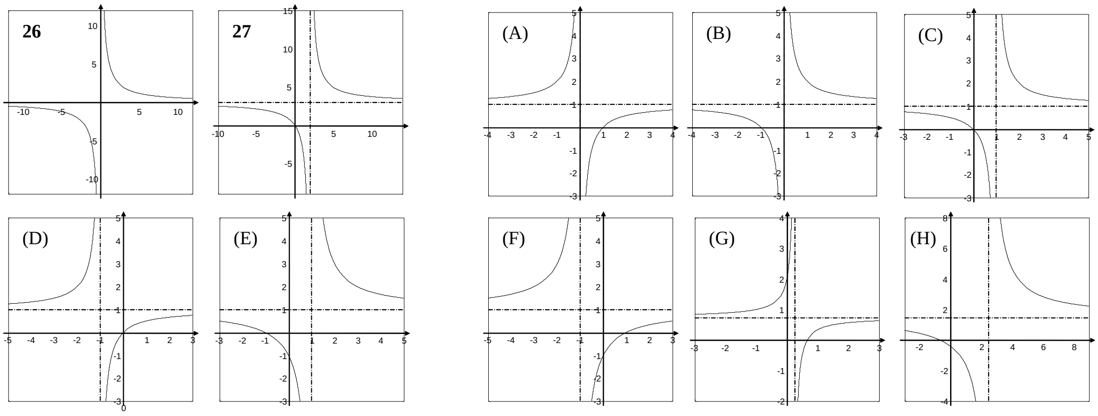
(B) $]-\infty, 5/2]$. (C) $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$. (D) $]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$. (E) $]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[$. (F) $\mathbb{R}$ (G) $]-\infty, -1/2] \cup [2, +\infty[$.

(H) $[2, +\infty[\cup \{-1\}$. (I) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$. (J) $[4, +\infty[\cup \{0\}$. (K) $[-2, 2]$. (L) $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$.

38. (A) $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$. (B) $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$. (C) $[-1/2, 1/2[$. (D) $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup [-1, 1] \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$.

(E) $]-\infty, -3] \cup]0, 3]$. (F) $]-\infty, -3[\cup [0, 3[$. (G) $[-1, 2] \sim \{0\}$. (H) $]-\infty, 0] \cup]1, 3[\cup [4, +\infty[$. **39.** 6.

40.

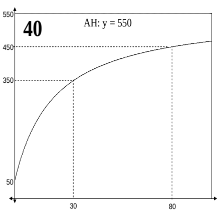


41. (A) f(x) = 120 + 2.4x, g(x) = 90 + 3.6x, x ≥ 0. (B) 25 mesos. (C) p(x) = $\dfrac{120+2.4x}{210+6x}$, és una hipèrbola.

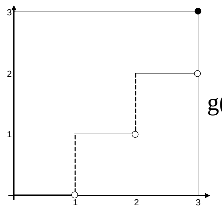
(D) 25 mesos; 85 mesos; no és possible; no hi ha menor valor, però tendeix a 0.4. **42.** 13 €/h.

(A) f(x) = $\dfrac{400+25x}{40+x}$. (B) g(x) = $\dfrac{300+25x}{30+x}$. (C) h(x) = $\dfrac{200+25x}{20+x}$. (D) f(x) = $\dfrac{100+25x}{10+x}$, són f. racionals amb domini {0, 1, …, 10}. Nre. d'hores extra: (A) 7, (B) 5, (C) 4, (D) 2. **43.** (A) f(x) = $\dfrac{100x+2500}{x+40}$, x ≥ 0, és una hipèrbola. (B) 20 tirs; 110 tirs. (C) No, perquè f(x) = 100 no té solució.

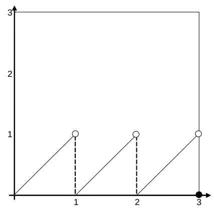
44. (A) 350 milions. (B) 80 dies. (C) A. H.: y = 550; creix, però no supera als 550 milions de individus.



45. f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$



g(x) = $\begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$



46. (A) 52 €; 1.04 €/kg. (B) p(x) = 24 + 1.4x. F. afí. (C) f(x) = $\dfrac{24+1.4x}{30+x}$. F. racional. (D) 60 kg.

47. (A) f(x) = $\dfrac{3-x}{2}$, $f^{-1}(x) = 3 - 2x$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, són funcions. (B) f(x) = $\dfrac{3x-6}{5}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+6}{3}$,

$D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, són funcions. (C) $f(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{25}{x}$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{0\}$, són funcions. (D) f(x) = $\dfrac{26-x}{x-1}$,

$f^{-1}(x) = \dfrac{26+x}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \sim \{1\}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{-1\}$, són funcions.

(E) $f(x) = f^{-1}(x) = \pm\dfrac{5}{x}$, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \sim \{0\}$, no són funcions. (F) $f(x) = 4x^2$, $f^{-1}(x) = \pm\dfrac{\sqrt{x}}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty[$, f sí és funció. (G) $f(x) = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{25-x^2}$, $D_f = D_{f^{-1}} = [-5, 5]$, no són funcions.

(H) $f(x) = \pm\sqrt{4-(x-2)^2}$, $f^{-1}(x) = 2\pm\sqrt{4-x^2}$, $D_f = [0, 4]$, $D_{f^{-1}} = [-2, 2]$, no són funcions. (I) $f(x) = 1\pm\sqrt{x}$, $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 1$, $D_f = [0, +\infty[$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, f no és funció. **48.** $(f o g)(x) = \sqrt{x+1}$; $(g o f)(x) = \sqrt{x} + 1$;

$(f o f) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$; $(g o g)(x) = x + 2$. **49.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$. (B) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+1}{3}$. (C) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{4x+1}{3}\right)^2$.

(D) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x^2+1}{3}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+4}{3-x}$. (F) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+4}{3-x^2}$. (G) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$. (H) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{2x+4}{3-x}\right)^2$. **50.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = f(x)$; $(f o f)(x) = x$, perquè f és la seua inversa. **51.** $(f o g)(x) = \dfrac{x+3}{2x+2}$, $(g o f)(x) = \dfrac{4}{x+3}$. **52.** (A) fog = i, gof = i. (B) $(f o f)(x) = \dfrac{9x+5}{4}$, $(g o g)(x) = \dfrac{4x-5}{9}$. (C) $f^{-1} = g$ i $g^{-1} = f$. **53.** (A) $(f o g)(x) = \dfrac{2x+1}{5x+2}$. (B) $(g o f)(x) = \dfrac{x+4}{x+3}$. (C) $(f o f)(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. (D) $(g o g)(x) = \dfrac{11x+4}{8x+3}$. (E) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

(F) $g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-3}$. **54.** (A)

	i	f	g
i	i	f	g
f	f	g	i
g	g	i	f

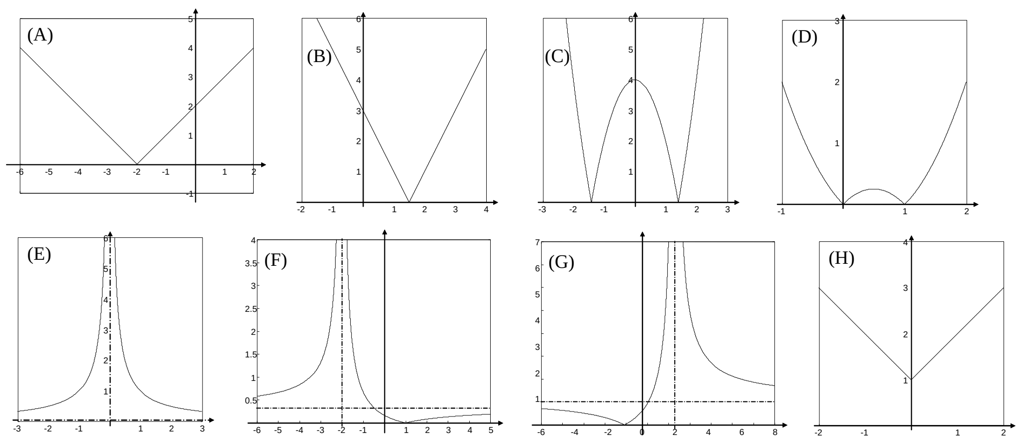
(B) Com què fog = i, i gof = i, $f^{-1} = g$ i $g^{-1} = f$.

55. (A) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$. (B) $D_f = [0, +\infty[\sim \{1\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{1\}$. **56.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{1\} = R_f$. **57.** (A) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{x+2}$. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{4\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{-2\}$. (C) AV: x = 4; AH: y = –2. **58.** (A) $(f o g)(x) = x$; f i g són inverses entre sí. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{-3/2\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. **59.** (A) $(f o g)(x) = x$; f i g són inverses entre sí. (B) $D_f = \mathbb{R} \sim \{5\}$; $R_f = \mathbb{R} \sim \{0\}$. **60.** $(f o g)(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. **61.** (A) [0, 1]. (B) $[-3, -2] \cup [2, 3]$.

(C) $[1, +\infty[$. (D) $[1, +\infty[\sim \{26\}$. (E) $]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$. (F) $]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[\sim \{-5, 5\}$. (G) $[5, -\infty[\sim \{105\}$.

(H) [1, 5[. (I)]10, 20[. (J) $[10, 20] \sim \{15\}$. (K) $[0, 10] \sim \{5/2\}$. **62.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{3\pi}}$.

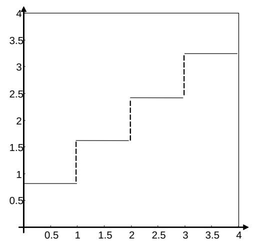
63.

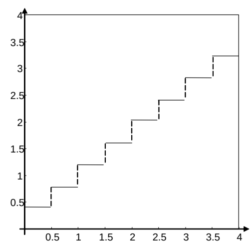


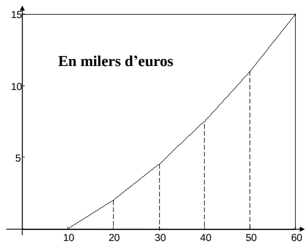
64. (A) $y = 9 - x$. (B) $L = \sqrt{4+x^2}$. (C) $A = x(9 - x)$. (D) $A = (9 - x)\sqrt{4+x^2}$ (E) $A = 36$. **65.** (A) $L_1 = \sqrt{1+x^2}$; $x = \sqrt{L_1^2 - 1}$. (B) $y = 1 - x$. (C) $h = \dfrac{1-x}{x}$; $x = \dfrac{1}{1+h}$. (D) $L_2 = \dfrac{1-x}{x}\sqrt{1+x^2}$. (E) $L = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{L^2-1}}$.

66. $f(x) = \begin{cases} 0.8 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1.6 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 2.4 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 3.2 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{si } 0 < x \le 0.5 \\ 0.8 & \text{si } 0.5 < x \le 1 \\ 1.2 & \text{si } 1 < x \le 1.5 \\ 1.6 & \text{si } 1.5 < x \le 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \le 2.5 \\ 2.4 & \text{si } 2.5 < x \le 3 \\ 2.8 & \text{si } 3 < x \le 3.5 \\ 3.2 & \text{si } 3.5 < x \le 4 \end{cases}$

67. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 10 \\ 0.2x - 2 & \text{si } 10 < x \le 20 \\ 0.25x - 3 & \text{si } 20 < x \le 30 \\ 0.3x - 4.5 & \text{si } 30 < x \le 40 \\ 0.35x - 6.5 & \text{si } 40 < x \le 50 \\ 0.4x - 9 & \text{si } x > 50 \end{cases}$

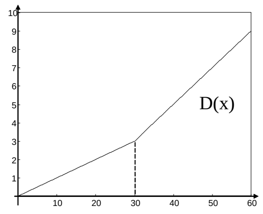


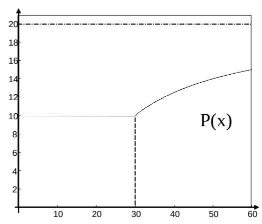




68. (A) $D(x) = \begin{cases} 0.1x & \text{si } x \le 30 \\ 0.2x - 3 & \text{si } x > 30 \end{cases}$.

(B) $P(x) = \dfrac{100D(x)}{x} = \begin{cases} 10 & \text{si } x \le 30 \\ 20 - \dfrac{300}{x} & \text{si } x > 30 \end{cases}$.





BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Estadística

educàlia
editorial

BATXILLERAT

MATEMÀTIQUES I

Estadística

educàlia
editorial

Primera edició, 2018

Autor: Juan Carlos Pérez Cantó i José Manuel Durá Peiró

Edita: Educàlia Editorial

Maquetació: Juan Carlos Pérez Cantó y José Manuel Durá Peiró

Imprimeix: Grupo Digital 82, S.L.

ISBN: 978-84-17734-07-7

Depòsit legal: V-3243-2018

Printed in Spain/Imprès a Espanya.

Educàlia Editorial
Avda de les Jacarandes, 2, loft 327. 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com
www.e-ducalia.com

Capítol 2

Distribucions bidimensionals

2.1 Distribució conjunta de freqüències

En els treballs estadístics s'arrepleguen dades d'una determinada població referits generalment a més d'una característica de la població. Cadascuna d'aquestes característiques o ***variables*** poden ser estudiades per separat, però també poden ser tractades conjuntament quan es pensa que hi ha algun tipus de relació entre algunes d'elles. Per exemple, si d'un conjunt de xiquets de bolquers arrepleguem dades sobre les variables sexe, setmanes de gestació, pes i talla, l'estudi conjunt d'aquestes dades pot confirmar-nos que aquestes variables estan relacionades.

➢ Mostres bidimensionals

Una ***mostra bidimensional de grandària n***, de dues variables X i Y, és un conjunt de n parells ordenats de valors, (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), on cada parell conté els valors observats d'ambdues característiques d'un mateix individu de la població.

Exemple 1

Durant el període de temps en què un professor explica als seus alumnes una determinada matèria, realitza 4 exàmens voluntaris i després, un examen final obligatori amb el qual avalua els coneixements. El professor vol comprovar si la realització dels exàmens parcials suposa una bona ajuda per a superar la matèria. Per a això, i dels 40 alumnes que disposa, contrasta el nombre d'exàmens parcials aprovats amb el resultat de l'examen final. Anomenem.

$\mathbf{x_i}$**:** "nombre d'exàmens parcials aprovats per l'alumne i", $\mathbf{y_i}$: "nombre d'exàmens finals aprovats per l'alumne i".

Els possibles valors de x_i són 0, 1, 2, 3 i 4, i els de y_i són 0 i 1.

Així, per exemple el parell (2, 1) vol dir que l'alumne va aprovar dos parcials i l'examen final.

Els següents 40 parells de valors són els resultats observats i constitueixen una **mostra bidimensional de grandària 40** de les dues variables X i Y:

(0, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 0)	(2, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 1)	(0, 0)	(2, 0)	(1, 0)	(3, 1)	(4, 1)
(3, 0)	(3, 1)	(0, 0)	(3, 1)	(1, 0)	(4, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(2, 1)	(1, 0)
(0, 0)	(4, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(0, 0)	(4, 1)	(3, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 0)

➢ Freqüències, taules de freqüències i representacions gràfiques

Considerem una mostra bidimensional de grandària n de les variables X i Y. Siga $\mathbf{x_i}$ un valor de la variable X, i $\mathbf{y_j}$ un valor de la variable Y.

- Representem per $\mathbf{n_{ij}}$ la ***freqüència absoluta del parell*** $\mathbf{(x_i, y_j)}$, nombre de vegades que apareix aquest parell en la mostra (si aquest parell no és de la mostra, aleshores $n_{ij} = 0$).
- Representem per $\mathbf{n_{i\,.}}$ la ***freqüència absoluta del valor*** $\mathbf{x_i}$ de la variable X, i per $\mathbf{n_{.\,j}}$ **la *freqüència absoluta del valor*** $\mathbf{y_j}$ de la variable Y.
- Representem per $\mathbf{f_{ij}}$**,** $\mathbf{f_{i\,.}}$ i $\mathbf{f_{.\,j}}$ les ***freqüències relatives*** del parell (x_i, y_j), de l'element x_i i de l'element y_j, respectivament:

$$\mathbf{f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}} \qquad \mathbf{f_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}} \qquad \mathbf{f_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}}$$

Exemple 2

La següent taula de doble entrada és la ***taula de freqüències conjunta*** de la mostra bidimensional de l'exemple 1 i conté les freqüències absolutes de tots els parells de valors de les variables X i Y. Aquestes freqüències corresponen a les cel·les centrals blanques. La suma d'aquestes freqüències absolutes és igual a 40, que és la grandària de la mostra. Per exemple, la freqüència absoluta del parell (2, 1) és **5**, i la del parell (4, 0) és **0**.

x_i \ y_j	0	1	$n_{i\cdot}$
0	9	1	10
1	7	2	9
2	3	**5**	8
3	1	6	7
4	**0**	6	6
$n_{\cdot j}$	20	20	40

Taula de freqüències marginal de X

x_i	$n_{i\cdot}$
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
Total	40

Taula de freqüències marginal de Y

y_j	0	1	Total
$n_{\cdot j}$	20	20	40

Anomenem ***taules de freqüències marginals*** a les taules que contenen, per separat, les freqüències absolutes dels valors de cada variable.

La ***taula de freqüències marginal de X*** correspon a les columnes de color blau i les seues freqüències s'obtenen de la taula conjunta **sumant les freqüències conjuntes de cada fila**.

La ***taula de freqüències marginal de Y*** correspon a les columnes de color rosa i les seues freqüències s'obtenen de la taula conjunta **sumant les freqüències conjuntes de cada columna**.

Els parells de valors d'una mostra bidimensional es representen en dos eixos cartesians i constitueixen el ***diagrama de dispersió*** o, més vulgarment, ***núvol de punts***. Per a indicar que un punt té freqüència major que 1 (es repeteix) s'indica en el diagrama amb un cercle d'àrea proporcional a la freqüència.
Una altra representació és el ***diagrama de barres tridimensional*** en què l'altura indica la freqüència.

Representem les dues gràfiques corresponents a la taula de freqüències conjunta de l'exemple 2:

Diagrama de dispersió

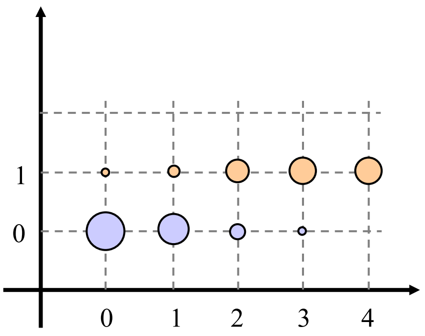
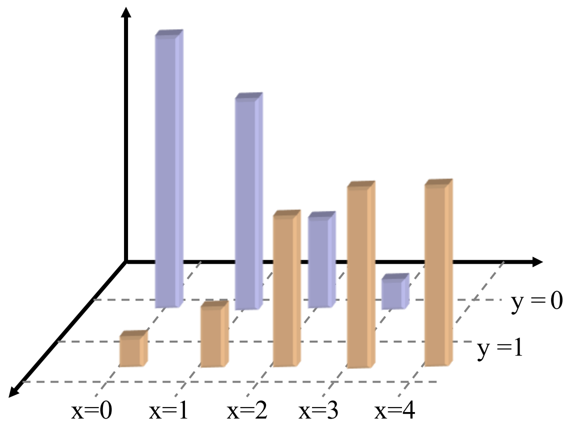


Diagrama de barres tridimensional



1 Calcula la taula de freqüències conjunta i les marginals de la següent mostra bidimensional:

(1, 3) (4, 2) (3, 3) (2, 3) (3, 4) (3, 1) (3, 2) (4, 3) (3, 2) (3, 3)
(3, 3) (3, 4) (3, 5) (2, 2) (4, 3) (3, 3) (4, 4) (5, 3) (2, 4) (2, 3)

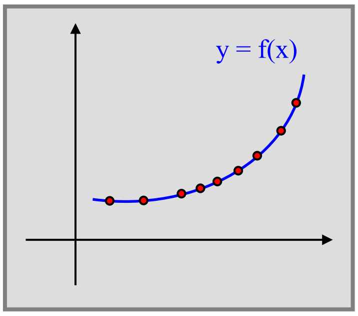
2.2 Dependència funcional i dependència estadística

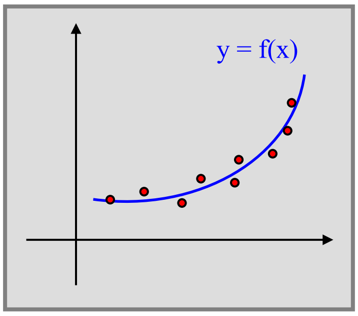
Diem que en una mostra bidimensional (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) de valors de dues variables X i Y hi ha ***dependència funcional*** si és possible trobar una funció **f**: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que transforme cada valor d'una de les variables de la mostra en un valor de l'altra variable:

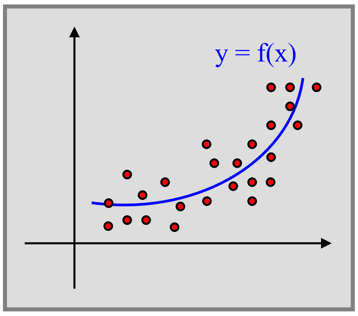
$$\mathbf{y_1 = f(x_1),\ \ y_2 = f(x_2),\ ...,\ \ y_n = f(x_n)}$$

És necessari que cada valor de la variable X no siga parella de més d'un valor de la variable Y, perquè en cas contrari la relació mai podria ser funcional.

- Si hi ha relació de dependència funcional, al representar el diagrama de dispersió de la mostra damunt de la gràfica de la funció f tots els parells de valors de la mostra són punts de la gràfica. És el cas del primer dels següents diagrames.







- En els tres diagrames diem que hi ha **dependència estadística**, però només en el primer d'ells hi ha dependència funcional.
- En el segon diagrama, els parells de valors es distribueixen molt prop de la gràfica de la funció, amb la qual cosa aquesta podria utilitzar-se per a aproximar els valors de la variable Y, representant a més el núvol de punts. Aleshores diríem que hem ***ajustat*** la corba d'equació y = f(x) al núvol de punts que representa gràficament a la mostra.
- També podríem fer-ho en el tercer diagrama, però els valors es troben més dispersos i l'ajust no seria tan precís.

L'equació **y = f(x)** serveix com a equació ***generadora*** dels valors de la mostra, encara que només en el primer cas és rotundament cert. D'aquesta manera s'obté un ***model*** (la funció) que explica el comportament conjunt de les dues variables i que s'utilitza per a realitzar prediccions d'una d'elles en funció de l'altra.

Moltes variables que no depenen funcionalment entre si poden ser relacionades per una funció que es puga utilitzar com a model explicatiu de les observacions, encara que es produiran errors més apreciables; és el cas de variables com el pes i l'alçada, el consum i la renda, la temperatura i el consum d'aigua, etc.

La ***teoria de la regressió*** s'ocupa de buscar models de funcions que puguen representar la relació existent entre dues o més variables. Una part d'aquesta branca de l'Estadística és la ***teoria de la regressió lineal***, de la qual ens ocupem a continuació, i el seu objectiu és prendre com a model de la relació entre dues variables una ***funció lineal***, la representació de la qual és ***una recta***.

2 Les següents dades corresponen a l'esperança de vida i la mortalitat infantil (‰) en països africans durant l'any 1998 (Metges sense fronteres). Representa'ls gràficament. Serà adequada una representació lineal?

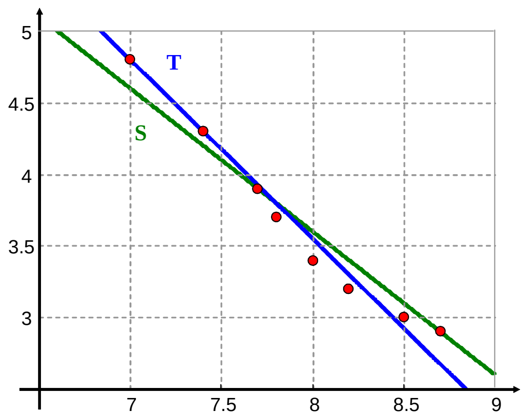
País	Angola	Congo	Guinea	Kenya	Moçambic	Somàlia	Togo	Zaire
Esp. vida	46.8	51.3	48.2	55.5	46.4	47.2	55	45
Mort. infantil	124	93	117	69	148	122	85	93

➢ Ajust d'una recta a un núvol de punts

Exemple 3

La següent taula conté les dades de l'IPC i del preu dels diners (en %) durant 8 mesos consecutius, i la seua representació gràfica mostra que és apropiada una funció lineal (una recta) per a relacionar els aquestes variables.

x_i : IPC	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
y_i : Mibor	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8



Elegim dues possibles rectes que ajusten les dades:

- La recta que passa pels punts (8.7, 2.9) i (7.7, 3.9):

  $S(x) = -x + 11.6$

- La recta que passa pels punts (7.4, 4.3) i (7, 4.8):

  $T(x) = -1.25x + 13.55$

Com decidim quina recta ofereix millor ajust?

Comparem els valors que cada funció lineal associa als IPC x_i de la mostra amb els Mibor y_i observats en la mostra, i direm que **la recta que millor s'ajusta serà aquella per a la qual la suma de totes les distàncies d_i entre els valors ajustats $f(x_i)$ i els valors observats y_i siga menor:**

$$D_T = \sum_{i=1}^{6} d_i = \sum_{i=1}^{6} |S(x_i) - y_i| \qquad D_S = \sum_{i=1}^{6} d_i = \sum_{i=1}^{6} |T(x_i) - y_i|$$

x_i	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$S(x_i)$	2.9	3.1	3.4	3.6	3.8	3.9	4.2	4.6
y_i	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
d_i	0	0.1	0.2	0.2	0.1	0	0.1	0.2

x_i	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$T(x_i)$	2.675	2.925	3.3	3.55	3.8	3.925	4.3	4.8
y_i	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
d_i	0.225	0.075	0.1	0.15	0.1	0.025	0	0

Aquestes diferències positives, anomenades ***errors o desviacions***, estan calculades en les anteriors taules:

Per a $S(x) = -x + 11.6$ $\qquad D_S = 0 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0 + 0.1 + 0.2 = \mathbf{0.9}$

Per a $T(x) = -11.25x + 13.55$ $\qquad D_T = 0.225 + 0.075 + 0.1 + 0.15 + 0.1 + 0.025 + 0 + 0 = \mathbf{0.675}$

Com que **$D_T < D_S$, la funció lineal T s'ajusta millor a la mostra que la funció S.**

No obstant això, aquest mètode pot no resultar decisiu (realitza l'activitat 3). En el seu lloc s'utilitza la suma dels quadrats de les desviacions. És el ***criteri dels mínims quadrats***:

$$D_S^2 = \sum_{i=1}^{6} d_i^2 = \sum_{i=1}^{6} (S(x_i) - y_i)^2 \qquad D_T^2 = \sum_{i=1}^{6} d_i^2 = \sum_{i=1}^{6} (T(x_i) - y_i)^2$$

Per a $S(x) = -x + 11.6$ $\qquad D_S^2 = 0^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.2^2 + \cdots + 0.2^2 = 0.150$

Per a $T(x) = -1.25x + 13.55$ $\qquad D_T^2 = 0.225^2 + 0.075^2 + 0.1^2 + \cdots + 0^2 = \mathbf{0.099}$

Com que $\mathbf{D_T^2 < D_S^2}$ (amb el criteri dels mínims quadrats), **la funció lineal T ajusta millor que la S**.

3 Considera la mostra {(1, 1), (2, 0), (2, 2), (4, 2), (4, 4), (5, 3)}. Comprova que la suma d'errors no decideix quina de les rectes $R(x) = x - 1$ i $S(x) = 2$ s'ajusta millor, però sí la suma dels quadrats dels errors.

2.3 La recta de regressió de Y sobre X

En l'exemple anterior la funció lineal T(x) s'ajustava millor al núvol de punts que la funció S(x), basant la decisió en el criteri d'elegir la funció per a la qual és menor la suma dels quadrats dels errors o desviacions, comeses al substituir els valors de la variable Y, y_i, pels de f(X), $f(x_i)$.

Volem ara elegir la funció lineal que **minimitza la suma d'aquests quadrats**.

Donada una mostra bidimensional $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, anomenem ***recta de regressió de Y sobre X*** a la recta **y = f(x) = ax + b** en la qual es **mínima la suma**:

$$\mathbf{D_f^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2}$$

Per a obtenir aquesta recta introduïm el següent concepte.

➢ Covariància d'una mostra

Anomenem ***covariància*** de la mostra bidimensional $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, representada per $\mathbf{S_{xy}}$, al paràmetre estadístic conjunt d'ambdues variables donat per l'expressió:

$$\mathbf{S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

En la pràctica s'utilitza una altra expressió per al càlcul de la covariància:

La covariància de la mostra $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ve donada per:

$$\mathbf{S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y}}$$

Aquesta última expressió s'obté de l'anterior desenrotllant els productes:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x}\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\mathbf{y}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\mathbf{y}} - n\,\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\mathbf{y}} + n\,\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{\mathbf{x}}\,\bar{\mathbf{y}}$$

Exemple 4

Calculem la covariància de la mostra {(1, 1), (2, 0), (2, 2), (4, 2), (4, 4), (5, 3)} on $\bar{x} = 3$ i $\bar{y} = 2$.

La covariància serà: $S_{xy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$

$$= \frac{(1-3)(1-2)+(2-3)(0-2)+(2-3)(2-2)+(4-3)(2-2)+(4-3)(4-2)+(5-3)(3-2)}{6} = \frac{4}{3}$$

O bé, per la forma pràctica: $S_{xy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{1\cdot1+2\cdot0+2\cdot2+4\cdot2+4\cdot4+5\cdot3}{6} - 3\cdot2 = \frac{44}{6} - 6 = \frac{4}{3}$

➤ Teorema: Equació de la recta de regressió de Y sobre X

Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ és una mostra bidimensional, l'equació de la recta de regressió de Y sobre X ve donada per:

$$\mathbf{R:}\ \ y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$$

Es important ressaltar, a la vista de l'equació anterior, que:

- La recta de regressió sempre passa pel punt $\mathbf{P}(\bar{x}, \bar{y})$ de les mitjanes de les dues variables.
- El pendent de la recta de regressió de Y sobre X és $\mathbf{m} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$.

Exemple 5

Amb la fórmula anterior, obtenim la recta de regressió mínim-quadrática per a la mostra de l'exemple 3:

$$\{(8.7, 2.9),\ (8.5, 3),\ (8.2, 3.2),\ (8, 3.4),\ (7.8, 3.7),\ (7.7, 3.9),\ (7.4, 4.3),\ (7, 4.8)\}$$

Per a fer això cal calcular les mitjanes i la covariància de les dues variables i la variància de la primera variable.

- $\bar{x} = \dfrac{8.7+8.5+8.2+8+7.8+7.7+7.4+7}{8} = \dfrac{63.3}{8}$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{2.9+3+3.2+3.4+3.7+3.9+4.3+4.8}{8} = \dfrac{29.2}{8}$
- $S_{xy} = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \dfrac{8.7\cdot 2.9 + 8.5\cdot 3 + 8.2\cdot 3.2 + \cdots + 7\cdot 4.8}{8} - \dfrac{63.3}{8}\cdot\dfrac{29.2}{8} = -\dfrac{20.52}{64}$
- $S_x^2 = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \bar{x}^2 = \dfrac{8.7^2+8.5^2+8.2^2+8^2+7.8^2+7.7^2+7.4^2+7^2}{8} - \left(\dfrac{63.3}{8}\right)^2 = \dfrac{17.67}{64}$

L'equació de la recta de regressió és:

$$R:\ y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x}) \iff R:\ y - \frac{29.2}{8} = \frac{-20.52/64}{17.67/64}\left(x - \frac{63.3}{8}\right) \iff \mathbf{R:\ y = \frac{-2052}{1767}x + \frac{22686}{1767}}$$

Comprovem que el valor de la suma dels errors o desviacions al quadrat és menor que qualssevol dels obtinguts en l'exemple 5, ja que la recta de regressió té aquesta propietat:

x_i	8.7	8.5	8.2	8	7.8	7.7	7.4	7
$R(x_i)$	4833.6/1767	5244/1767	5859.6/1767	6270/1767	6680.4/1767	6685.6/1767	7501.2/1767	8322/1767
y_i	2.9	3	3.2	3.4	3.7	3.9	4.3	4.8
d_i	–290.7/1767	–57/1767	205.2/1767	262.2/1767	142.5/1767	–5.7/1767	–96.9/1767	–159.6/1767

$$D_f^2 = \sum_{i=1}^{6} d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{6} |R(x_i) - y_i|^2 = \frac{290.7^2 + 57^2 + \cdots + 159.6^2}{1767^2} = \mathbf{0.08129}$$

4 La covariància és positiva quan valors majors d'una variable es corresponen "generalment" amb valors majors de l'altra variable, com en l'exemple 4. Representa i comprova que la covariància de la següent mostra és negativa: (1, 3), (1, 0), (2, 2), (3, 4), (3, 0), (4, 2), (4, −1), (5, −1), (6, −3) y (6, 0).

5 Representa gràficament la mostra bidimensional següent i calcula la covariància i la recta de regressió:

(1, 2) (2, 3) (3, 3) (4, 5) (5, 6) (6, 7) (7, 9) (8, 9)

Exemple 6

Una persona llança 4 vegades una moneda. Repeteix aquest experiment 10 vegades i obté els següents resultats:

CKCC CCKK KKKK KCCK KKCK KCCC CKKC KCKC CCCC KCKK

Definim les següents variables:

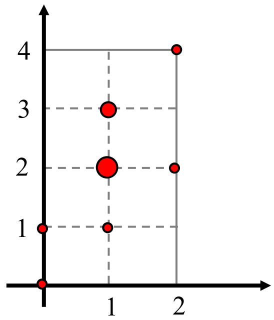
X: “nombre de cares en els 2 primers llançaments”, Y: “nombre de cares en els 4 llançaments”.

Cada resultat de l'experiment es correspon amb un valor per a cada variable. Així obtenim la següent mostra bidimensional de grandària n = 10:

(1, 3) (2, 2) (0, 0) (1, 2) (0, 1) (1, 3) (1, 2) (1, 2) (2, 4) (1, 1)

Aquestes dades es resumeixen en la següent taula de freqüències conjunta que conté també la taula de freqüències de la variable X i la taula de freqüències de la variable Y.

x_i \ y_i	0	1	2	3	4	$n_{i\cdot}$
0	1	1	0	0	0	2
1	0	1	3	2	0	6
2	0	0	1	0	1	2
$n_{\cdot j}$	1	2	4	2	1	10



La recta de regressió de Y sobre X és **R:** $\mathbf{y - \bar{y} = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})}$.

Utilitzant les freqüències corresponents, calculem les mitjanes $\bar{x}$ i $\bar{y}$, la variància S_x^2 i la covariància S_{xy}:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} x_i\, n_{i\cdot} = \frac{0\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot 2}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{5} y_j\, n_{\cdot j} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} x_i^2\, n_{i\cdot} - \bar{x}^2 = \frac{0^2\cdot 2 + 1^2\cdot 6 + 2^2\cdot 2}{10} - 1 = 0.4$$

$$S_{xy} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{7} x_k\, y_k\, n_k - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 1}{10} - 1\cdot 2 = 0.5$$

L'equació de la recta de regressió de Y sobre X és:

$$\mathbf{R:\ y - 2 = \frac{0.5}{0.4}(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad R:\ y = 1.25x + 0.75}$$

6 Calcula els valors de la mostra bidimensional per a les variables X i Y de l'exemple 6 que corresponen als 16 diferents resultats que es poden donar al llançar 4 vegades una moneda, que tens a continuació, i obtén la taula de freqüències conjunta, el diagrama de dispersió, la covariància i la recta de regressió:

KKKK CKKK KCKK KKCK KKKC CCKK CKCK CKKC KCCK KCKC KKCC KCCC CKCC CCKC CCCK CCCC

7 Mostrem els resultats d'una enquesta a 10 famílies, el 1er element del parell és la renda mensual i el 2n el cost del consum elèctric del mes de gener. Calcula la covariància i la recta de regressió del cost del consum elèctric sobre la renda mensual: (1500, 100), (1600, 110), (1700, 120), (1800, 100), (1900, 100), (2000, 120), (2100, 150), (2200, 175), (2300, 150) i (2400, 140).

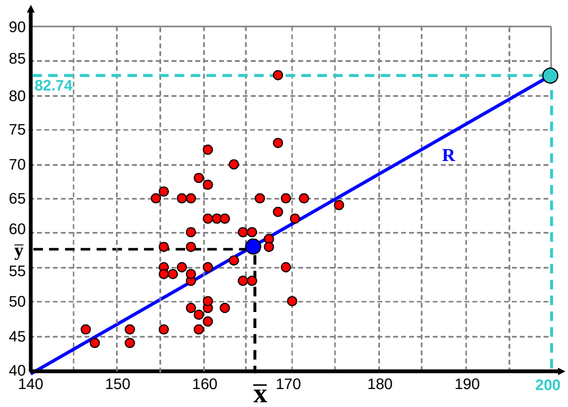
➤ Prediccions sobre la variable dependent

La recta de regressió de Y sobre X s'utilitza per a ***predir*** valors de la variable dependent Y donat un valor de la variable independent X.

Exemple 7

Un estudi realitzat sobre 50 estudiants del sexe femení de 15 anys d'edat ens proporciona la següent mostra bidimensional corresponent a la seua talla en cm i pes en kg, representades per les variables X i Y:

(168, 56)	(165, 50)	(159, 65)	(165, 62)	(161, 54)
(160, 46)	(152, 44)	(160, 58)	(165, 72)	(173, 73)
(156, 44)	(163, 58)	(165, 47)	(164, 68)	(168, 70)
(167, 49)	(169, 60)	(169, 53)	(174, 55)	(165, 55)
(164, 48)	(163, 54)	(164, 46)	(163, 60)	(163, 49)
(162, 55)	(160, 55)	(173, 83)	(171, 65)	(160, 54)
(170, 53)	(167, 63)	(175, 62)	(156, 46)	(163, 65)
(165, 49)	(172, 59)	(163, 53)	(170, 60)	(180, 64)
(174, 65)	(173, 63)	(151, 46)	(176, 65)	(160, 66)
(165, 50)	(165, 67)	(172, 58)	(162, 65)	(166, 62)



Pràcticament cap parella es repeteix, la qual cosa demostra l'heterogeneïtat d'aquestes mesures, preses en cm i kg. No té sentit plantejar una taula de freqüències conjunta però sí que cal representar el diagrama de dispersió.

La recta de regressió de Y sobre X és **R:** $\mathbf{y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{8.276}{50} = \mathbf{165.52} \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{2889}{50} = \mathbf{57.78}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \dfrac{1371622}{50} - (165.52)^2 = 35.57 \\ S_{xy} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = \dfrac{479475}{50} - 165.52 \cdot 57.78 = 25.75 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{25.75}{35.57} \simeq \mathbf{0.7240}$$

Per tant la recta de regressió és:

$$\mathbf{R: y - 57.78 = 0.7240\,(x - 165.52)} \iff y = \mathbf{R(x) = 0.7240x - 62.06}$$

- Si en l'exemple anterior volem predir el pes que correspondria a una xica que mesurara 200 cm, li associem el valor R(200) o valor de y que correspon a x = 200:

$$\mathbf{R(200)} = 0.7240 \cdot 200 - 62.06 \simeq \mathbf{82.74\ kg}$$

8 En l'exemple 7, calcula el valor del pes que correspon a una xica de 175 cm d'alçada, utilitzant la recta de regressió allí obtinguda.

9 Per a la mostra bidimensional de l'activitat 7, calcula el cost elèctric que correspon a una renda mensual de 1200 euros a partir de la recta de regressió calculada en eixe exercici.

2.4 La recta de regressió de X sobre Y

La recta de regressió de Y sobre X és utilitzada per a realitzar prediccions de la variable Y, com hem vist en l'exemple 7. En eixe exemple la recta és:

$$R:\; y = 0.7240x - 62.06$$

La predicció del pes y que correspon a una xica amb una alçada x = 200 cm s'obté al substituir el valor x = 200 en l'anterior equació:

$$\mathbf{y} = 0.7240 \cdot \mathbf{200} - 62.06 \simeq \mathbf{82.74\ kg.}$$

Però, i si volem predir l'alçada x que correspon a una xica amb pes y = 75 kg? No es tracta de substituir el valor y = 75 en l'equació de la recta R i aïllar x, sinó intercanviar els papers de X i de Y; calcular una nova recta de regressió, la recta s: x = ay + b, per a la qual siga mínima la suma de les diferències quadràtiques:

$$\mathbf{D_S^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{d_i^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left(\mathbf{g(y_i)} - \mathbf{x_i} \right)^2, \text{ amb } g(y) = ay + b$$

Aquesta recta s'anomena ***recta de regressió de* X *sobre* Y**, i la seua equació difereix de l'anterior recta només en l'intercanvi de papers de les dues variables:

Considerem $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ una mostra bidimensional de dues variables X i Y. La ***recta de regressió de* X *sobre* Y**, utilitzada per a predir la variable X, és

$$\mathbf{S:}\; \mathbf{x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})}$$

A continuació expressem les característiques geomètriques de les dues rectes de regressió.

➢ Propietats de les rectes de regressió

Considerem $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ una mostra bidimensional de dues variables X i Y.

Per a predir la variable Y utilitzem la recta de regressió de Y sobre X, i per a predir la variable X utilitzem la recta de regressió de X sobre Y:

$$\mathbf{R:}\; \mathbf{y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})} \qquad\qquad \mathbf{S:}\; \mathbf{x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})}$$

Tenim les següents propietats:

P1 Les dues rectes de regressió es tallen sempre en el punt $\mathbf{P(\bar{x}, \bar{y})}$.

P2 El pendent de la recta de regressió de Y sobre X és $\mathbf{m_R} = \dfrac{\mathbf{S_{xy}}}{\mathbf{S_x^2}}$.

P3 El pendent de la recta de regressió de X sobre Y és $\mathbf{m_S} = \dfrac{\mathbf{S_y^2}}{\mathbf{S_{xy}}}$ (sobre el sistema cartesià OXY habitual).

P4 Els pendents de les dues rectes de regressió i la covariància tenen el mateix signe.

P5 Si la covariància és 0, aleshores la recta R és horitzontal i la recta S és vertical.

Exemple 8

En l'exemple 7 hem obtingut la recta de regressió de Y sobre X, per a una mostra bidimensional de valors corresponents a les altures i pesos de 50 xiques d'una mateixa edat.

$$\mathbf{R:}\ \ \mathbf{y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\,(x - \bar{x})} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R:\ \ y = 0.7240x - 62.06}$$

Obtenim ara la recta de regressió de X sobre Y:

$$\mathbf{S:}\ \ \mathbf{x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}\,(y - \bar{y})}$$

Calculem la variància de Y:

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{170517}{50} - (57.78)^2 = 71.81$$

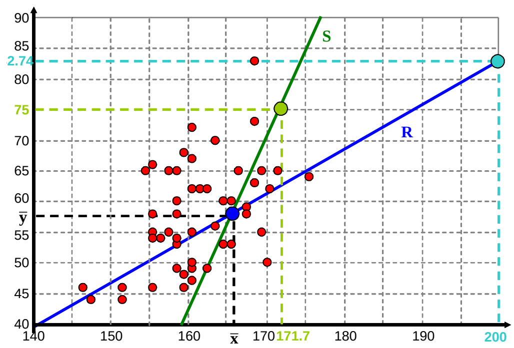
i amb els valors de les mitjanes i la covariància ja calculats en l’exemple 7 obtenim la nova recta:

$$\mathbf{S:\ \ x - 165.52 = 0.3586\,(y - 57.78)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S:\ \ x = 0.3586y + 144.80}$$

Si volem predir l'altura que correspondria a una xica que pesara y = 75 kg, aleshores:

$$x = 0.3586 \cdot 75 + 144.80 \simeq \mathbf{171.70\ cm}$$

A continuació tenim representades, sobre els mateixos eixos cartesians OXY habituals, la recta R de regressió de Y sobre X i la recta S de regressió de X sobre Y.



Obtenim el valor dels pendents d'ambdues rectes. Per a això, hem d'aïllar y en les equacions.

- R: $y = 0.7240x - 62.06 \ \rightarrow\ \mathbf{m_R = 0.7240}$
- S: $x = 0.3586y + 144.80 \ \rightarrow\ 0.3586y = x - 144.80 \ \rightarrow\ y = \frac{1}{0.3586}\cdot x + \frac{144.80}{0.3586}$

  Aleshores: $\mathbf{m_S = \frac{1}{0.3586} = 2.7886}$

10 Les notes que 10 alumnes van obtenir en dos exàmens A i B estan expressades en la següent taula:

Nota 1	4	7	3	5	5	3	4	3	3	3
Nota 2	6	5	4	6	7	4	6	4	3	5

(A) Obtén les equacions de les dues rectes de regressió, representa gràficament el diagrama de dispersió i les dues rectes, i comprova que es tallen en el punt de les mitjanes de les dues variables.
(B) Calcula el pendent de les dues rectes i comprova que el seu signe és el mateix que el de la covariància.
(C) Quina és la predicció de la nota per al segon examen d'un alumne amb un 2 en el primer?
(D) Quina és la predicció de la nota per al primer examen d'un alumne amb un 2 en el segon?

2.5 Coeficients de correlació lineal i determinació

La recta de regressió de Y sobre X és la recta que millor s'ajusta als valors d'una mostra bidimensional segons el criteri dels mínims quadrats, ja que de totes les rectes del pla és la que fa mínima l'expressió

$$\mathbf{D_f^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{f(x_i)} - \mathbf{y_i}\right)^2, \text{ sent } f(x) = ax + b.$$

El valor mitjà de l'anterior expressió, calculada per a la funció lineal que correspon a la recta de regressió de Y sobre X, és una mesura de la qualitat de l'ajust i s'anomena ***variància residual de Y***:

$$\mathbf{V_R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{R(x_i)} - \mathbf{y_i}\right)^2$$

sent $R(x) = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$.

De la mateixa forma, la ***variància residual de* X** proporciona el mateix tipus de mesura per a la recta de regressió de X sobre Y:

$$\mathbf{V_z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{S(y_i)} - \mathbf{x_i}\right)^2$$

sent $S(y) = \bar{x} + \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})$.

Però tenim el mateix tipus de problemes que amb la mitjana o la variància: no podem comparar directament variàncies residuals, perquè a majors valors mostrals, majors variàncies residuals. Cal obtenir una mesura que represente la qualitat de l'ajust sense dependre de les magnituds dels valors. Un primer pas per a això és considerar el quocient entre les variàncies residuals i les respectives variàncies:

$$\frac{V_R}{S_y^2} \quad \text{i} \quad \frac{V_S}{S_x^2}$$

Efectuant les operacions necessàries en les expressions de les variàncies residuals es pot demostrar que aquests dos quocients verifiquen:

$$\boxed{\frac{\mathbf{V_R}}{\mathbf{S_y^2}} = \frac{\mathbf{V_S}}{\mathbf{S_x^2}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{S_{xy}^2}}{\mathbf{S_x^2 \cdot S_y^2}}}$$

Aquests dos quocients de variàncies són no negatius i menors o iguals que 1, per la qual cosa poden ser utilitzats per a comparar els ajusts de distintes mostres i, a més, valen el mateix, per la qual cosa proporcionen un valor únic per a la mostra bidimensional.

L'últim terme de l'anterior expressió, més concretament la seua arrel quadrada, és l'utilitzat per a això per la seua comoditat de càlcul i rep el nom de ***coeficient de correlació lineal***:

Donada una mostra bidimensional $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, anomenem ***coeficient de correlació lineal***, representat per ρ, al quocient entre la covariància i el producte de les desviacions típiques de les dues variables:

$$\rho = \frac{\mathbf{S_{xy}}}{\mathbf{S_x \cdot S_y}}$$

El quadrat del coeficient de correlació s'anomena ***coeficient de determinació***: $\mathbf{D} = \rho^2 = \frac{\mathbf{S_{xy}^2}}{\mathbf{S_x^2 \cdot S_y^2}}$.

➢ Propietats del coeficient de correlació

P1 El coeficient de correlació lineal ρ està comprés entre -1 i 1, i el seu signe coincideix amb els dels pendents de les rectes de regressió i el de la covariància:

$$\mathbf{-1 \leq \rho \leq 1}$$

P2 El valor de ρ mesura la representativitat de R i S. El significat dels casos extrems és:

- Si ρ **= 1** o ρ **= –1**, la representació lineal és perfecta i tant **R** com **S són iguals**. Diem que les variables **X i Y *depenen linealment***.
- Si ρ **= 0**, la representació lineal és totalment inapropiada. La recta **R és horitzontal** i la recta **S és vertical**.

P1 Segons la definició de coeficient de correlació, l'expressió de la pàgina anterior és:

$$\frac{V_R}{S_y^2} = \frac{V_S}{S_x^2} = 1 - \rho^2$$

Com que $V_R \geq 0$ i $S_y^2 \geq 0 \;\rightarrow\; 1-\rho^2 \geq 0 \;\rightarrow\; \rho^2 \leq 1 \;\rightarrow\; -1 \leq \rho \leq 1$

Com que $\rho = \dfrac{S_{xy}}{S_x\ S_y}$ i els pendents de les rectes de regressió són $m_R = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$ i $m_S = \dfrac{S_y^2}{S_{xy}}$, el signe de ρ i dels pendents és el mateix que el de S_{xy}, ja que les variàncies són positives.

P2 Si $\rho = \pm 1 \;\rightarrow\; \rho^2 = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{V_R}{S_y^2} = \dfrac{V_S}{S_x^2} = 1 - \rho^2 = 0 \;\rightarrow\; V_R = V_S = 0$

Com que V_R i V_S són una suma de quadrats, si valen 0 és perquè tots els sumands són iguals a 0:

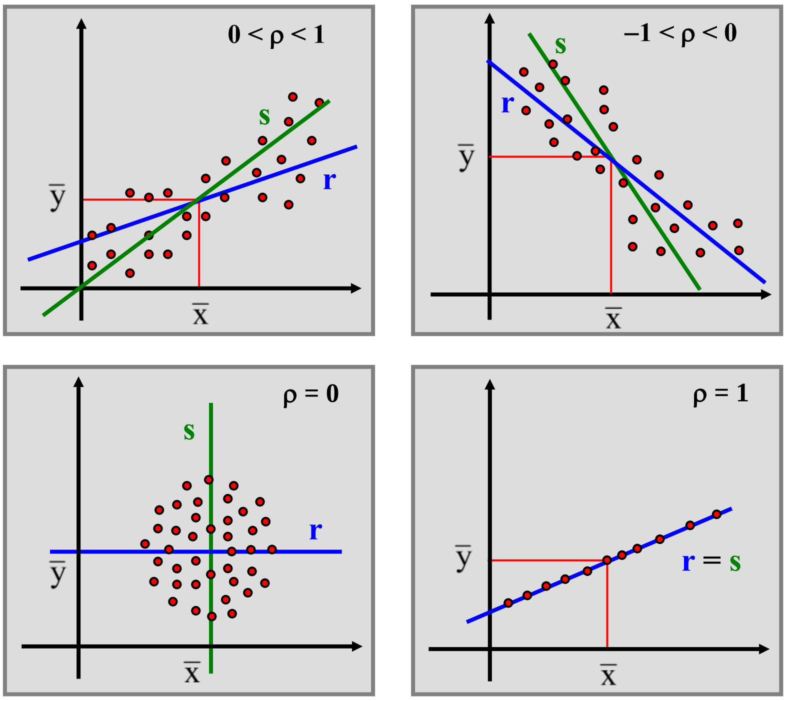
$$V_R = V_S = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(R(x_i) - y_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S(y_i) - x_i\right)^2 = 0$$

Aleshores $R(x_i) = y_i$ i $S(y_i) = x_i$ per a tot i = 1, 2, ..., n.

Els valors x_i i y_i **depenen linealment** a través de les rectes de regressió, que són la mateixa recta.

- Si $\rho = 0 \;\rightarrow\; S_{xy} = 0$, aleshores la recta R és horitzontal i la recta S és vertical, d'equacions:

R: $\mathbf{x - \bar{x} = 0}$ **S:** $\mathbf{y - \bar{y} = 0}$



Exemple 9

Calculem els coeficients de correlació de les mostres dels exemples 3 i 7.

- En l'exemple 3, la mostra de grandària 6 és:

$$\{(0, 0),\ (8, 1),\ (40, 5),\ (50, 6),\ (60, 7),\ (80, 9)\}$$

Com que $S_x^2 = 787.11$, $S_y^2 = 10.22$ i $S_{xy} = 89.55$:

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{89.55}{\sqrt{787.11} \cdot \sqrt{10.22}} = \mathbf{0.9984}$$

El valor tan pròxim a 1 del coeficient de correlació lineal $\rho = 0.9984$ demostra, sense necessitat de veure la gràfica de la mostra, que l'ajust lineal és quasi perfecte, i el signe positiu, que les rectes de regressió són creixents (a majors valors d'una variable corresponen majors valors de l'altra). Les rectes de regressió ajustaran molt bé les dades i les prediccions seran fiables.

- En l'exemple 7 la mostra, de grandària 50, és:

(168, 56)	(165, 50)	(159, 65)	(165, 62)	(161, 54)	(160, 46)	(152, 44)	(160, 58)	(165, 72)	(173, 73)
(156, 44)	(163, 58)	(165, 47)	(164, 68)	(168, 70)	(167, 49)	(169, 60)	(169, 53)	(174, 55)	(165, 55)
(164, 48)	(163, 54)	(164, 46)	(163, 60)	(163, 49)	(162, 55)	(160, 55)	(173, 83)	(171, 65)	(160, 54)
(170, 53)	(167, 63)	(175, 62)	(156, 46)	(163, 65)	(165, 49)	(172, 59)	(163, 53)	(170, 60)	(180, 64)
(174, 65)	(173, 63)	(151, 46)	(176, 65)	(160, 66)	(165, 50)	(165, 67)	(172, 58)	(162, 65)	(166, 62)

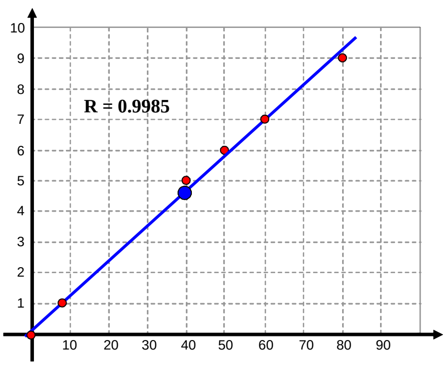
Com que $S_x^2 = 35.57$, $S_y^2 = 71.93$ i $S_{xy} = 25.7544$:

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{25.7544}{\sqrt{35.57} \cdot \sqrt{71.93}} = \mathbf{0.5092}$$

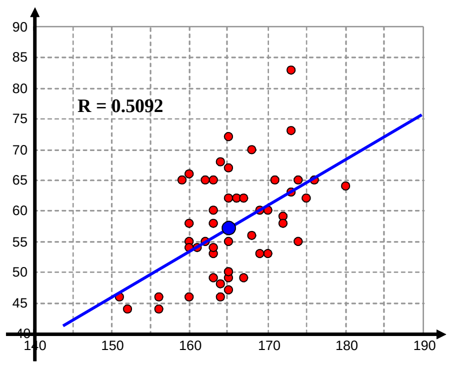
El valor allunyat d'1 del coeficient de correlació $\rho = 0.5192$ vol dir que l'ajust lineal és pobre, en comparació amb el cas anterior. En aquest cas les rectes de regressió no proporcionen valors fiables en les prediccions.

A continuació tenim els diagrames de dispersió de les dues mostres, que corroboren allò que s'ha obtingut amb el coeficient de correlació.

Exemple 3



Exemple 7



11. Estudiem amb les següents mostres els resultats més extrems per al coeficient de correlació:

(A) Representa la mostra (1,2), (1,3), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,2) i (4,3), comprova que $\rho = 0$, i que les rectes de regressió són una horitzontal i l'altra vertical.

(B) Representa la mostra (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) i (4, 9), de punts de la recta $y = 2x + 1$, comprova que $\rho = 1$, i que les rectes de regressió són iguals a l'anterior recta.

➢ Propietats

Suposem que $\mathbf{m_R}$ i $\mathbf{m_S}$ són els pendents de les rectes de regressió R i S de dues variables X i Y. Obtenim las següents propietats:

P3 $\dfrac{\mathbf{m_R}}{\mathbf{m_S}} = \boldsymbol{\rho^2 = D}$

P4 $\begin{cases} \text{Si} \quad m_R > 0,\ m_S > 0 \quad \to \quad m_R < m_S \\ \text{Si} \quad m_R < 0,\ m_S < 0 \quad \to \quad m_R > m_S \end{cases}$

P3 Com que $m_R = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, $m_S = \dfrac{S_y^2}{S_{xy}}$ i $\rho = \dfrac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$, aleshores:

$$\frac{m_R}{m_S} = m_R \cdot \frac{1}{m_S} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\frac{S_{xy}}{S_y^2} = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 \cdot S_y^2} = \rho^2$$

P4 Com que $\rho^2 \le 1 \quad \to \quad \dfrac{m_R}{m_S} = \rho^2 \le 1 \quad \to \quad \dfrac{m_R}{m_S} \le 1$

- Si $m_R > 0$ i $m_S > 0 \quad \to \quad m_R \le m_S$
- Si $m_R < 0$ i $m_S < 0 \quad \to \quad m_R \ge m_S$

Exemple 10

Les rectes d'equacions 2x – y + 3 = 0 i x – y = 2 són les rectes de regressió de dues variables X i Y. Calculem el coeficient de correlació.

Obtenim els pendents d'ambdues rectes, expressant-les prèviament en les seues equacions explícites:

$$2x - y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3 \qquad\qquad x - y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 2$$

Els pendents de les dues rectes són m = 2 i m’ = 1.

Com per la propietat P4: $\rho^2 = \dfrac{m_R}{m_S}$, i per la propietat P1 $\rho^2 \le 1$, aleshores necessàriament:

$$m_R = 1 \text{ i } m_S = 2 \quad \to \quad \rho^2 = \frac{1}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

perquè, en cas contrari, seria $\rho^2 = \dfrac{2}{1} = 2$ la qual cosa és impossible, perquè ha de ser $\rho^2 \le 1$. Aleshores:

R: y = x – 2 i **S: y = 2x + 3**

12 Amb les dades de l'activitat 2, respon a les següents preguntes:
(A) Quina mortalitat infantil correspon a un país amb una esperança de vida de 40 anys? I de 80 anys?
(B) Quina esperança de vida correspon a un país amb una mortalitat infantil del 5%? I del 1%?

13 És possible que las següents rectes siguen de regressió de dues variables? R: x + 2y = 1 i S: x – y = 2.

14 Una empresa té 4 categories d'empleats, A, B, C i D. Té una factoria a Espanya i una altra a Egipte. Els sous dels seus empleats, per mes i categoria, difereixen en ambdós països, i vénen donats en la següent taula:

	A	B	C	D
Espanya X	1200	1600	2000	2400
Egipte Y	260	380	500	800

L'empresa pensa crear la categoria d'empleat E, amb una remuneració de 1000 € a Egipte, i utilitza la regressió lineal per a calcular la remuneració que correspondria a la mateixa categoria a Espanya. Quina quantitat percebran ací? És adequat utilitzar aquest mètode per a realitzar el càlcul? Explica la situació.

Problemes del capítol 2

1 En un país els tipus d'interès i l'índex de la borsa en els últims 6 trimestres han sigut els següents:

Tipus d'interès	8%	7.5%	7%	6.5%	6%	5.5%
Índex borsa	1200	1310	1400	1550	1750	1800

(A) Estima l'índex de la borsa per al pròxim trimestre, si el tipus d'interès és del 5%. I si fora del 4%?
(B) Estima el tipus d'interès quan l'índex de la borsa siga de 2500 punts.
(C) Calcula el coeficient de correlació lineal.

2 Un rail d'una via de tren mesura 100 metres, però la temperatura afecta a la seua longitud. La següent taula ens dóna els allargaments, en mm, obtinguts a diferents temperatures, en graus

x_i: temperatura	0	8	15	25	40	50	60	80
y_i: allargament	0	1	2	3	5	6	7	9

(A) Calcula el coeficient de correlació d'aquesta mostra bidimensional.
(B) Troba la recta de regressió de Y sobre X, i estima l'allargament que correspon a una temperatura de 45º.
(C) Troba la recta de regressió de X sobre Y, i estima la temperatura que correspon a un allargament de 10 mm.

3 Hem pres dades sobre el nombre de cigarrets consumits diàriament i la mortalitat. Aquestes dades són:

Nre. de cigarrets	3	4	6	15	20	40	45
Índex de mortalitat	0.2	0.3	0.3	0.5	0.7	1.4	1.5

(A) Quina és la predicció de mortalitat per a un consumidor de 60 cigarrets diaris?
(B) Quina és la predicció de consum diari per a un índex de mortalitat d'1?
(C) Quina és la qualitat de les prediccions realitzades?

4 La següent taula mostra l'evolució del nombre de trasplantaments de fetge en el període 1990/1995:

Any	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Nre. de trasplantes	5040	5326	6042	6649	7616	7900

(A) Amb aquestes dades, i suposant adequada una representació lineal, estima el nombre de transplantaments per a l'any 2005.
(B) Quina és la bondat de la representació lineal?

5 Les rectes de regressió per a dues variables X i Y són $2x + y = 50$ i $x + 2y = 55$.
(A) Calcula les mitjanes de les dues variables.
(B) Quina és la recta de regressió de Y sobre X?
(C) Quin és el valor del coeficient de correlació?

6 Repeteix les preguntes del problema anterior per a les rectes $3x - 5y = 1$ i $5x - 6y = 4$.

7 Les qualificacions dels alumnes d'una classe en Matemàtiques i les respectives de Selectivitat vénen donades en la següent taula. Estudia si la correlació és adequada.

Matemàtiques	6	6	6	8	6	7	7	9	6	8	8	5
Selectivitat	5.7	4.3	6.2	6.7	7.3	8.2	6	7	6.7	9.3	5.2	8

8 Les precipitacions, en litres/m^2, registrades en la ciutat de Banyeres durant els mesos d'abril en el període 1979/1990 es donen a continuació en la següent taula, junt amb les precipitacions per al mateix període en la ciutat d'Ontinyent, a 35 km de distància:

Any	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Banyeres	30	110	102	82	27	26	16	34	18	60	31	99
Ontinyent	24	107	169	63	8	24	17	29	8	39	40	81

(A) Calcula el coeficient de correlació entre les precipitacions de les dues ciutats. Quin significat té el seu signe?
(B) Estima la pluja que s'arreplegarà a Ontinyent quan a Banyeres s'arrepleguen 150 l/m^2.
(C) Estima la pluja que s'arreplegarà a Banyeres quan a Ontinyent s'arrepleguen 80 l/m^2.

9 Calcula el coeficient de correlació de la següent mostra bidimensional:

(1, 15) (3, 18) (5, 20) (8, 22) (10, 20)

(A) Si a les dades de la primera variable els sumem 10 unitats, i a les de la segona variable els restem 5 unitats, calcula el coeficient de correlació de la nova mostra. Què dedueixes del resultat?

(B) Si les dades de la primera variable les multipliquem per 100 i les de la segona variable les dividim per 10, calcula el coeficient de correlació de la nova mostra. Què dedueixes del resultat?

(C) A la vista dels resultats anteriors, calcula de la forma més còmoda possible el coeficient de correlació de la mostra bidimensional:

(2001, 0.05) (2002, 0.07) (2003, 0.06) (2004, 0.09) (2005, 0.1)

10 Calcula el coeficient de correlació entre els anys i les precipitacions de la ciutat de Banyeres, que tenim en la taula de l'exercici 8. És aconsellable restar 1979 a tots els anys, per a treballar amb nombres més petits. El coeficient de correlació serà el mateix. Quina opinió et mereix el resultat?

11 Les qualificacions obtingudes per 5 alumnes en Matemàtiques i Estadística són:

Matemàtiques	5	3	6	7	9
Estadística	7	5	8	9	1

(A) Calcula el coeficient de correlació entre les qualificacions de Matemàtiques i Estadística dels primers 4 alumnes. Què dedueixes del resultat?
(B) Calcula el coeficient de correlació per a les notes dels 5 alumnes. Justifica la diferència entre el valor obtingut i el de l'apartat anterior.

12 En Borsa s'estudia si determinats valors són representats adequadament per alguns índexs. En la següent taula vam relacionar els valors de l'IBEX 35 i els de Telefònica en el mes de maig del 2003.

Telefónica	9.72	9.79	10.02	9.65	9.45	9.55	9.55	9.51	9.43	9.40
IBEX 35	6456.4	6491.3	6568.7	6429.0	6300.5	6387.8	6395.0	6376.0	6363.4	6413.8
Telefónica	9.58	9.26	9.27	9.00	9.24	9.29	9.24	9.37	9.52	9.60
IBEX 35	6481.5	6279.6	6298.1	6198.9	6317.9	6346.2	6338.2	6363.6	6472.9	6483.0

(A) Estudia el coeficient de correlació entre les dues sèries i estableix si les variables tenen cert grau de dependència.
(B) En qualsevol cas, si el 25 juny del 2003 Telefónica va assolir el valor 10.28, quina seria la predicció de l'IBEX 35? (El vertader valor d'aquell dia va ser 6941.3).
(C) Si l'IBEX 35 va assolir el 26 de juny el valor 6944.6, quina seria la predicció per a Telefónica? (El vertader valor va ser 10.27).

13 A continuació tenim l'evolució del preu del barril de petroli, en dòlars per barril, i del preu del gasoil d'automoció, en cèntims d'euro per litre, durant els últims 25 anys, de 1990 a 2014.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Preu barril	19.68	22.81	17.52	17.24	14.17	16.88	17.79	23.29	15.07	11.32	25.21	25.95	19.15
Preu gasoil	36.87	41.75	44.34	48.97	49.03	49.46	54.28	56.5	53.55	57.27	70.3	70.06	69.5

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Precio barril	30.77	31.40	42.89	62.36	53.40	90.82	43.91	77.12	92.66	106.89	105.04	102.25
Precio gasoil	70.4	75.9	90	95.7	97	114.1	91.2	107.5	126.7	136.54	135.88	130.31

(A) Calcula la mitjana i la desviació típica del preus del barril.
(B) Calcula la mitjana i la desviació típica del preus del gasoil.
(C) Calcula el coeficient de correlació.
(D) Obtén l'equació de la recta de regressió necessària per a estimar el preu del gasoil si el del barril de petroli fora el pròxim any de 150, 125, 100, 75 i 50 dòlars, respectivament.

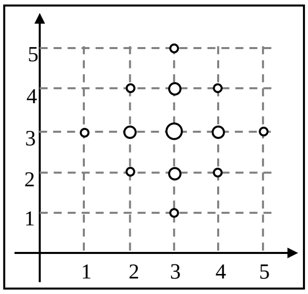
Solucions de les activitats del capítol 2

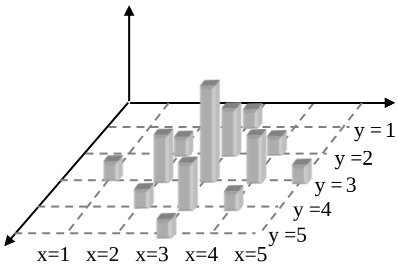
1.

x_i \ y_j	1	2	3	4	5	$n_{i.}$
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	2	1	0	4
3	1	2	4	2	1	10
4	0	1	2	1	0	4
5	0	0	1	0	0	1
$n_{.j}$	1	4	10	4	1	20

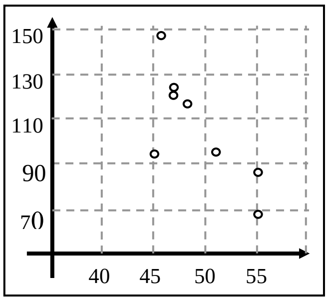
x_i	$n_{i.}$
0	1
1	4
2	10
3	4
4	1

y_i	$n_{i.}$
0	1
1	4
2	10
3	4
4	1





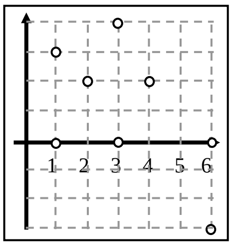
2. Sí.



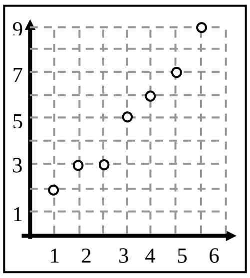
3. $D_R = 6 = D_S$; $D_R^2 = 6$ però $D_S^2 = 10$; R és millor que S.

x_i	1	2	2	4	4	5
y_i	1	0	2	2	4	3
R_i	0	–1	1	1	3	2
d_{Ri}	1	1	1	1	1	1
S_i	2	2	2	2	2	2
d_{Si}	1	2	0	0	2	1

4. $S_{xy} = -2.1$.

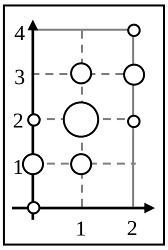


5. $S_{xy} = 5.75$, R: $y - 5.5 = \frac{23}{21}(x - 4.5)$.



6. $S_{xy} = 0.5$; R: $y = x + 1$.

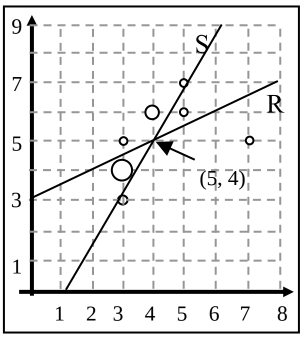
x_i \ y_i	0	1	2	3	4	$n_{i.}$
0	1	2	1	0	0	4
1	0	2	4	2	0	8
2	0	0	1	2	1	4
$n_{.j}$	1	4	6	4	1	16

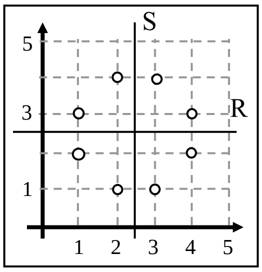


7. $S_{xy} = 5425$; R: $y - 126.5 = \frac{217}{3300}(x - 1950)$. **8.** 64.64 kg.

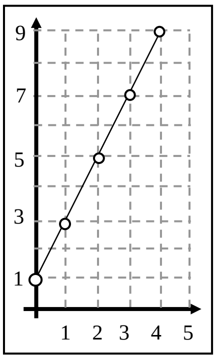
9. 77.18 €. **10.** (A) R: $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$; S: $x - 4 = \frac{4}{7}(y - 5)$.

(B) $m_R = 1/2$, $m_S = 4/7$. (C) 4. (D) 2.28.



11. (A) 

R: $y = 2.5$; S: $x = 2.5$, $\rho = 0$

(B) 

12. $\rho = -0.735$. (A) 150.53 ‰; no té sentit: –37.5 ‰, aquesta recta no és apropiada per a prediccions allunyades de les mitjanes. (B) 55.93 i 60.54 anys. **13.** No, tenen pendents de diferent signe. **14.** 2912 €, sí perquè el coeficient de correlació està prop de 1 ($\rho = 0.9694$).

Solucions dels problemes del capítol 2

1. (A) 1948.67 i 2204.1. (B) 2.91%. (C) –0.99. **2.** (A) 0.998. (B) R: $y = 0.1132x + 0.1898$; 5.28 mm. (C) S: $x = 8.8019y - 1.5577$; 86.46º. **3.** (A) 1.975. (B) 28.57 cigarrets. (C) 0.996. **4.** (A) 14206. (B) 0.989.

5. (A) $\overline{x} = 15$, $\overline{y} = 20$. (B) $x + 2y = 55$. (C) –0.5. **6.** (A) $\overline{x} = 2$, $\overline{y} = 1$. (B) $3x - 5y = 1$. (C) $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

7. $\rho = 0.134$, no és adequada. **8.** (A) 0.879, quant més plou en una més ho fa en l'altra. (B) 165 l/m^2. (C) 72.1 l/m^2. **9.** 0.829. (A) El mateix, sumar constants a tots els termes no afecta a la correlació. (B) El mateix, multiplicar cada terme per la mateixa constant no afecta a la correlació. (C) (1,5), (2,7), (3,6), (4,9), (5,10), $\rho = 0.915$. **10.** –0.196, no hi ha relació entre la pluja i l'any en què es mesura; el signe negatiu indica que al augmentar els anys, disminueixen les plujes. **11.** (A) $\rho = 1$, existeix dependència funcional (lineal). (B) –0.35, poca correlació lineal, perquè la nova parella afegida trenca totalment amb la tendència de les altres. **12.** (A) 0.909, hi ha molta correlació. (B) 6670.85. (C) 10.79. **13.** (A) $\overline{x} = 43.42$, $S_X = 32.18$. (B) $\overline{y} = 78.92$, $S_Y = 30.961$.

(C) $\rho = 0.923$. (D) r: $y - 78.92 = 0.888(x - 43.42)$; els preus per litre del gasoil serien, respectivament: 173.56 €, 151.36 €, 129.16 €, 106.96 € i 84.76 €.