MATEMÁTICAS

APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Raúl Juan Martínez

educàlia editorial

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Raúl Juan Martínez

educàlia
editorial

Segunda edición, 2020
Maquetación: Raúl Juan Martínez
Edita: Educàlia Editorial
Imprime: Grupo Digital 82, S. L.
ISBN: 978-84-17493-15-8
Depósito legal: V-2311-2018
Printed in Spain/Impreso en España.

Educàlia Editorial

Avda. de les Jacarandes 2 loft 327 46100 Burjassot-València
Tel. 960 624 309 - 963 76 85 42 - 610 900 111
Email: educaliaeditorial@e-ducalia.com

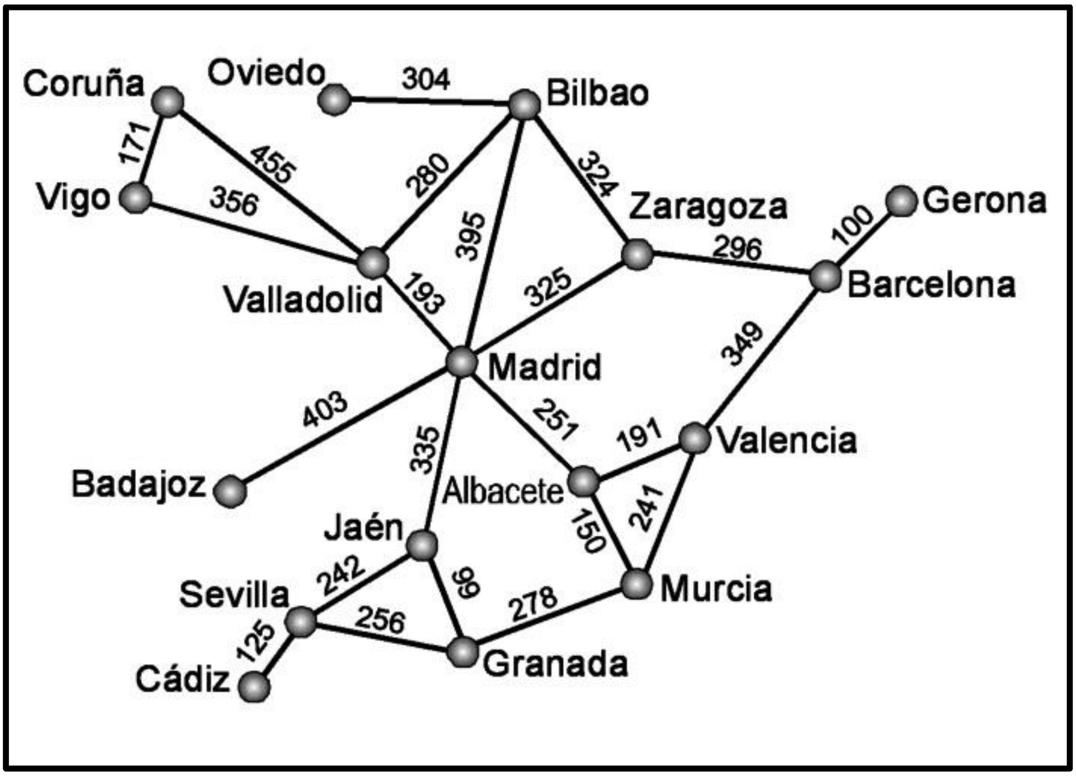
www.e-ducalia.com

A mis padres, *José* y *Fina*.
A mi mujer, *Mª José.*
A mis hijos, *María* y *Jorge*.

Gracias.

ÍNDICE

TEMA 1



MATRICES. DETERMINANTES

Todos somos unos genios. Pero si juzgas a un pez por su habilidad
de escalar un árbol, vivirá su vida entera creyendo que es estúpido.

Albert Einstein

ÍNDICE

1. MATRICES. TIPOS DE MATRICES

1.1. Matrices

Definición: Las **matrices** son tablas numéricas rectangulares de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos, a_{ij}, son números reales.

Al designar una matriz genérica, cada término tiene dos subíndices que indican la fila y la columna a la que pertenecen. Así, el término a_{ij} indica que está en la fila i y la columna j.

De forma abreviada, se puede expresar como: $A = (a_{ij})$.

Nuestra matriz tiene m filas y n columnas, por lo que se dice que es de **dimensión** $m \times n$, y se escribe $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$$

Definición: Dos **matrices** son **iguales** cuando, siendo de la misma dimensión, son iguales los elementos que ocupan el mismo lugar.

1.2. Tipos de matrices

Matriz fila: Son las matrices de dimensión $1 \times n$. También se llaman **vectores fila**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}$$

Matriz columna: Son las matrices de dimensión $m \times 1$. También se llaman **vectores columna**.

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$$

Matriz nula: Es la matriz que tiene todos sus elementos nulos. Se representa por **0**.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: Es la matriz que tiene igual número de filas y de columnas. Se dice que es de dimensión n en vez de $n \times n$. Distinguiremos la **diagonal principal**, que está formada por los elementos que se encuentran en la diagonal que va del vértice superior izquierdo al inferior derecho.

Cuando una matriz no es cuadrada, decimos que es una *matriz rectangular*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos que no son de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad: Es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son unos. Se representa por $\boldsymbol{I_n}$.

$$\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: Es una matriz cuadrada en la que los elementos que ocupan lugares simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir, $a_{ij} = a_{ji} \ \ \forall i, j$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior: Es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos situados por debajo de su diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos situados por encima de su diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. OPERACIONES CON MATRICES

2.1. Suma de matrices

Para que dos matrices puedan sumarse, es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso, se suman término a término.

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Se verifican las siguientes propiedades:

- ☐ Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ☐ Conmutativa: $A + B = B + A$
- ☐ Elemento neutro: Es la matriz nula: $A + 0 = 0 + A = A$
- ☐ Elemento opuesto: Toda matriz, A, tiene una opuesta, $-A$

Si representamos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$, tomando las propiedades de la suma, tenemos:

$$(\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}, +) \ \boldsymbol{es\ un\ grupo\ abeliano}$$

Veamos un ejemplo de como realizar la suma de matrices:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 \\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 \end{array}\right\} \rightarrow \ A + B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+0 & 3+2 \\ 4+2 & 5+1 & 6+3 \\ 7+3 & 8-2 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$$

2.2. Producto de un número por una matriz

Para multiplicar un número por una matriz, se multiplica cada término de la matriz por el número.

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Se verifican las siguientes propiedades:

☐ <u>Asociativa</u>: $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

☐ <u>Distributiva I</u>: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

☐ <u>Distributiva II</u>: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

☐ <u>Producto por 1</u>: $1 \cdot A = A$

Tomando las propiedades de la suma y del producto de un número por una matriz, tenemos:

$$(\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}, +, \cdot\, \mathbb{R})\ \boldsymbol{es\ un\ espacio\ vectorial\ sobre}\ \mathbb{R}$$

Veamos un ejemplo de cómo se realiza la multiplicación de un número por una matriz:

$$\left.\begin{array}{l} k = 2 \\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \end{array}\right\} \to \ k \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

2.3. Producto de matrices

Para que dos matrices A y B puedan multiplicarse, $A \cdot B$, es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda.

En tal caso, el producto $A \cdot B = C$ es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada vector fila de la primera matriz por cada vector columna de la segunda matriz, realizando la suma de los valores obtenidos, es decir, se multiplica componente a componente la fila i–ésima de A por la columna k–ésima de B, sumando a continuación todos los resultados.

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} \quad con\ 1 \le i \le m\,, 1 \le k \le p$$

Así, si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}\ \ y\ \ B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, entonces tenemos que $C = A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times p}$.

Se verifican las siguientes propiedades:

☐ <u>Asociativa</u>: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

☐ <u>Distributiva respecto de la suma</u>: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

☐ <u>Elemento unidad</u>: Es la matriz identidad: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

☐ <u>**NO** conmutativa</u>: En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$

Tomando las propiedades de la suma, del producto de un número por una matriz y del producto de matrices, tenemos:

$$(\boldsymbol{\mathcal{M}_{m\times n}}, +, \cdot\, \mathbb{R}, \cdot)\ \boldsymbol{es\ una}\ \mathbb{R} - \boldsymbol{algebra}$$

Veamos un par de ejemplos de como se realiza la multiplicación de matrices, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}\ \ y\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0-2 & -4+0+4\\ 2+3-4 & 8+0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & 16\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+8 & 0+4 & 2+16\\ -3+0 & 0+0 & 6+0\\ 1+4 & 0+2 & -2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 18\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3$$

Se puede observar en el ejemplo que NO se verifica la propiedad conmutativa, ya que $A\cdot B$ es de dimensión 2×2 y $B\cdot A$ es de dimensión 3×3, por lo que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

2.4. Matriz traspuesta

Dada una matriz $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos **traspuesta de $\boldsymbol{A}$**, y se representa por $\boldsymbol{A^t}$, a una matriz que se obtiene de A al cambiar en ella filas por columnas.

Si $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ entonces $A^t\in\mathcal{M}_{n\times m}$.

Se verifican las siguientes propiedades:

$$(A^t)^t=A \qquad (A+B)^t=A^t+B^t \qquad (A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t \qquad (\alpha\cdot A)^t=\alpha\cdot A^t$$

Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 3}\rightarrow\ A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 2}$$

2.5. Potencia de matrices

Sea una matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_n$. Calculamos las distintas potencias de la matriz realizando las multiplicaciones pertinentes. Así,

$$A^2=A\cdot A \qquad A^3=A^2\cdot A \qquad A^4=A^3\cdot A \qquad A^5=A^4\cdot A$$

Observación: Si la matriz no es cuadrada no es posible realizar el producto de la matriz por sí misma, por lo que no podemos realizar la potencia de la matriz.

Vamos a realizar un par de ejemplos.

1) Sea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2$ y vamos a calcular A^{100}.

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}=A$$
$$A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A$$
$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=A$$

Podemos observar que $A^n=A\ \ \forall n$. Por tanto, $A^{100}=A$.

2) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2$ y vamos a calcular A^{2018}.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$
$$A^3=A^2\cdot A=I_2\cdot A=A$$
$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=I_2$$
$$A^5=A^4\cdot A=I_2\cdot A=A$$

Podemos observar que $A^n=\begin{cases}A & si\ \ n\ es\ impar\\ I_2 & si\ \ n\ es\ par\end{cases}\ \ \forall n$. Por tanto, $A^{2018}=I_2$.

3. MATRIZ INVERSA

3.1. Matriz inversa

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ se dice **regular** si existe otra matriz del mismo orden, llamada **inversa** de A, y que se representa por $\boldsymbol{A^{-1}}$, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

Se verifican las siguientes propiedades:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad\qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

3.2. Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ es una matriz regular, se puede obtener la matriz inversa de la matriz A, $A^{-1} = (x_{ij})$, resolviendo n sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Si el sistema no tiene solución, la matriz no tiene inversa.

Vamos a realizar un ejemplo para una matriz de tamaño 2, no realizando una de tamaño 3 porque el método es muy laborioso y veremos posteriormente métodos más óptimos.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Para calcular su inversa, suponemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & z+3t \\ 2x+5y & 2z+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se trata de dos matrices iguales, igualamos términos, formándose 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+5y=0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} z+3t=0 \\ 2z+5t=1 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se tiene que:

$$x=-5, y=2 \qquad\qquad z=3, t=-1$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3. Cálculo de la matriz inversa usando el método de Gauss

Se coloca la matriz $A \in \mathcal{M}_n$, y a su derecha, la matriz I_n. Realizamos las transformaciones necesarias para que A se transforme en I_n. Como consecuencia, la matriz que se obtiene a la derecha de I_n es A^{-1}.

$$(A|I_n) \xrightarrow{Transformaciones} (I_n|A^{-1})$$

<u>*Observación*</u>: Se pueden cambiar filas, pero no se pueden cambiar columnas. Además, si en la parte izquierda aparece una fila o columna de ceros, A no tiene inversa.

Vamos a realizar un ejemplo para una matriz de tamaño 2 y otro para una de tamaño 3.

1) Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1-3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=3F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[F_2=F_2-F_3]{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -24 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{F_1=\frac{F_1}{3} \quad F_2=\frac{F_2}{6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. RANGO DE UNA MATRIZ

4.1. Definición

Se llama **rango** de una matriz al número de filas linealmente independientes.

En una matriz, el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes, por lo que el rango será el número de filas o columnas linealmente independientes.

<u>*Nota*</u>: El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es a lo sumo el mínimo entre m y n, es decir,

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow Rango(A) \leq \min\{m, n\}$$

4.2. Obtención del rango de una matriz por el método de Gauss

Para hallar el rango de una matriz, podemos proceder a “hacer ceros” como en el método de Gauss. El rango de la matriz escalonada final es el número de filas distintas de $(0\ 0 \cdots\ 0)$.

<u>*Observación*</u>: Se pueden cambiar filas y columnas, sin perjuicio para el rango.

Veamos unos ejemplos de como se realiza el rango usando el método de Gauss:

1) Rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4$.

Como la matriz A es escalonada, es inmediato que el rango de A es 4.

2) Rango de $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&0&3\\3&3&3&7\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times4}$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&0&3\\3&3&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-6&-5\\0&-3&-6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-6&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de A será 2.

4.3. Discusión del rango de una matriz con un parámetro

Veamos unos ejemplos de como se realiza la discusión del rango con un parámetro:

1) Sea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&6a\\0&0&2a+4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3$

Una vez que tenemos la matriz escalonada, comprobamos cuales son los valores que anulan los elementos de la diagonal que se nos ha formado. Así, el único elemento que puede anularse es $2a+4$, siendo cuando $a=-2$. Ahora, tenemos:

- ☐ Si $a=-2$, tenemos: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&-12\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow Rango(A)=2$
- ☐ Si $a\neq-2$, tenemos: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&6a\\0&0&\underset{\neq 0}{2a+4}\end{pmatrix}\rightarrow Rango(A)=3$

2) Sea $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&a&3\\3&3&5&7\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times4}$. Haciendo ceros, tenemos:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&a&3\\3&3&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&a-6&-5\\0&-3&-4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=F_2-F_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&a-6&-5\\0&0&2-a&0\end{pmatrix}$$

Comprobamos cuales son los valores que anulan los elementos de la diagonal. Así, el único elemento que puede anularse es $2-a$, siendo cuando $a=2$. Ahora, tenemos:

- ☐ Si $a=2$, tenemos: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&-4&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow Rango(A)=2$
- ☐ Si $a\neq2$, tenemos: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&a-6&-5\\0&0&\underset{\neq 0}{2-a}&0\end{pmatrix}\rightarrow Rango(A)=3$

5. DETERMINANTES

5.1. Definición

En Matemáticas se define el **determinante** como una *forma multilineal alternada* de un cuerpo. Esta definición indica una serie de propiedades matemáticas y generaliza el concepto de determinante haciéndolo aplicable en numerosos campos. Sin embargo, el concepto de determinante o de volumen orientado fue introducido para estudiar el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

Se llama **determinante** de una matriz cuadrada a un número que se obtiene operando de cierta forma con los elementos de la matriz.

El determinante de A se puede designar de cualquiera de las siguientes formas:

$$\det A \qquad |A| \qquad \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

5.2. Determinantes de orden dos

El determinante de una matriz cuadrada de orden dos se obtiene del siguiente modo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

5.3. Determinantes de orden tres

El determinante de una matriz cuadrada de orden tres se obtiene del siguiente modo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$
$$-a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

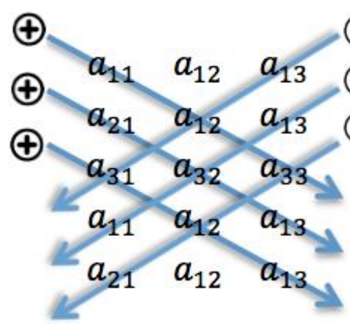
Se puede observar que:

- ☐ En cada producto hay un factor de cada fila y uno de cada columna.
- ☐ La mitad de los sumandos tienen signo **+**, y la otra mitad, signo **–**. Estos seis sumandos se recuerdan fácilmente con la siguiente regla mnemotécnica, llamada **regla de Sarrus**:

SUMANDOS CON SIGNO +

SUMANDOS CON SIGNO ☐

- ☐ Otra regla mnemotécnica para calcular el determinante: Colocamos las dos filas superiores debajo de la tercera, y aplicamos el siguiente esquema:



5.4. Propiedades de los determinantes

P1: El determinante de una matriz es igual que el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.

P2: Si una matriz cuadrada tiene una línea[1] de ceros, su determinante es 0.

P3: Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es cero.

[1] Escribiremos **línea** para indicar que puede ser una fila o una columna.

P4: Si se permutan dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

P5: Si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese número.

P6: Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas proporcionales, su determinante es 0.

P7: $\begin{vmatrix} a & b+x & c \\ d & e+y & f \\ g & h+z & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & c \\ d & y & f \\ g & z & i \end{vmatrix}$

P8: Si a una línea de una matriz le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, su determinante no varía.

P9: Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero. Y recíprocamente: si un determinante es cero, tiene alguna línea combinación lineal de las demás.

P10: El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

6. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

6.1. Calculo de la inversa de una matriz

Definición: Si en una matriz seleccionamos r filas y r columnas, los elementos que se cruzan forman una submatriz cuadrada de orden r. El determinante de esa submatriz se llama **menor de orden r** de la matriz inicial.

Definición: Si en una matriz cuadrada destacamos un elemento, a_{ij}, al suprimir su fila y su columna se obtiene una submatriz de tamaño menor. Su determinante se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se designa por $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$.

Definición: Se llama **adjunto** de a_{ij} al número $\boldsymbol{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \longrightarrow A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \longrightarrow A_{23} = (-1)^5 \cdot (-2) = 2$$

Observación: Para que una matriz cuadrada, $A \in \mathcal{M}_n$, tenga **inversa**, es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo, es decir, $|A| \neq 0$.
En este caso, se puede calcular mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$$

donde $Adj(A)$ es la matriz formada por los adjuntos de la matriz A, es decir, $Adj(A) = \left(A_{ij}\right)$.

Ejemplos:

1) Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \ \rightarrow \ A\ no\ tiene\ inversa$$

2) Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0 \ \rightarrow \ A\ tiene\ inversa$$

Ahora,

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot |5| = 5 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot |2| = -2$$
$$A_{21} = (-1)^3 \cdot |3| = -3 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1$$

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 12 - 0 - 16 - (-6) = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ A\ tiene\ inversa$$

Ahora,

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -16 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$
$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$
$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -3 & 12 \\ 6 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 6 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 6 & -8 \\ -3 & 1 & -1 \\ 12 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4) Halla el valor de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & a & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ tenga inversa.

Primero calculamos el determinante de la matriz,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & a & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a + 0 + 12 - 0 - 16 - (-6) = a + 2$$

Para que tenga inversa necesitamos que $|A| \neq 0$, así tenemos que:

$$|A| = 0 \rightarrow a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$$

Por tanto, tendrá inversa para $a \neq -2$.

6.2. Obtención del rango de una matriz

Proposición: Una condición necesaria y suficiente para que las filas (o columnas) de una matriz cuadrada sean *linealmente dependientes*[2] es que su determinante sea cero. Por tanto,

[2] *Linealmente dependiente*: Alguna fila (o columna) de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás.

$$Las\ filas\ de\ A\ son\ linealmente\ dependientes\ \Leftrightarrow\ |A| = 0$$
$$Las\ filas\ de\ A\ son\ linealmente\ independientes\ \Leftrightarrow\ |A| \neq 0$$

<u>*Observación*</u>: A partir de la proposición anterior, podemos calcular el rango de una matriz a partir sus menores, teniéndose que:

$$El\ rango\ de\ una\ matriz\ es\ el\ máximo\ orden\ de\ sus\ menores\ no\ nulos$$

<u>*Ejemplo*</u>:

1) Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}$.

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$, sabemos que $Rango(A) \leq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0\ \rightarrow Rango(A) \geq 2$$

$$\left.\begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 18 - 9 - 0 - 12 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 18 + 24 - 12 - 9 - 28 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Rango(A) < 3$$

Por tanto, $Rango(A) = 2$.

2) Vamos a calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4}$.

Como $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}$, sabemos que $Rango(A) \leq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0 \rightarrow Rango(A) \geq 2$$

Por tanto, $Rango(A) = 2$.

3) Vamos a discutir el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6a \\ 0 & 0 & 2a+4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$ en función del parámetro a.

Como $A \in \mathcal{M}_3$, sabemos que $Rango(A) \leq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0\ \rightarrow Rango(A) \geq 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6a \\ 0 & 0 & 2a+4 \end{vmatrix} = 4(2a+4) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8a + 16$$

Ahora, tenemos: $8a + 16 = 0 \rightarrow a = -2$. Por tanto,

- ☐ Si $a = -2$, tenemos: $|A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$. Por tanto, $Rango(A) = 2$.
- ☐ Si $a \neq -2$, tenemos: $|A| \neq 0 \rightarrow Rango(A) \geq 3$. Por tanto, $Rango(A) = 3$.

4) Vamos a discutir el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ en función del parámetro a.

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$, sabemos que $Rango(A) \leq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0\ \rightarrow Rango(A) \geq 2$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 18 + 24 - 12 - 9 - 28 = 49 - 49 = 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 6a + 18 - 9 - 3a - 20 = 3a - 6$$

Ahora, tenemos: $3a - 6 = 0 \rightarrow a = 2$. Por tanto,

☐ Si $a = 2$, tenemos: $A_2 = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$. Por tanto, $Rango(A) = 2$

☐ Si $a \neq 2$, tenemos: $A_2 \neq 0 \rightarrow Rango(A) \geq 3$. Por tanto, $Rango(A) = 3$.

7. EJERCICIOS

7.1. Ejercicios de matrices

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B$ d) A^t g) $A \cdot B$ j) B^2

b) $A - B$ e) B^t h) $B \cdot A$ k) $(A + C)^2$

c) $B - A$ f) $(A + B)^t$ i) A^2 l) $A \cdot B^t$

2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B$ d) A^t g) $A \cdot B$ j) B^2

b) $A - B$ e) B^t h) $B \cdot A$ k) C^2

c) $B - A$ f) $(A + B)^t$ i) A^2 l) $B^t \cdot A$

3. Calcula $A^t \cdot B - C^2$, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $B + C$ d) $A \cdot C$ g) $A \cdot B + C$

b) $-A$ e) $C \cdot A$ h) $B \cdot A$

c) $3B - 2C$ f) $A \cdot (B + C)$ i) $A \cdot C - 2C$

5. Calcular, cuando sea posible, los productos $A \cdot B, A \cdot C, B \cdot C$ y $C \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Efectúa todos los posibles productos entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Halla la inversa de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$$

8. Halla la inversa de las siguientes matrices o averigua que no la tiene, utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&3&1\\0&3&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

9. Calcula la inversa de las siguientes matrices $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&2\\-1&3&2\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&-1&1\\3&2&2\end{pmatrix}$.

10. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}3&-2\\-6&4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-3\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}$

11. Calcula el rango de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&3&1\\0&3&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&3&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

12. Calcula el rango de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&1&-1\\0&-2&1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&2&1&-1\\1&1&3&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&1\\2&-2&1&2\end{pmatrix}$$

13. Discute el rango de las siguientes matrices, dependientes del parámetro a, utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&1&-1\\0&2&a&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&2&1&-1\\1&a&-1&-2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&a&1\\2&4&1&3\end{pmatrix}$$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales, donde:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5&2\\7&0\end{pmatrix}$$

a) $AX+B=C$ **c)** $AX-B=C$ **e)** $XA-B=C$

b) $XA+B=2C$ **d)** $AX-3B=2C$ **f)** $XA-3B=2C$

15. Resuelve las ecuaciones matriciales, donde:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

a) $AX+B=C$ **c)** $AX+2B=3C$ **e)** $AX-B=C$

b) $AX-B=2C$ **d)** $AX-3B=2C$ **f)** $AX-2B=3C$

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz inversa de A y resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

17. Resuelve la ecuación $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. Calcula dos matrices cuadradas A y B sabiendo que $2A + 3B = C$ y que $A - B = D$, donde $C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Calcula los valores de a y b para que se verifique $AB + C = D$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

20. Calcula los valores de a y b para que se verifique $AB - C = D$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

21. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 y expresa el resultado en función de la matriz identidad.

b) Utiliza la relación hallada con la matriz identidad para calcular A^{2017}.

22. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, I_3 la matriz identidad de orden tres y 0 la matriz nula.

a) Comprueba que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.

b) Halla la matriz A^{-1}.

23. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, I_3 la matriz identidad de orden tres y 0 la matriz nula.

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I_3 = 0$.

b) Calcula razonadamente A^{10}.

c) Obtén la matriz inversa de A.

24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad de orden tres y 0 la matriz nula.

a) Comprueba que se cumple $A \cdot (A^2 - 2I) = 0$.

b) Determina el valor del número k para que sea cierto $A^3 = k \cdot A$.

c) Calcula razonadamente A^9.

25. Dada la matriz A encuentra el mayor exponente n que cumple $A^n \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Determina los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

27. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcula el valor de a y b para que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, halla A^3 y A^4.

c) Sea n un número natural cualquiera, halla la expresión de A^n en función de n.

28. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{50}.

29. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcula $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$.

30. Determinar los valores de a para los cuales la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $2X^2 - 5X + 2I = 0$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2 y 0 la matriz nula.

31. ¿Existe algún valor de x que verifique la igualdad $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$?

7.2. Ejercicios de determinantes

32. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ y comprobar que coincide con el determinante de su traspuesta.

33. Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$. ¿Qué observas?

34. Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. ¿Qué observas?

35. Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$. ¿Qué observas?

36. Siendo A una matriz 2×2, justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Para que $|A| = 0$ es necesario que sus cuatro elementos sean 0.

b) Si los dos elementos de la primera columna de A son 0, entonces $|A| = 0$.

c) Si las dos filas de A coinciden, entonces $|A| = 0$.

d) Si $\begin{vmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 5$, entonces $\begin{vmatrix} a & 20 \\ c & 10 \end{vmatrix} = 50$

37. Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -14 & 7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

38. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $|A| = -12$. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$ **c)** $|2A|$ **d)** $\begin{vmatrix} 3c & 3d \\ 5a & 5b \end{vmatrix}$

39. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

40. Probar que si I es la matriz identidad, entonces $|I| = 1$.

41. Probar que si A es una matriz regular, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

42. Halla la inversa de las matrices de los ejercicios 7 y 8 utilizando determinantes.

43. Calcula el rango de las matrices de los ejercicios 11 y 12, utilizando determinantes.

7.3. Ejercicios de EBAU

44. (2018) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t(B + C) = D$.

45. (2017) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^t.

b) Calcular $A \cdot B$.

c) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad.

46. (2016) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $C^t + I$, siendo I la matriz identidad.

b) Hallar x, y y z para que se cumpla que $AB = C^t + I$.

47. (2016) Hallar x, y y z para que se verifique

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ -1 & -\frac{y}{2} \\ 2 & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

48. (2015) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $B^t + 2C$.

b) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que $AX = B^t + 2C$.

49. (2014) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.